I. Akad. nauk

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

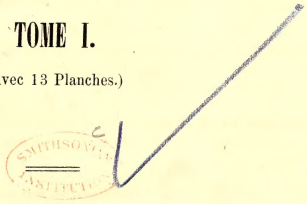
DE

SAINT-PÉTERSBOURG.

VIIe SÉRIE.

TOME I.

(Avec 13 Planches.)



SAINT-PÉTERSBOURG, 1859.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg, MM. Eggers et Comp., **à Riga,** M. Samuel Schmidt, **à Leipzig,** M. Léopold Voss.

Prix: 6 Roubl. 35 Kop. arg. = 7 Thlr. 2 Ngr.

AS 262
.S 82

Imprimé par ordre de l'Académie.

Octobre 1859.

C. Vessélofski, Secrétaire perpetuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

506A7
A33
7e ser.
t. 1
1859
W. Stks.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

№ 1.

Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae et 61 Cygni. Par **Otto Struve,** Membre de l'Académie. 51 pages.

№ 2.

Die Parthenogenesis im Pflanzenreiche. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Versuche und Schriften über Samenbildung ohne Befruchtung, nebst Beleuchtung derselben nach eigenen Beobachtungen von Dr. **E. Regel,** wissenschaftlichem Director des Kaiserlichen botanischen Gartens. (Mit 2 Tafeln.) 48 pages.

№ 3.

Beiträge zur Anatomie des Keilbeines und Schläfenbeines. Von Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.** (Mit 1 Tafel.) 16 pages.

№ 4.

Menschliches Analogon der thierischen Vagina nervi trigemini ossea am Felsenbeine. Von Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.** (Mit 1 Tafel.) 16 pages.

№ 5.

Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations. Par **P. Tchébychef,** Membre de l'Académie. 81 pages.

№ 6.

Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Par **T. F. de Schubert,** Général de l'Infanterie, Membre honoraire de l'Académie. (Avec une Planche.) 32 pages.

№ 7.

Zur Morphologie der Sprache. Von **August Schleicher,** Correspondierendem Mitgliede der Akademie. 38 pages.

№ 8.

Новыя изслѣдованія о предваренін равноденствій и колебаніи земной оси. **Д. Перевощикова,** Члена Академіи. 26 pages.

№ 9.

Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. Par **V. Bouniakowsky,** Membre de l'Académie. 18 pages.

№ 10.

Ueber den russischen Euklas. Von **N. v. Kokscharow.** Mitgliede der Akademie. (Mit 1 Tafel.) 25 pages.

№ 11.

Ueber den russischen Zirkon. Von **N. v. Kokscharow.** Mitgliede der Akademie. (Mit 4 Tafeln.) 15 pages.

№ 12.

Euripideische Studien. Von **August Nauck.** Mitgliede der Akademie. Erster Theil. 139 pages.

№ 13.

Ueber den seitlichen Hermaphroditismus eines 22-jährigen Menschen. Von Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.** (Mit 3 Tafeln.) 28 pages.

№ 14.

Sur l'équation algébrique à l'aide de laquelle on détermine les oscillations très-petites d'un système de points matériels. Par **J. Somof.** Membre correspondant de l'Académie. 30 pages.

№ 15.

Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés. Par **P. Tchébychef.** Membre de l'Académie. 24 pages.

AVIS.

—

La VIe série des Mémoires de l'Académie Impériale forme les deux recueils suivants:

Sciences mathématiques, physiques et naturelles.

Sciences politiques, histoire et philologie (Tome I—IX, 1832—1859).

Lorsque l'Académie (divisée, depuis 1841, en Classe physico-mathématique et en Classe historico-philologique) commença la publication de ces recueils, elle ne comptait dans son sein que deux naturalistes. Cette circonstance devait l'engager à réunir les mémoires de mathématiques et de physique, ainsi que ceux d'histoire naturelle dans un même recueil. Les deux premiers volumes de ce dernier ont paru, en 1831 et 1833, sous le titre unique de **Mémoires de l'Acad. Imp. des sciences, VIe Série, Sciences mathématiques, physiques et naturelles,** et renferment des travaux de mathématiques et d'astronomie, de chimie et de physique, de botanique, de zoologie et d'anatomie. Plus tard, quand les sciences biologiques eurent à l'Académie un plus grand nombre de représentants, ce recueil fut subdivisé en deux *parties*, dont *la première* comprenait les mémoires de mathématiques et d'astronomie, de chimie et de physique, et *la seconde* ceux de sciences naturelles ou biologiques. Mais en conservant, pour l'une et l'autre publication, le titre général de *Sciences mathématiques, physiques et naturelles*, et en y ajoutant pour *la première partie* (Tome III—IX), le titre spécial:

Sciences mathématiques et physiques, Tome I—VII (1838—1859),

et pour *la seconde* (Tome III—X), le titre spécial:

Sciences naturelles, Tome I—VIII (1835—1859),

on en avait rendu les citations très compliquées. Il est bon cependant de noter que l'on peut éviter des mal-entendus, en ne citant les deux parties des Mémoires sur les sciences physico-mathématiques que *d'après les titres spéciaux*, formant la *dernière* page du titre, par ex.:

Mémoires de l'Acad. des sc. Sciences mathém. et physiques, Tome Ier (1838).

Mémoires de l'Acad. des sc. Sciences naturelles, Tome Ier (1835).

Quand en 1849 l'Académie a adopté pour principe de faire tirer de chaque mémoire des exemplaires à part, M. le directeur de l'Observatoire central de Poulkova a eu l'idée de réunir les mémoires d'astronomie dans un recueil séparé, portant le titre:

Recueil de mémoires présentés à l'Académie des sciences par les astronomes de Poulkova, ou offerts à l'Observatoire central par d'autres astronomes du pays; publié avec l'autorisation de l'Académie, par W. Struve. Deux Volumes, 1853 — 1859.

Ces volumes renferment les mémoires d'astronomie, déjà imprimés dans le Tome V^e^ et suiv. des Mémoires mathématiques et physiques.

En outre on a encore publié séparément les

Mémoires présentés à l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants, Tome I—IX (1831 — 1859).

Ce recueil porte aussi le titre, plus commode à citer:

Mémoires des savants étrangers (= Записки постороннихъ ученыхъ), **Tome I—IX,** St.-Pét. 1831 — 1859.

Pour simplifier le mode de publication des Mémoires et pour en accélérer l'envoi aux sociétés savantes et aux universités du pays et de l'étranger, entretenant un échange de leurs publications contre celles de l'Académie Impériale, les Classes physico-mathématique et historico-philologique ont arrêté, au mois de décembre 1858, la suppression des différents recueils précités et la publication de tous les mémoires présentés, tant par leurs membres que par des savants étrangers, sous ce titre unique:

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série, T. I, N° 1er et suiv.

Chaque mémoire sera mis en vente séparément chez MM. les commissionnaires de l'Académie, aussitôt que l'impression en sera achevée, et l'on annexera au dernier N° de chaque tome un titre général et une table des matières.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
Tome I, N° 1.

NOUVELLE DÉTERMINATION
DE LA
PARALLAXE ANNUELLE
DES ÉTOILES
α LYRAE ET 61 CYGNI.

PAR

Otto Struve,
Membre de l'Académie.

Lu le 13 décembre 1854.

St.-PÉTERSBOURG, 1859.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
MM. Eggers et Comp. à St.-Pétersbourg, M. Samuel Schmidt à Riga
et M. Léopold Voss à Leipzig.

Prix: 45 Kop. = 15 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Mai 1859.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

NOUVELLE DÉTERMINATION

DE LA

PARALLAXE ANNUELLE DES ÉTOILES α LYRAE ET 61 CYGNI

PAR **OTTO STRUVE.**

1. Introduction et remarques générales.

Avant d'entreprendre une série plus étendue de recherches sur les parallaxes annuelles des étoiles fixes, à l'aide de mesures micrométriques à exécuter avec la grande lunette de l'Observatoire de Poulkova, j'ai cru devoir m'occuper d'abord, dans cette voie, des deux étoiles, α Lyrae et 61 Cygni, pour lesquelles nous possédons déjà des déterminations des parallaxes, dans les travaux connus de mon père et de Bessel. Le travail de mon père sur α Lyrae, exécuté à Dorpat dans les années 1835 à 1838 et publié dans les Mémoires de l'Académie, en 1840, a le mérite particulier d'avoir donné un nouvel élan à ce genre de recherches, en prouvant par le fait que les mesures micrométriques pouvaient être employées avec succès dans ces recherches. Mais la valeur numérique de la parallaxe n'étant basée que sur une seule série de mesures de distances, entre l'étoile principale et une petite étoile voisine, série encore fréquemment interrompue par les nombreux voyages entrepris par mon père, dans la période indiquée, pour les affaires de l'érection de l'Observatoire de Poulkova, ne paraissait pas encore assez exactement établie. En tout cas une confirmation indépendante de la parallaxe trouvée, était bien à désirer. C'est pourquoi je me suis décidé à entreprendre ce travail, dès que la série de mesures micrométriques sur les étoiles doubles, qui a été l'objet principal de mes observations à l'aide de la grande lunette de Poulkova depuis le commencement des travaux de l'Observatoire, fut suffisamment avancée pour ne pas réclamer exclusivement l'attention de l'astronome. Cette époque était arrivée en 1851 et c'est dans le mois d'Août de la dite année que j'ai commencé la série d'observations, dont les résultats sont contenus dans le Mémoire suivant.

Quant à la parallaxe de 61 Cygni, l'accord des résultats trouvés par Bessel par deux étoiles de comparaison, dont les directions par rapport à 61 Cygni formaient un angle d'environ 90 degrés, ne laissait certainement rien à désirer. La confiance que les astronomes plaçaient dans l'exactitude de la valeur trouvée par Bessel, fut encore augmentée par le fait que les observations de M. Peters exécutées en 1842 et 1843 à l'aide du

grand cercle vertical de l'Observatoire de Poulkova, avaient conduit à une valeur de la parallaxe absolue qui s'accordait au-delà de toute attente avec celle de la parallaxe relative déduite des observations de Königsberg. Aussi, j'avoue qu'en commençant mes observations sur cette étoile, je me flattais de l'espoir que l'accord des résultats à déduire de mes mesures, avec la valeur Besselienne, pourrait servir de recommandation pour l'exactitude générale que j'obtiendrais dans d'autres cas. Mais dans le courant de mon travail, le point de vue, dans lequel je l'avais entrepris par rapport à 61 Cygni, a dû être abandonné et cela par suite de la publication du Mémoire de M. Wichmann sur la parallaxe de l'étoile d'Argelander (Groombridge 1830) dans les «Astronomische Nachrichten» No. 841 au mois de Janvier 1853. Ce travail de M. Wichmann a dû nécessairement affaiblir la confiance qu'on s'était habitué de mettre dans tous les résultats trouvés à l'aide de l'héliomètre de Königsberg, en prouvant indirectement que les grandes distances mesurées avec cet instrument sont sujettes à des erreurs systématiques très considérables, de nature inconnue ou à peine soupçonnée[1]). Depuis cette époque il s'agissait pour moi de fournir une nouvelle détermination de la parallaxe de 61 Cygni, détermination qui en elle-même contiendrait les preuves de son exactitude. L'accord plus ou moins satisfaisant de la valeur à déduire de nos observations avec celle qu'avaient fournie les recherches de Bessel, ne pourra être regardé désormais comme un indice ni en faveur de la nouvelle détermination, ni contre son exactitude, tant que les astronomes de Königsberg n'auront examiné scrupuleusement les lois des actions perturbatrices dans les distances fournies par l'héliomètre de Königsberg et leur effet sur la valeur de la parallaxe trouvée par Bessel.

Dans la recherche sur la parallaxe de l'étoile d'Argelander, dont les résultats ont été présentés par moi à l'Académie au mois de Décembre 1849, je me suis servi de la méthode des différences en déclinaison. Je crois avoir prouvé par ce travail que cette méthode d'observation, pratiquée à l'aide d'un instrument aussi solidement construit et aussi puissant que notre grande lunette, est susceptible de la plus haute exactitude et parfaitement à la portée du problème de déterminer les parallaxes. Mais l'usage de cette méthode est limité par différentes conditions. Elle réclame entre autres une disposition favorable et de quelque sorte symétrique des étoiles de comparaison par rapport à l'étoile principale à examiner. Cette condition, quoiqu'elle ne paraisse pas très gênante, rencontre, dans la pratique, beaucoup de difficultés, surtout si l'étoile à examiner est située à une grande distance de la voie lactée, ou en général dans des régions célestes pauvres en étoiles, et que, par le diamètre du champ de la lunette, on est obligé de n'admettre, dans la recherche, que telles étoiles de comparaison, dont les différences en déclinaison par rapport à l'étoile principale, ne s'élèvent point au-dessus d'un couple de minutes.

Une autre restriction plus importante encore pour l'usage de cette méthode, consiste dans la circonstance que le coefficient de la parallaxe en déclinaison, n'est qu'une petite

[1]) Voyez sous ce rapport l'excellente critique du travail de M. Wichmann, donnée par M. Döllen dans le supplément au XIIIme volume du Bulletin de la Classe physico-mathématique.

fraction dès que l'étoile à examiner se trouve à petite distance de l'écliptique. Par conséquent, pour toutes les étoiles situées dans l'écliptique ou dans son voisinage immédiat, la dite méthode tombe en défaut. Enfin la méthode a encore cet inconvénient qu'en général les observations réclament trop de temps, surtout si l'on se sert des variations successives de la réfraction pour produire la bissection de l'étoile précédente par le fil fixe. En effet, dans notre climat, un seul observateur aurait déjà quelque peine de rassembler, dans la même période, les observations nécessaires pour la détermination des parallaxes de deux étoiles. Il devrait donc se vouer presque exclusivement à ce champ d'observations et néanmoins il ne pourrait avancer rapidement, en ne pouvant étendre ses recherches à la fois sur un plus grand nombre d'étoiles.

Par ces raisons la méthode des différences en déclinaison, quelque excellente qu'elle soit dans des cas particuliers, ne devra entrer en usage que pour de telles étoiles où il n'y a pas d'autre moyen de parvenir au but, également sûr et moins dispendieux par rapport au temps. Tel moyen nous est offert par les jonctions micrométriques, dans tous les cas où une étoile convenable de comparaison se trouve au champ de la lunette en même temps avec l'étoile en recherche. Ces jonctions micrométriques ont encore cet avantage précieux que les résultats obtenus séparément par les deux coordonnées polaires, les distances et les angles de position, fournissent en même temps des contrôles réciproques de leur exactitude, contrôles très rigoureux en effet parce que les résultats sont basés sur deux genres d'observation qui n'ont rien de commun entre eux. C'est pourquoi il paraît que la sûreté de la parallaxe trouvée est beaucoup mieux garantie par ces contrôles que si l'on n'a exécuté que des mesures micrométriques du même genre, ou des distances ou des angles de position, entre l'étoile principale et deux ou plusieurs différentes étoiles de comparaison.

Les deux étoiles dont nous traitons ici, α Lyrae et 61 Cygni, se trouvent dans la voie lactée ou à petite distance d'elle et leur voisinage est riche en étoiles qui se prêtent favorablement aux jonctions micrométriques. La situation de ces étoiles par rapport au plan de l'écliptique est également très favorable à ce genre de recherches; nous avons pour α Lyrae la latitude environ de 62° et pour 61 Cygni de 52°, d'où il suit que les ellipses parallactiques, c'est-à-dire les ellipses que forment ces étoiles sur le fond du ciel par suite du mouvement annuel de la Terre autour du Soleil, ne s'écartent pas beaucoup de la forme circulaire. Par conséquent dans quelle direction, par rapport à l'étoile principale, que nous aurions choisi les étoiles de comparaison, les coefficients de la parallaxe devaient, pour chacune des deux coordonnées, s'approcher de l'unité à différentes époques de l'année.

Je remarque à cette occasion que la méthode des jonctions micrométriques a en général cet avantage que le coefficient parallactique, si nous désignons par cette expression sa valeur maximum, s'approchera, dans tous les cas, pour l'une ou l'autre des deux coordonnées ou même pour toutes les deux, de très près de l'unité, de sorte que, sous ce rapport, la méthode ne pourra jamais tomber entièrement en défaut. Même dans le cas le moins favorable et qui nous paraît être celui où, par suite de la parallaxe annuelle, l'étoile

*

se meut en ligne droite, cas qui aura lieu pour toutes les étoiles situées dans l'écliptique, le coefficient parallactique sera de très près égal à l'unité pour l'une des deux coordonnées. Supposons encore que, dans ce cas, l'effet de la parallaxe se distribue également sur les deux coordonnées polaires, les distances et les angles de position, ce qui arrivera pour de tels couples d'étoiles, pour lesquelles l'angle formé entre le grand cercle qui les joint entre elles et le cercle de latitude est égal à 45°; et nous aurons encore, soit en distance, soit en position, le coefficient parallactique = 0,71.

Dans nos latitudes boréales le choix des étoiles dont on pourrait entreprendre la recherche de la parallaxe, est soumis encore à la condition que les étoiles doivent être assez boréales, pour admettre l'observation des petites étoiles de comparaison dans des conditions favorables pendant toute l'année. Nos deux étoiles ayant plus de 38° de déclinaison boréale remplissaient cette condition assez avantageusement. Il faut cependant remarquer qu'à côté de la déclinaison aussi l'ascension droite y joue un rôle important. Si les mêmes étoiles, au lieu d'être situeés à 18^h et 22^h d'ascension droite, avaient eu l'ascension droite de 6 heures environ, nos journaux auraient offert sans doute des lacunes de plusieurs mois, dans les environs du solstice d'été, parce que la clarté du fond du ciel près de l'horizon boréal n'aurait pas permis, même à minuit, de voir, dans ces périodes, les petites étoiles de comparaison. Nous verrons plus tard que, pour toutes les deux étoiles, il y a dans nos séries d'observations des lacunes d'environ quatre semaines dans le mois de Février, mais c'est plutôt au manque de clarté dans cette saison, que nous devons attribuer leur origine. Nous devons donc dire que sous tous les rapports indiqués les deux étoiles choisies, offraient des chances bien favorables à la recherche.

Quoique les méthodes d'observation aient été fixées, en traits généraux, par les règles établies dans l'ouvrage de mon père «Mensurae micrometricae», les recherches sur les parallaxes sont pourtant de telle subtilité, que chaque nouvelle étoile et chaque nouvel instrument demande, dans ce but, des études particulières. La position de l'étoile de comparaison par rapport à l'étoile principale, les intensités relatives d'éclat des deux astres à comparer, leur position sur le ciel combinée avec les particularités dans la construction et dans l'établissement de l'instrument, voilà des facteurs dont il faudra tenir compte avant de commencer la série d'observations. D'un autre côté il faudra bien se garder de ne pas faire aucun calcul sur les époques des maxima et minima de l'effet de la parallaxe, pour ne pas se laisser guider involontièrement par des préoccupations, au moins tant que la série d'observations ne soit déjà assez complète pour donner un résultat sûr et qui ne pourra plus être sensiblement changé par l'addition de quelques observations supplémentaires. C'est une règle que j'ai suivie dans toute sa rigueur pour toutes les recherches de ce genre entreprises par moi jusqu'à l'époque actuelle. Je l'ai même étendu au point de ne pas faire aucun extrait de mon journal d'observation, qui aurait permis de former un jugement sur la marche des variations périodiques dans la position relative des deux astres comparés; car d'après mon opinion, afin de réussir dans des recherches de ce genre,

il faut éviter le plus soigneusement toute sorte d'opération mentale qui pourrait nous entraîner dans une préoccupation quelconque par rapport à l'objet en question.

Dans le mémoire suivant je séparerai en différents chapitres les observations et les calculs faits par moi sur la parallaxe de α Lyrae, de ceux qui regardent la parallaxe de 61 Cygni. Enfin dans le dernier chapitre j'ajouterai quelques considérations sur les valeurs trouvées, en les comparant avec les résultats des travaux antérieurs exécutés par MM. W. Struve, Bessel et Peters.

2. **Observations et calculs sur la parallaxe de α Lyrae.**

L'étoile de comparaison a été la même qui a servi dans les mesures de mon père, par lequel elle fut estimée de la grandeur 10,5. D'après mon opinion elle est de 9me grandeur. Cette différence dans nos estimations de la grandeur ne doit pas être attribuée à un changement d'éclat de l'étoile de comparaison, mais, si je ne me trompe, à l'effet ébloussant de l'étoile principale, effet qui a été plus fort dans la lunette moins puissante de Dorpat que dans celle de Poulkova. L'estimation des grandeurs de petites étoiles situées dans le voisinage immédiat de quelque étoile brillante est en général très peu sûre, mais dans le cas actuel il a été possible de recourir à un expédient qui paraît laisser beaucoup moins de vague dans l'estimation. Dans des circonstances ordinaires où il n'y a point d'autres étoiles en même temps au champ de la lunette, ce sont les étoiles de 9,5^{me} grandeur, qui indiquent la limite inférieure de l'éclat des étoiles que je puis observer dans notre lunette par un crépuscule assez fort pour nous dispenser d'une illumination artificielle du champ ou des fils. Dans les estimations sur les grandeurs des étoiles de cet ordre, je suis d'ordinaire d'un accord parfait avec mon père, au moins dans tous les cas où à la fois il n'y a qu'une seule étoile faible ou plusieurs étoiles du même éclat au champ de la lunette. Par conséquent puisque j'ai pu reconnaître avec facilité notre étoile de comparaison tout de suite après le coucher du Soleil, et que j'ai fait plusieurs séries de mesures par le crépuscule le plus fort, il est évident qu'elle surpasse en grandeur les étoiles de cette limite inférieure. En lui attribuant donc la 9me grandeur, je ne crois pas qu'il y reste dans l'estimation une incertitude d'un quart de l'échelle employée par mon père.

La distance comparativement petite de l'étoile de comparaison (44″) et son éclat suffisant admettaient d'employer, dans nos mesures, le grossissement IV de notre lunette, de 412 fois. Pour l'uniformité du travail je me suis servi toujours de ce grossissement, quoique, dans des circonstances atmosphériques particulièrement favorables, il aurait été possible d'employer avec avantage des grossissements encore plus forts, tandis que dans d'autres occasions le grossissement IV paraissait déjà être trop fort. Dans ces dernières occasions j'ai préféré renoncer entièrement à la mesure, pour ne pas troubler la bonne série de nos mesures par quelques unes qui seraient par trop inférieures sous le rapport de l'exactitude. Cependant il y a eu aussi quelques exceptions de cette règle, particulièrement dans des saisons où, pour ne pas laisser de grandes lacunes, la rareté des nuits favorables à

l'observation le rendait nécessaire, de saisir chaque occasion de rassembler des observations, quoique leur valeur dût rester considérablement au-dessous de celle des mesures faites dans des saisons plus favorables. On verra plus tard que, dans la déduction des résultats, un poids inférieur a été assigné aux équations basées sur les mesures moins sûres.

Qu'il me soit permis de faire à cette occasion une remarque générale. Le principe suivi par beaucoup d'astronomes, de multiplier autant que possible le nombre des observations, sans avoir égard aux conditions dans lesquelles elles ont été faites, et de les faire concourir toutes dans la déduction des résultats, sans leur assigner des poids selon leur qualité, me paraît extrêmement préjudiciable au progrès de la science. Un petit nombre de bonnes observations, combinées avec une étude soignée de l'instrument et bien distribuées par rapport aux époques du phénomène à saisir, sera en général de beaucoup préférable à un grand nombre d'observations de qualité incertaine ou mixte. Avec l'accroissement du champ de travail, les efforts de l'astronome pratique doivent tendre en premier lieu à élever la qualité de ses observations, en les abritant contre les erreurs constantes, systématiques ou périodiques, ou en évaluant et calculant les effets de ces erreurs, et en second lieu seulement à rassembler la quantité d'observations requise pour réduire l'effet des erreurs accidentelles aux limites exigées par la nature du problème.

Retournons à notre objet. Il a déjà été dit que les méthodes d'observation nous étaient données dans l'Introduction des «Mensurae Micrometricae». Cependant dans quelques points j'ai cru pouvoir perfectionner encore ces méthodes. Voici en quoi consistent les altérations et subtilités, qu'il m'a paru nécessaire d'introduire:

1°. La direction du mouvement diurne des astres, sur le cercle de position, fut déterminée pour chaque observation à part, dans la même position de la lunette, dans laquelle la mesure micrométrique avait été faite. Au lieu de tourner, dans ce but, la lunette autour de son axe horaire, comme cela avait été fait par mon père, il m'a paru préférable de fixer la direction de la lunette pour le temps du passage de l'étoile par le champ, et d'opérer de sorte, à l'aide des vis de rappel, que l'étoile, dans son cours coupait également le fil mobile[1]) aux moments de l'entrée et de la sortie du champ.

2°. Dans les mesures des angles de position, exécutées dans les recherches des parallaxes toujours à l'aide de la vis de rappel du cercle de position, j'ai observé la règle de donner au fil mobile qui devait produire la bissection des deux astres à comparer, le dernier mouvement alternativement dans les deux sens opposés, en passant autant de fois des plus grandes divisions aux plus petites que des plus petites aux plus grandes.

3°. Dans la première moitié des mesures de l'angle de position, faites pendant la même nuit, j'ai tenu le fil mobile du côté droit du fil fixe, dans la seconde du côté gauche

[1]) Nous désignons ici par «fil mobile» celui des deux fils de notre appareil micrométrique, qui est mu directement quand on tourne la vis micrométrique principale. L'autre fil, dont la position peut aussi être changée à l'aide d'une vis à part, mais qui reste immobile quand on tourne la vis micrométrique principale, est désigné par cette raison comme «fil fixe».

ou vice versa. Dans l'un el l'autre cas l'oculaire fut placé de sorte que le fil mobile coupa le champ de la lunette en deux parties égales.

4°. Pour la mesure des distances, le lieu de coïncidence des deux fils micrométriques variait d'un jour à l'autre, en restant toujours dans les limites de l'observation la plus commode.

Les trois premiers points se rapportent tous à la mesure des angles de position. C'est par leur application que je crois avoir éloigné les objections que mon père croyait devoir élever contre ses propres observations des positions de α Lyrae, et qui l'ont engagé à baser sa recherche de la parallaxe de cette étoile uniquement sur les distances mesurées, en rejetant entièrement les mesures des angles de position, exemple suivi, pour d'autres raisons, par Bessel dans ses recherches sur la parallaxe de 61 Cygni.

Parmi ces trois points, le premier me paraît le plus important. La détermination du mouvement diurne d'après la méthode indiquée réclame beaucoup de temps. On ne parvient à un résultat exact que par de rapprochements successifs en opérant alternativement avec les deux vis de l'appareil micrométrique, et en répétant plusieurs fois l'opération, laquelle, par la condition que l'étoile doit passer par son mouvement diurne à travers tout le champ de la lunette, réclame chaque fois au moins l'espace de temps déterminé par le diamètre de ce champ et par la déclinaison de l'étoile. Il est à conseiller d'employer, dans cette détermination des grossissements plus faibles que ceux dont on s'est servi dans la mesure micrométrique, afin de donner à la détermination un plus haut degré d'exactitude et qui entre autres dépend de la grandeur de l'arc effectif décrit par l'étoile en traversant le champ de la lunette, c'est à dire du diamètre de ce champ. C'est ainsi que, pour mes observations de α Lyrae, faites avec le grossissement IV, j'ai employé à la détermination du mouvement diurne le grossissement II qui nous donne un champ de 8′,7 de diamètre. L'étoile, pour parcourir ce champ, employait environ 45 secondes. En ajoutant encore quelques secondes pour les préparatifs à faire, il s'en suit que chaque essai durait environ une minute et comme il fallait répéter le même procédé ordinairement de 5 à 10 fois, avant d'atteindre un tel degré d'exactitude que l'oeil ne pouvait plus discerner la moindre différence dans la bissection de l'étoile aux moments de l'entrée et de la sortie, au moins un nombre égal de minutes était nécessaire pour achever toute l'opération. Mais ce petit accroissement de travail est largement recompensé par ce qu'on gagne en exactitude. En effet la direction du mouvement diurne obtenue par le procédé indiqué, est celle qui correspond à la position de la lunette dans laquelle les observations elles-mêmes ont été faites; il n'y a plus aucune réduction à faire par rapport à la déviation du pôle de l'instrument de celui de la voûte céleste et, ce qui est le plus essentiel, la détermination est libre de toute supposition plus ou moins vague sur l'action de la pesanteur sur les différentes parties de l'instrument. Il est vrai que la direction du mouvement diurne déterminée par ce procédé est affectée par les variations de la réfraction; mais cette circonstance n'affaiblit aucunement sa valeur parce que l'effet de la réfraction peut être calculé facilement et avec toute l'exactitude

désirable à l'aide des formules connues de réfraction, en y mettant seulement l'angle de position égal à 90°.

Le second point me paraît mériter aussi quelque attention. C'est surtout dans l'observation d'une étoile brillante qu'il sera nécessaire de ne pas négliger la précaution indiquée dans ce point, et cela d'autant plus si, à cause de la faiblesse de l'étoile de comparaison, le champ de la lunette n'est que faiblement illuminé. Pour ma part j'ai trouvé au moins qu'en produisant la bissection simultanée des deux astres par le même fil avec le dernier mouvement de la vis donné dans un certain sens constant, j'obtenais des mesures dont l'accord intrinsèque ne laissait rien à désirer mais qui toutes différaient dans le même sens des mesures obtenues par le mouvement inverse. On pourrait soupçonner d'abord que cette différence constante dût être attribuée à un défaut dans le mécanisme qui joint le porteur des verniers avec le cercle de position, à une flexion dans ces parties ou à une cause mécanique analogue; mais cette supposition doit être abandonnée car le phénomène lui-même ne s'y conforme pas. Il est clair que, si l'explication proposée du phénomène était juste, il devait se montrer également dans les mesures des angles entre deux étoiles du même éclat; mais dans ces circonstances les différences disparaissent entièrement. Elles s'évanouissent également ou deviennent insensibles dans notre lunette pour des couples d'étoiles de différente grandeur lorsque l'étoile plus brillante est au-dessous de la 6me grandeur. D'après ces considérations il faut attribuer l'origine de ces différences à la diffraction ou à une erreur du jugement, produite par l'éclat des étoiles brillantes, et qui agit en différents sens si la bissection s'opère des différents côtés. La moyenne de deux positions mesurées avec des mouvements opposés de la vis, sera donc libre de cette erreur du jugement ou au moins l'erreur sera considérablement affaiblie. En tout cas nous pouvons être sûrs que le reste de l'erreur, s'il y en a, affecte de la même quantité et dans le même sens tous les angles mesurés entre le même couple d'étoiles et disparaît par conséquent dans les différences des angles mesurés, objet principal dont il s'agit dans la recherche des parallaxes. On pourrait aussi éviter l'influence de cette erreur sur les déterminations des parallaxes, si l'on produisait toujours la bissection en tournant la vis dans un sens constant, car alors tous les angles mesurés seraient erronés d'une quantité constante et elle disparaîtrait également dans les différences des angles. Mais, par ce moyen, la valeur moyenne de l'angle de position resterait affectée de toute l'erreur, et comme, pour différentes raisons, il est désirable de la connaître aussi avec un haut degré d'exactitude, le procédé, tel que nous l'avons proposé, paraît de beaucoup préférable.

Quant au troisième point, je ne puis pas dire que j'aie remarqué un effet sensible sur l'angle de position, produit par la proximité du fil fixe au fil mobile en le tenant tantôt d'un côté tantôt de l'autre par rapport à ce dernier. Mais, comme chaque objet qui trouble la symétrie de ce qu'on voit, peut influencer plus ou moins sur notre jugement, il paraît utile de placer ces objets troublants, si c'est possible, alternativement dans des conditions opposées, afin d'annihiler cette influence s'il y en a. Par la même raison il serait à conseiller aussi de

tenir, autant que possible, les deux objets à mesurer dans une position symétrique par rapport au champ de la lunette.

Le quatrième point enfin est le seul qui se rapporte à la mesure des distances. Mon père s'était fait la règle de tenir toujours, dans la recherche de la parallaxe de α Lyrae, le lieu de la coïncidence des deux fils aussi près que possible sur le même point, de sorte que toujours la même partie de la vis micrométrique entrait en usage. Dans mes mesures, au contraire, le lieu de la coïncidence variait à l'arbitraire d'une nuit à l'autre. La méthode suivie par mon père a donc cet avantage que les petits défauts de la vis micrométrique agissent d'une quantité constante sur toutes les mesures des distances et disparaissent par conséquent dans les différences des mesures, qui nous donnent la valeur de la parallaxe, tandis que chez moi ils contribueront peut-être un peu à augmenter les erreurs accidentelles des observations. En revanche le changement d'un jour à l'autre du lieu de coïncidence avait cet avantage que l'observateur était plus à l'abri de toute sorte de préoccupation qui aurait pu provenir de la connaissance approximative des indications que devait offrir le tambour de la vis; et cet avantage me paraît prévaloir sur l'autre, dans la recherche des parallaxes, surtout si, comme chez nous, on s'est déjà persuadé, par des expériences directes faites à l'aide du microscope, que la vis micrométrique n'est sujette à aucun défaut sensible, et qu'on a soin que, dans les différentes saisons, les lieux de coïncidence tombent en moyenne sur les mêmes portions de la vis.

Dans la liste des observations, que je donnerai plus tard, j'indiquerai aussi le lieu de la coïncidence des deux fils, tel qu'il s'est présenté dans la moyenne des mesures, faites chaque nuit des deux côtés du fil fixe. On y verra qu'il a passé par toutes les révolutions entre 53 et 61, et nommément qu'il a été

2	fois	entre	les	révolutions	53	et	54
3	»	»	»	»	54	»	55
7	»	»	»	»	55	»	56
10	»	»	»	»	56	»	57
17	»	»	»	»	57	»	58
21	»	»	»	»	58	»	59
12	»	»	»	»	59	»	60
3	»	»	»	»	60	»	61

En dedans de ces révolutions entières, le lieu de la coïncidence a correspondu également à toutes les subdivisions, sans qu'une préférence soit donnée à une subdivision quelconque.

Le fil mobile de notre micromètre coïncide avec le centre du cercle autour duquel se tourne tout l'appareil micrométrique, dans une position où l'index de la vis micrométrique se trouve entre les divisions 57 et 58, divisions qui indiquent le nombre de révolutions que la vis a parcouru depuis le commencement de la division ou à compter de son premier trait. Cette circonstance explique pourquoi toutes nos mesures ont été faites dans le

voisinage de cette position moyenne, et pourquoi la fréquence des coïncidences observées dans les différentes révolutions diminue, dès qu'elles s'éloignent de la révolution moyenne 58.

Ce n'était qu'après avoir continué les observations sur α Lyrae pendant une demi-année, que toutes les petites altérations indiquées dans la méthode d'observation, ont été régulièrement mises en exécution. Par cette raison toutes les observations postérieures doivent être considérablement supérieures en exactitude à celles de la première demi-année. Aussi le nombre des mesures faites chaque nuit, a varié encore dans le premier temps et elles ne se sont pas suivies toujours dans le même ordre symétrique. Plus tard le nombre des mesures et leur succession symétrique n'ont jamais été altérés. Toutes les observations de la seconde période, dans lesquelles je n'avais pas réussi, par suite d'un changement subit dans l'état de l'atmosphère, de rassembler le nombre fixé de 8 mesures pour chaque coordonnée, ont été rejetées entièrement.

Voici un extrait de mon journal d'observations, pour un jour choisi à l'arbitraire dans la dernière période, d'où l'on reconnaîtra le mieux l'arrangement symétrique des mesures.

19 Juillet 1853.

Position II de l'instrument.

Direction		
338° 32′		
17		
27		
39		
Distance		
53″,606	62″,734	Temps sid. $18^h\ 13^m$
631	778	Therm. + 13°, 6 R.
615	750	
612	778	
Direction		
338° 35′		
19		
3		
18		

Direction du mouvement diurne: 103° 6′.

La première série des directions a été mesurée avec le fil mobile à droite du fil fixe, la seconde dans la position inverse des fils, et dans chaque série à part, la première et la dernière mesure ont été exécutées par un mouvement de la vis micrométrique en sens opposé à celui de la seconde et de la troisième mesure. Les directions sont toutes notées du côté de l'étoile de comparaison.

Le temps sidéral de l'observation et l'indication du thermomètre furent notés au milieu entre les deux séries de mesures qui constituent ensemble la détermination de la dis-

tance double. A cette époque moyenne, il aurait fallu déterminer aussi la direction du mouvement diurne. Mais pour ne pas exposer le fil fixe à un changement accidentel de lieu, par suite de cette opération, j'ai préféré de la remettre à la fin de toute l'observation, en m'y servant non plus de l'étoile α Lyrae elle-même, mais d'une petite étoile qui suivait α Lyrae sur le parallèle d'autant que son angle horaire, au moment de cette détermination, correspondait de très près à celui de α Lyrae au milieu de l'observation. Je remarque à cette occasion que pour la détermination de la direction du mouvement diurne les petites étoiles me paraissent préférables aux plus brillantes, par ce qu'elles n'offrent pas, aux bords extrêmes du champ de la lunette, ces petites distorsions de la figure qui troublent notre jugement dans l'usage des étoiles brillantes.

La moyenne arithmétique des deux séries de mesures de la direction, donne, dans notre exemple, la direction moyenne $= 338°\,24.'$ A cette valeur il faudra ajouter la différence entre la direction observée du mouvement diurne $= 103°\,6'$ et sa valeur réelle de $270°$, telle que d'après l'usage généralement adopté de compter les directions du Nord par l'Est, elle devait être indiquée par le cercle de position, si son index avait été parfaitement ajusté et dans la supposition que la réfraction n'avait exercé aucune influence. En soustrayant donc $193°\,6'$ de la direction observée, nous avons pour le 19 Juillet 1853 l'angle de position de l'étoile de comparaison $= 145°\,18.'$ Cet angle se rapporte au cercle de déclinaison correspondant au milieu entre les deux étoiles comparées. Il s'entend qu'il demande encore une petite correction pour l'effet de la réfraction, soit sur la position relative des deux astres soit sur la direction observée du mouvement diurne.

Le cercle de position de notre micromètre est divisé directement de 15 à 15 minutes et la lecture se fait au moyen de deux verniers opposés, à l'aide desquels on pourrait obtenir par estimation aussi des fractions de la minute. Dans notre cas où l'erreur de toute une minute dans la direction, ne produit qu'un changement de $0''{,}012$ dans le lieu relatif des étoiles comparées, nous nous sommes contentés de lire les minutes entières.

En prenant les moyennes arithmétiques des deux séries de mesures faites sur la distance, nous les trouvons $53^r{,}616$ et $62^r{,}760$. La différence entre ces deux chiffres ou $9^r{,}144$ est la distance double des deux étoiles, exprimée en révolutions de la vis micrométrique, d'où nous tirons la distance simple $= 4^r{,}572$. Le lieu de la coïncidence des deux fils est égal à la demi-somme des deux moyennes citées; nous l'avons donc pour le 19 Juillet, $= 58^r{,}188$.

Les distances données primitivement en révolutions de la vis micrométrique, furent converties en secondes du grand arc par la formule

$$r = 9''{,}7319 - 0''{,}000217\,t,$$

où t est la température exprimée en degrés de Réaumur (Voyez Description de l'Observatoire central de Poulkova pag. 193). La valeur moyenne d'une révolution de la vis a été déterminée par les passages de différentes étoiles par les deux fils éloignés l'un de l'autre d'un aussi grand nombre de révolutions que le comportait le grossissement employé. L'er-

reur probable de cette détermination s'élève à 0″,0032. La troisième décimale dans la valeur supposée d'une révolution de la vis peut donc être inexacte de plusieurs unités et s'il s'agissait de déterminer des distances de plusieurs minutes, l'incertitude pourrait déjà affecter les dixièmes de la seconde. Par cette raison j'ai l'intention de répéter, à une occasion favorable, la détermination de cette quantité par une voie plus exacte encore. Évidemment l'incertitude qui existe pour le moment dans cet élément, n'agit aucunement sur la détermination de la parallaxe, parce qu'elle affecte toutes les distances mesurées dans ce but d'une quantité constante, tant que ces distances ne sont sujettes à des changements très considérables. C'est ainsi que, par exemple, la distance moyenne entre α Lyrae et l'étoile de comparaison, telle que nous la déduirons de nos observations, est sujette, de cette origine, à une erreur probable de 0″,015, tandis que l'incertitude restant de ce chef dans la valeur de la parallaxe à déduire, ne pourrait monter qu'à 0″,00033, si même la parallaxe avait la valeur de toute une seconde.

Au contraire, dans la recherche des parallaxes une incertitude dans le coefficient thermométrique de la valeur d'une révolution de la vis pourrait être de quelque conséquence, surtout si les époques des maxima et minima de la parallaxe en distance, tombent sur des saisons opposées par rapport à la température. Mais ce coefficient paraît être établi, pour notre instrument, avec toute l'exactitude désirable. En effet l'erreur probable qui lui convient ne s'élève qu'à 0″,000014 ou à la quinzième partie de sa valeur totale. Admettons que, dans nos observations, les températures, dans les différentes saisons, aient varié de 40° R. Dans cette supposition, la valeur d'une révolution de la vis a pu varier de 0″,0087 et comme la distance entre α Lyrae et l'étoile de comparaison n'est que de quatre révolutions et demie de la vis, le plus grand effet de la température sur la distance mesurée ne pourrait être que de ± 0″,0196 à partir de la température moyenne. Par conséquent, si nous avions entièrement négligé le coefficient thermométrique, la parallaxe n'aurait été trouvée fautive que tout au plus de 0″,02. Maintenant comme le dit coefficient est déterminé avec une erreur probable de la quinzième partie de sa valeur totale, l'incertitude subsistant après son introduction, ne pourra guère s'élever à un millième de seconde pour la valeur de la parallaxe. Dans ce cas l'action thermométrique est donc presque tout à fait insignifiante, mais il ne faut pas perdre de vue qu'elle augmente en proportion directe de la distance angulaire entre les astres comparés, de sorte que pour une distance de 5′, qui représente à peu près la limite des distances que nous pouvons bien observer dans notre lunette, son effet total sur la distance mesurée pourra s'élever à ± 0″,135, mais même dans ce cas l'incertitude que l'erreur probable inhérente à la détermination du coefficient thermométrique laissera subsister dans les distances mesurées, ne sera que de ± 0″,0088. Remarquons encore que ce nombre représente le plus grand effet possible et qu'en général nous devons l'accepter considérablement plus petit parce que ce n'est que dans des cas exceptionnels que les époques des maxima et minima de la parallaxe en distance coïncideront avec les époques des températures extrêmes. Évidemment dans tous les cas où la tempé-

rature à l'epoque du maximum de la parallaxe est de très près égale à celle qui obtient à l'époque du minimum, tout l'effet de la température, sur les valeurs de la révolution de la vis, disparaît presque entièrement dans la valeur définitive de la parallaxe.

Je donnerai maintenant le tableau des observations faites sur α Lyrae. Elles ont été commencées le 18 Sept. 1851 et furent continuées pendant deux ans, jusqu'au 17 Sept. 1853. Dans cette période j'ai rassemblé les 75 observations complètes contenues dans le tableau suivant dont les différentes colonnes ne demandent aucune explication ultérieure.

α Lyrae et Comes (9).

Jour de l'observ.	Temps sid.	Tempér.	Coïncidence des fils	Distance en révolutions de la vis	Distance en secondes	Direction observée	Direction du mouvement diurne	Angle de position	Remarques.
1851 Sept. 18	19h 0m	+ 9°,8	57,095	4r,533	44″,11	155° 1′	280°52′	144° 9′	
— 22	18 36	+12,1	56,285	4,568	44,44	155 14	280 52	144 22	
— 25	18 55	+13,0	58,031	4,531	44,08	155 25	280 50	144 35	
— 30	18 44	+11,4	59,874	4,555	44,32	155 10	280 51	144 19	
Oct. 9	18 46	+ 8,0	58,154	4,568	44,45	155 14	280 52	144 22	Mes. troublées par le vent.
— 17	19 33	+ 7,2	57,553	4,551	44,28	155 19	280 50	144 29	
— 20	19 20	+ 4,7	59,742	4,524	44,02	155 28	280 47	144 41	
— 22	20 9	+ 3,7	57,646	4,529	44,07	155 23	280 51	144 32	
— 25	19 55	— 1,2	55,772	4,532	44,11	155 32	280 51	144 41	Images ondulantes.
— 31	19 52	— 5,1	59,316	4,540	44,19	155 8	280 51	144 17	Im. très ondulantes.
Nov. 19	22 58	+ 0,2	56,533	4,534	44,12	155 8	280 52	144 16	Images ondulantes.
— 25	19 56	— 0,7	57,254	4,539	44,17	155 33	280 50	144 43	
Déc. 17	21 37	— 1,0	58,514	4,538	44,16	155 11	280 49	144 22	
1852 Jan. 14	0 19	— 5,2	56,908	4,499	43,79	154 29	280 48	143 41	Im. très ondulantes et diffuses.
— 25	1 45	— 9,9	56,871	4,514	43,94	155 1	280 49	144 12	Diffusion des images.
Mars 10	12 37	— 9,0	59,780	4,530	44,10	335 39	100 56	144 43	
— 21	13 12	— 1,5	59,702	4,536	44,15	335 38	100 52	144 46	
Avr. 3	13 9	— 5,0	57,329	4,533	44,12	335 41	100 53	144 48	
— 6	13 15	+ 1,3	57,726	4,515	43,94	335 42	100 51	144 51	Im. très ondulantes.
— 8	13 25	— 4,0	57,756	4,528	44,07	335 45	100 46	144 59	
— 20	15 55	— 1,6	57,686	4,529	44,08	335 40	100 55	144 45	
— 21	13 41	— 2,4	59,338	4,530	44,09	335 44	100 53	144 51	Obs. diff. à cause de nuages.
— 29	14 32	— 3,0	55,030	4,544	44,23	337 44	103 2	144 42	
Mai 2	15 40	— 1,9	56,139	4,520	43,99	337 56	102 56	145 0	
— 14	13 54	+ 6,6	59,478	4,520	43,98	337 51	102 58	144 53	
— 24	14 51	+ 6,8	58,666	4,541	44,19	337 46	102 53	144 53	
— 25	14 45	+ 9,2	57,579	4,545	44,22	337 59	102 57	145 2	
Juin 7	17 3	+11,6	59,192	4,528	44,05	338 10	102 57	145 13	
— 14	16 39	+12,0	60,053	4,530	44,07	337 55	102 54	145 1	
— 22	16 22	+16,4	58,514	4,521	43,98	337 56	102 55	145 1	
— 29	17 0	+13,6	60,770	4,543	44,20	337 54	103 0	144 54	
— 30	17 30	+11,0	59,521	4,533	44,10	338 3	103 8	144 55	Images ondulantes.

Jour de l'observ.	Temps sid.	Tempér.	Coïncidence des fils	Distance en révolutions de la vis	Distance en secondes	Direction observée	Direction du mouvement diurne	Angle de position	Remarques.
1852 Juil. 19	21^h35^m	+ 6°,2	58,243	4',557	44",34	157°37'	282°47'	144°50'	Images ondulantes et diffuses.
— 20	18 28	+ 9,2	55,442	4,545	44,22	157 37	282 46	144 51	Diffusion des images.
Août 18	18 20	+13,7	59,550	4,568	44,44	157 45	282 50	144 55	
— 19	20 23	+14,6	57,002	4,592	44,67	157 42	282 52	144 50	
— 21	20 18	+ 9,7	56,314	4,568	44,45	157 33	282 49	144 44	Images ondulantes.
— 27	18 34	+10,4	59,422	4,555	44,32	157 31	282 51	144 40	
— 31	18 20	+ 8,7	58,377	4,549	44,26	157 33	282 52	144 41	
Sept. 5	18 42	+11,0	57,011	4,566	44,43	157 42	282 51	144 51	
— 10	18 21	+12,2	55,990	4,547	44,24	157 36	282 52	144 44	
— 18	18 56	+ 6,0	57,841	4,566	44,33	157 39	282 55	144 44	
— 28	20 20	+ 6,1	58,070	4,554	44,31	157 25	282 56	144 29	
Oct. 2	19 25	+ 6,5	57,800	4,554	44,31	157 34	282 50	144 44	
— 19	20 38	— 2,8	57,302	4,542	44,21	157 19	282 55	144 24	
Nov. 6	20 27	— 5,7	57,312	4,548	44,27	157 35	282 51	144 44	
— 7	20 35	— 9,0	58,888	4,559	44,37	157 23	282 51	144 32	Images ondulantes.
— 11	21 10	— 7,6	58,429	4,538	44,17	157 41	282 54	144 47	Diffusion des images.
— 12	20 55	—10,4	56,965	4,539	44,18	157 39	282 50	144 49	
— 22	20 14	— 8,0	55,473	4,543	44,22	157 37	282 51	144 46	
— 27	20 30	— 5,8	54,422	4,550	44,29	157 31	282 46	144 45	
Déc. 10	21 10	—10,2	53,842	4,558	44,37	157 41	282 51	144 50	Images ondulantes et diffuses.
1853 Jan. 22	0 40	—10,3	53,866	4,536	44,15	158 0	283 0	145 0	Images ondulantes.
— 27	1 21	—13,4	54,933	4,550	44,29	157 51	282 49	145 2	Images ondulantes.
Févr. 2	2 21	— 6,0	57,308	4,542	44,21	157 55	282 55	145 0	
— 5	2 21	— 9,3	58,415	4,534	44,13	157 56	282 54	145 2	Images ondul. et l'ét. de comp. très faible.
— 6	2 30	— 8,8	58,470	4,529	44,09	158 2	282 53	145 9	Images ondulantes et diffuses.
— 8	12 6	— 7,9	60,015	4,529	44,08	338 4	102 58	145 6	
Mars 7	12 41	— 6,3	58,883	4,508	43,88	338 6	102 53	145 13	
— 20	13 36	—12,2	58,806	4,527	44,07	338 9	102 53	145 16	
Avr. 2	13 12	— 6,9	58,183	4,537	44,16	338 13	102 59	145 14	
— 4	13 32	— 6,2	57,416	4,559	44,37	338 13	102 55	145 18	
— 20	13 32	— 1,1	54,929	4,539	44,17	338 20	102 52	145 28	Images ondulantes.
— 27	14 57	+ 3,4	58,298	4,549	44,27	338 21	102 54	145 27	Images ondulantes.
Mai 9	14 49	+ 5,7	58,508	4,540	44,18	338 15	102 53	145 22	
— 24	15 34	+ 6,3	56,829	4,552	44,29	338 29	102 55	145 34	
— 26	15 20	+ 9,2	55,535	4,546	44,23	338 27	102 57	145 30	Observations troublées par le vent.
— 27	16 0	+14,0	57,931	4,573	44,49	338 19	102 55	145 24	
Juin 13	16 56	+13,3	55,541	4,549	44,26	338 11	102 53	145 18	Images ondulantes.
— 21	17 22	+12,7	58,220	4,562	44,38	338 28	103 7	145 21	
Juil. 8	18 0	+11,8	59,118	4,570	44 46	338 19	103 10	145 9	
— 14	17 43	+11,8	56,992	4,550	44,27	338 36	103 2	145 34	
— 19	18 13	+13,6	58,188	4,572	44,48	338 24	103 6	145 18	
Août 9	18 58	+12,3	56,979	4,572	44,48	158 16	282 51	145 25	
Sept. 17	19 0	+ 6,6	58,712	4,565	44,42	157 51	282 48	145 3	

En procédant à la réduction de ces observations, le premier pas à faire était celui de corriger toutes les relations observées, de l'effet de la réfraction. Ces corrections ont été calculées à l'aide des formules et des tables de réfraction, données dans l'ouvrage de M. W. Struve «Beobachtungen des Halleyschen Cometen» pag. 82 seq. Il a déjà été mentionné en d'autres occasions et nommément dans le Mémoire sur l'orbite de la première Comète de l'an 1840, présenté à l'Académie par M. Peters et moi, que la formule donnée par mon père pour l'effet de la réfraction sur l'angle de position demande l'addition d'un troisième petit membre qui s'exprime par $+2\sigma \sin p \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} z$. Cette correction correspond au changement produit par la réfraction dans l'angle parallactique. Mais dans notre cas et en général dans tous les cas où l'on détermine la direction du mouvement diurne, dans la même position où l'on a fait les mesures micrométriques et par la méthode que nous avons suivie, ce membre correctionnel s'élimine de lui-même du calcul; car, étant indépendant de l'angle de position, il affecte de la même quantité et dans le même sens la direction observée des deux astres et celle du mouvement diurne, et disparaît par conséquent dans la différence de ces deux directions, qui constitue l'angle de position.

Étant parti des valeurs moyennes de la distance $e = 44''{,}2$, de l'angle de position $P = 144° 35'$ et de la déclinaison moyenne $\delta = 38° 38'{,}6$, j'ai calculé la table suivante des corrections de la distance et de l'angle de position, dûes à l'effet de la réfraction et correspondantes aux différents angles horaires, pour chaque demi-heure depuis 0^h jusqu'à 8^h. L'angle horaire de mes observations n'excède jamais 8 heures, ni à l'Est (—), ni à l'Ouest (+). C'est pourquoi il n'était pas nécessaire d'étendre la table au-delà de cette limite, où les variations de la réfraction commencent à devenir très rapides. Dans ce calcul, la correction de la direction observée du mouvement diurne, pour l'effet de la réfraction, a été dûment considérée.

Table des réfractions pour les relations observées entre α Lyrae et Comes.

Angle horaire	Correction de la distance	Correction de l'angle de position
$-8^h\ 0^m$	$+0''{,}102$	$-1'{,}97$
7 30	+0,079	−1,81
7 0	+0,063	−1,63
6 30	+0,051	−1,40
6 0	+0,042	−1,16
5 30	+0,034	−0,95
5 0	+0,029	−0,76
4 30	+0,025	−0,60
4 0	+0,022	−0,47
3 30	+0,020	−0,35
−3 0	+0,018	−0,25

Angle horaire	Correction de la distance	Correction de l'angle de position
— 2^h 30^m	+ 0″,017	— 0,17
2 0	+ 0,016	— 0,11
1 30	+ 0,015	— 0,05
1 0	+ 0,014	0,00
— 0 30	+ 0,013	+ 0,04
0 0	+ 0,013	+ 0,07
+ 0 30	+ 0,013	+ 0,10
1 0	+ 0,013	+ 0,13
1 30	+ 0,013	+ 0,18
2 0	+ 0,013	+ 0,23
2 30	+ 0,012	+ 0,29
3 0	+ 0,012	+ 0,36
3 30	+ 0,013	+ 0,47
4 0	+ 0,013	+ 0.60
4 30	+ 0,013	+ 0,78
5 0	+ 0,013	+ 1,02
5 30	+ 0,014	+ 1,35
6 0	+ 0,015	+ 1,79
6 30	+ 0,017	+ 2,39
7 0	+ 0,019	+ 3,20
7 30	+ 0,024	+ 4,30
+ 8 0	+ 0,031	+ 5,78

Cette table diffère considérablement, par rapport aux corrections de l'angle de position, de la table des réfractions donnée pour le même couple d'étoiles dans le mémoire de mon père «Additamentum in mensuras micrometricas» pag. 21. Ces différences sont provenues principalement par l'introduction de la correction du mouvement diurne, qui ne devait point entrer dans le calcul de mon père par suite de la méthode suivie par lui dans la détermination de cette quantité. En revanche, pour les observations de Dorpat, il fallait calculer une correction de l'angle mesuré, dépendant de la situation du pôle de l'instrument par rapport au pôle céleste.

Chaque angle de position étant d'origine rapporté au cercle de déclinaison apparente pour le jour de l'observation, il faut, en toute rigueur, pour les rendre comparables entre eux, réduire tous les angles observés à la même époque, en y considérant l'effet de la précession et de la nutation. Dans notre cas l'effet de la nutation pouvait être entièrement négligé, parce que les observations ne s'étendent que sur deux ans et que l'erreur probable des observations elles-mêmes est au-delà de cent fois plus forte que le maximum de cet effet. Même l'effet de la précession était presque négligeable à cause de raisons analogues; cependant, pour la rigueur du calcul, je n'ai pas cru m'en devoir passer parce qu'il affecte déjà les dixièmes de la minute, dans la direction mesurée. Cet effet de la précession s'exprime,

pour α Lyrae par — 0,42 (T-t) où t signifie l'époque de chaque observation, T l'époque moyenne de toutes les observations ou en général l'époque à laquelle toutes les observations seront réduites, les deux quantités t, T, étant exprimées en années et fractions de l'an.

Aussi, à cause de la petite distance angulaire des deux astres, l'effet de l'aberration sur leur position relative, qui ne s'élève tout au plus qu'à 0,002 en distance et à 0,2 en angle de position, est tout à fait insensible vis à vis des erreurs probables des observations. C'est pourquoi j'ai cru pouvoir le négliger dans ce cas.

Après avoir appliqué les corrections pour réfraction et précession, il fallait réduire les relations corrigées à une époque moyenne, à l'aide des valeurs approximativement connues du mouvement propre relatif des deux astres, en distance et en position. La quantité de ce mouvement propre pouvait être déduite avec un haut degré d'exactitude de la comparaison des mesures micrométriques de Dorpat, avec les nôtres. Le mémoire de mon père «Additamentum in F. G. W. Struve mensuras micrometricas» qui contient ses recherches sur la parallaxe de α Lyrae, donne, sur la dernière page, les relations moyennes suivantes des deux astres, pour l'époque moyenne de ses observations:

$$1837{,}65 \quad \varepsilon = 43{,}016, \quad \Pi = 138^\circ 28{,}5$$

Par un calcul préalable j'ai trouvé, pour l'époque moyenne de mes observations, à quelques centièmes de seconde près,

$$1852{,}65 \quad \varepsilon = 44{,}200, \quad \Pi = 144^\circ 50{,}0$$

En appliquant à l'angle de position de Dorpat la réduction — 6,3, pour l'effet de la précession dans l'intervalle entre les deux époques d'observation, 1837 et 1852, et en convertissant ensuite les relations indiquées, dans les valeurs correspondantes de différences en ascension droite et en déclinaison, nous avons:

pour 1837,65	pour 1852,65
$\Delta\alpha = +36{,}582$	$+32{,}596$
$\Delta\delta = -32{,}153$	$-36{,}133$

d'où nous déduisons le mouvement propre annuel de α Lyrae, par rapport à celui de l'étoile de comparaison,

$$\text{en } A = +0{,}2657 = 0^s{,}0177; \text{ en Décl.} = +0{,}2653.$$

L'ouvrage de mon père «Stellarum fixarum, imprimis compositarum positiones mediae pro epocha 1830,0» donne (pag. 325 et 368) pour l'intervalle de 75 ans écoulés entre les époques moyennes des observations de Bradley et de W. Struve, le mouvement propre absolu de α Lyrae

$$\text{en } A = +21{,}1; \text{ en Décl.} = +21{,}5$$

ou annuellement en $A = +0{,}2814$; en Décl. $= +0{,}2867$.

La comparaison de ces valeurs avec celles que nous avont précédemment déduites de la comparaison des mesures micrométriques de Dorpat et de Poulkova, paraîtrait d'abord conduire à la conclusion que l'étoile de comparaison eût elle-même un mouvement propre annuel de $+0''{,}0157$ en $\mathfrak{R}$ et de $+0''{,}0214$ en Décl. Mais les différences dont il s'agit ici, sont si petites qu'elles peuvent être censées provenues de petites incertitudes dans la positions Bradleïenne. En effet un changement de $1''{,}2$ en $\mathfrak{R}$ et de $1''{,}6$ en Décl. dans la position de 1755 d'après Bradley ou dans la différence des positions de Bradley et de W. Struve, suffirait complètement pour faire disparaître cette apparence d'un mouvement propre sensible de l'étoile de comparaison. Nous pouvons donc dire que cette petite étoile n'a pas encore montré des traces sûres d'un mouvement propre et par conséquent nous ne commettrons aucune grave erreur en la supposant immobile sur le fond du ciel. Il va sans dire qu'en toute rigueur cette dernière supposition n'est pas exacte, mais si même il y avait un petit mouvement propre de l'étoile de comparaison, il est évident qu'il ne pourra exercer aucune influence sur la parallaxe à déduire, parce que nos observations sont assez régulièrement répandues sur toute la période de deux ans et qu'en outre nous ferons entrer dans nos équations de condition, comme inconnue à déterminer, la différence entre les mouvements propres des deux étoiles comparées, au lieu du mouvement propre absolu de l'étoile principale.

Nous avons trouvé, pour 1852,65: $\Delta\alpha = +32''{,}596$, $\Delta\delta = -36''{,}133$. En appliquant à ces quantités les mouvements propres relatifs pour un an avant et après l'époque moyenne et en les convertissant ensuite dans les valeurs correspondantes de la distance et de l'angle de position, nous trouvons par soustraction:

	pour la période	
	1851,65—1852,65	1852,65—1853,65
le mouvement propre en distance	$\eta = +0''{,}097$	$+0''{,}101$
» » en position	$\sigma = +25'{,}3$	$+25'{,}1$

C'est avec ces quantités que j'ai réduit toutes mes observations à la même époque 1852 Août 25,0. Les observations réduites à cette date et corrigées d'abord pour l'effet de la réfraction et de la précession, sont contenues dans le tableau suivant.

Relations corrigées et réduites à l'époque moyenne 1852 Août 25,0.

Jour de l'observation	Distance	Angle de position
1851 Sept. 18	44″,214	144° 32′,4
— 22	44,543	144 45,1
— 25	44,182	144 57,9
— 30	44,421	144 41,5
Oct. 9	44,548	144 43,9
— 17	44,376	144 50,4
— 20	44,115	145 2,2
— 22	44,165	144 53,2
— 25	44,204	145 2,0
— 31	44,282	144 37,6
Nov. 19	44,207	144 35,9
— 25	44,256	145 1,9
Déc. 17	44,240	144 39,5
1852 Janv. 14	43,864	144 57,8
— 25	44,018	144 30,2
Mars 10	44,186	144 53,2
— 21	44,224	144 55,7
Avr. 3	44,190	144 56,8
— 6	44,010	144 59,6
— 8	44,137	145 7,6
— 20	44,131	144 53,4
— 21	44,152	144 58,9
— 29	44,284	144 49,5
Mai 2	44,039	145 7,6
— 14	44,034	144 59,4
— 24	44,236	144 58,9
— 25	44,266	145 7,8
Juin 7	44,086	145 18,2
— 14	44,105	145 5,7
— 22	44,013	145 5,2
— 29	44,230	144 57,7
— 30	44,129	144 58,7
Juil. 19	44,362	144 52,9
— 20	44,243	144 53,6
Août 18	44,455	144 55,6
— 19	44,685	144 50,6
— 21	44,464	144 44,4
— 27	44,332	144 39,9
— 31	44,271	144 40,7

Jour de l'observation	Distance	Angle de position
1852 Sept. 5	44″,440	144°50,3
— 10	44,249	144 43,0
— 18	44,336	144 42,4
— 28	44,314	144 26,8
Oct. 2	44,313	144 41,5
— 19	44,208	144 20,5
Nov. 6	44,263	144 39,2
— 7	44,363	144 27,2
— 11	44,161	144 42,0
— 12	44,171	144 43,9
— 22	44,209	144 40,1
— 27	44,277	144 38,8
Déc. 10	44,353	144 43,1
1853 Janv. 22	44,125	144 51,8
— 27	44,266	144 54,4
Févr. 2	44,195	144 54,4
— 5	44,114	144 56,2
— 6	44,076	145 3,6
— 8	44,084	144 53,2
Mars 7	43,867	144 58,7
— 20	44,041	145 1,2
Avr. 2	44,132	144 58,2
— 4	44,338	145 2,2
— 20	44,134	145 11,1
— 27	44,223	145 10,0
Mai 9	44,130	145 4,2
— 24	44,233	145 15,4
— 26	44,173	145 11,1
— 27	44,431	145 5,2
Juin 3	44.194	144 58,1
— 21	44,311	145 0,7
Juil. 8	44,385	144 47,6
— 14	44,194	145 12,2
— 19	44,402	144 55,9
Août 9	44,396	145 1,5
Sept. 17	44,326	144 36,8

Nous pouvons procéder maintenant à l'établissement des équations de condition. Ces équations contiendront quatre inconnues, nommément a) pour les distances: la correction $d\varepsilon$ de la distance moyenne $\varepsilon = 44''{,}200$, pour l'époque moyenne des observations 1852 Août 25,0, la correction $d\eta$ du mouvement propre annuel en distance, accepté $\eta = +0''{,}099$, le surplus $\varkappa$ de la constante de l'aberration pour l'étoile de comparaison, sur celle de

l'étoile principale, et enfin la différence π des parallaxes des deux étoiles; b) pour les angles de position: la correction $d\Pi$ de l'angle moyen $\Pi = 144^\circ 50',0$, la correction $d\sigma$ du mouvement propre annuel en position, accepté $\sigma = +25'',2$, et les deux quantités $\varkappa$ et π qui ont la même signification que dans les équations fournies par les distances. En désignant encore les distances réduites à l'époque moyenne par e, les angles par $\boldsymbol{P}$, et en mettant $\varepsilon \sin. d\Pi = \overline{d\Pi}$, $\varepsilon \sin. d\sigma = \overline{d\sigma}$, nos équations de condition auront la forme:

$$e - \varepsilon = d\varepsilon + (t - \boldsymbol{T}).d\eta - v \sin.(\odot - \boldsymbol{V}).\varkappa + v \cos.(\odot - \boldsymbol{V}).\pi$$

$$e \sin.(\boldsymbol{P} - \Pi) = \overline{d\Pi} + (t - \boldsymbol{T}).\overline{d\sigma} + u \sin.(\odot - \boldsymbol{U}).\varkappa - u \cos.(\odot - \boldsymbol{U}).\pi$$

où t est le temps de l'observation, $\boldsymbol{T}$ l'époque moyenne des observations. Les quantités u, v, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ ont les mêmes significations qui leur ont été attribuées par mon père dans son ouvrage «Mensurae micrometricae» pag. CLXVIII. Pour ne pas obliger les lecteurs de recourir à cet ouvrage, répétons ici la signification de ces dernières quantités. Soient $\boldsymbol{L}$ la longitude, $\boldsymbol{B}$ la latitude de l'étoile principale, Q l'angle de position de l'étoile de comparaison par rapport au cercle de latitude passant par l'étoile principale; introduisons deux angles auxiliaires φ et ψ de sorte que $\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{\sin.\boldsymbol{B}\,\text{tang.}\,Q}$, $\text{tang.}\,\psi = \frac{\text{tang.}\,Q}{\sin.\boldsymbol{B}}$

et nous aurons

$$u = \frac{\cos.Q}{\sin.\varphi};\quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L} + \varphi$$

$$v = \frac{\sin.Q}{\sin.\psi};\quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} - \psi.$$

Les formules données par mon père à l'endroit cité contiennent au lieu des corrections des mouvements propres en distance et en position, celles des mouvements propres décomposés en coordonnées rectangulaires en longitude et en latitude, qu'il désigne par μ' et ξ. Il y a donc dans chacune de ses formules 5 inconnues à déterminer, dont quatre μ', ξ, $\varkappa$ et π ont la même signification dans les deux formules. Il y aurait donc des contrôles réciproques pour toutes les 4 quantités, dans la résolution des deux systèmes d'équation, qui auraient permis d'apprécier de plus près l'exactitude des résultats. Mais dans notre cas les contrôles à déduire de l'accord des μ' et ξ auraient été imaginaires, car nous connaissons déjà les mouvements propres avec un si haut degré d'exactitude, par la comparaison des mesures micrométriques faites à des époques distantes entre elles de 15 ans, que les corrections que nous déduirons de nos observations de deux ans seront, si les observations sont bonnes, insignifiantes en égard de leurs erreurs probables. Dans notre cas le contrôle consiste donc dans la preuve, que les corrections des mouvements propres résultent à peu près nulles et cette preuve peut être fournie aussi bien par les $d\eta$ et $\overline{d\sigma}$ que par les μ' et ξ. C'est cette considération qui m'a engagé à donner à nos équations la forme plus simple, qui nous épargne une inconnue. Nous avons d'ailleurs des contrôles suffisants dans l'accord des valeurs de $\varkappa$ et π, que nous déduirons de nos deux systèmes d'équations. Aussi pour $\varkappa$ le contrôle sera probablement du même genre que pour la correction du mouvement propre, c'est à dire nous trouverons des valeurs du même ordre que leurs

erreurs probables, car nous ne possédons jusqu'ici aucun indice sûr d'une différence de vitesse de la lumière provenante de différentes étoiles. Mais c'est justement la raison pourquoi nous avons introduit cette inconnue dans nos équations, car jusqu'ici il nous manquent encore des preuves directes et suffisantes sur cette égalité supposée de la vitesse de la lumière. D'un autre côté, vu que les coefficients de $\varkappa$ suivent une période annuelle analogue à celle des coefficients de π, si nous trouvons les $\varkappa$ ou du même ordre que leurs erreurs probables, ou de très près égaux mais toujours très petits par les deux systèmes d'équations, nous aurons ici un indice très favorable pour l'exactitude approximative des parallaxes.

Dans le calcul des coefficients de $\varkappa$ et π, nous sommes partis des données suivantes: $\alpha = 18^h 31^m 9$, $\delta = 38^\circ 38' 9$, $\Pi = 144^\circ 50'$. Avec cela nous avons $L = 283^\circ 15'$, $B = 61^\circ 44'$ et $Q = 151^\circ 22'$, enfin

$$u = 0{,}974 \qquad v = 0{,}910$$
$$U = 218^\circ 46' \qquad V = 134^\circ 51'$$

Ces valeurs de u et v indiquent que par rapport aux coefficients maximum de la parallaxe, il n'y a qu'une légère différence en faveur des angles de position. Les deux coordonnées, distance et position, se prêtent donc presque également bien à la détermination,

A l'aide des valeurs de U et V, nous trouvons que

le maximum de la parallaxe en distance doit avoir lieu le 6 Août
le minimum » » » » » » » le 3 Février
le maximum » » » angle de position » le 28 Avril
le minimum » » » » » » » le 31 Octobre.

En parcourant la liste précédente des relations réduites à l'époque moyenne on reconnaît facilement qu'en général les données de l'observation s'accordent pour les époques des maxima et minima, avec cette théorie, d'où nous concluons que l'effet de la parallaxe s'est distinctement prononcé dans nos mesures. Mais cette conclusion s'établira encore avec plus de force par un coup d'oeil sur les équations de condition, données dans les tableaux suivants.

Équations de condition fournies par les distances.

Jour de l'observation					Erreurs des éq.$= v$
1851 Sept. 18	$d\varepsilon$ —0,935	$d\eta$ —0,588	$\varkappa$ +0,693	$\pi = +0''{,}014$	$+0''{,}094$
— 22	—0,924	—0,634	+0,652	+0,343	—0,238
— 25	—0,916	—0,667	+0,618	—0,018	+0,123
— 30	—0,903	—0,717	+0,559	+0,221	—0,119
Oct. 9	—0,878	—0,794	+0,442	+0,348	—0,257
— 17	—0,856	—0,848	+0,328	+0,176	—0,093

Jour de l'observation					Erreurs des éq.=v
1851 Oct. 20	$d\xi$ —0,848	$d\eta$ —0,864	$\varkappa$ +0,284	π = —0,″085	+0,″162
— 22	—0,843	—0,873	+0,254	—0,035	+0,120
— 25	—0,834	—0,885	+0,208	+0,004	+0,068
— 31	—0,818	—0,902	+0,114	+0,082	—0,021
Nov. 19	—0,766	—0,890	—0,189	+0,007	+0,018
— 25	—0,750	—0,865	—0,279	+0,056	—0,042
Déc. 17	—0,689	—0,694	—0,588	+0,040	—0,072
1852 Janv. 14	—0,613	—0,329	—0,848	—0,336	—0,254
— 25	—0,583	—0,157	—0,896	—0,182	+0,084
Mars 10	—0,458	+0,531	—0,738	—0,014	—0,103
— 21	—0,428	+0,661	—0,624	+0,024	—0,135
Avr. 3	—0,393	+0,783	—0,462	—0,010	—0,089
— 6	—0,385	+0,806	—0,421	—0,190	+0,096
— 8	—0,379	+0,820	—0,393	—0,063	—0,028
— 20	—0,346	+0,883	—0,217	—0,069	—0,006
— 21	—0,344	+0,886	—0,204	—0,048	—0,024
— 29	—0,322	+0,905	—0,082	+0,084	—0,143
Mai 2	—0,313	+0,909	—0,035	—0,161	+0,107
— 14	—0,281	+0,897	+0,147	—0,166	+0,136
— 24	—0,254	+0,860	+0,295	+0,036	—0,044
— 25	—0,251	+0,855	+0,309	+0,066	—0,073
Juin 7	—0,215	+0,768	+0,487	—0,114	+0,134
— 14	—0,196	+0,706	+0,573	—0,095	+0,130
— 22	—0,174	+0,624	+0,661	—0,187	+0,238
— 29	—0,155	+0,543	+0,729	+0,030	+0,035
— 30	—0,152	+0,531	+0,738	—0,071	+0,138
Juil. 19	—0,100	+0,273	+0,867	+0,162	—0,057
— 20	—0,097	+0,261	+0,871	+0,043	+0,057
Août 18	—0,018	—0,174	+0,892	+0,255	—0,125
— 19	—0,015	—0,191	+0,889	+0,485	—0,353
— 21	—0,010	—0,220	+0,882	+0,264	—0,129
— 27	+0,006	—0,307	+0,856	+0,132	+0,004
— 31	+0,017	—0,364	+0,834	+0,071	+0,066
Sept. 5	+0,031	—0,433	+0,800	+0,240	—0,103
— 10	+0,045	—0,499	+0,760	+0,049	+0,087
— 18	+0,067	—0,597	+0,686	+0,136	0,000
— 28	+0,094	—0,706	+0,573	+0,114	+0,014
Oct. 2	+0,105	—0,743	+0,524	+0,113	+0,012
— 19	+0,151	—0,863	+0,287	+0,008	+0,096
Nov. 6	+0,200	—0,909	+0,007	+0,063	+0,015
— 7	+0,203	—0,909	—0,009	+0,163	—0,088
— 11	+0,214	—0,906	—0,073	—0,039	+0,108

Jour de l'observation					Erreurs des éq.$=v$
1852 Nov. 12	$d\varepsilon$ +0,217	$d\eta$ —0,905	$\varkappa$ —0,089	π —0″,029	+0″,094
— 22	+0,244	—0,876	—0,245	+0,009	+0,037
— 27	+0,258	—0,851	—0,321	+0,077	—0,041
Déc. 10	+0,294	—0,755	—0,507	+0,153	—0,145
1853 Janv. 22	+0,411	—0,193	—0,889	—0,075	+0,007
— 27	+0,425	—0,114	—0,902	+0,066	—0,130
Févr. 2	+0,441	—0,017	—0,909	—0,005	—0,075
— 5	+0,449	+0,031	—0,909	—0,086	+0,003
— 6	+0,452	+0,047	—0,908	—0,124	+0,040
— 8	+0,459	+0,086	—0,905	—0,116	+0,031
Mars 7	+0,533	+0,489	—0,767	—0,333	+0,243
— 20	+0,568	+0,638	—0,638	—0,159	+0,074
Avr. 2	+0,604	+0,773	—0,478	—0,068	—0,005
— 4	+0,609	+0,790	—0,451	+0,138	—0,209
— 20	+0,653	+0,882	—0,222	—0,066	+0,019
— 27	+0,672	+0,902	—0,115	+0,023	—0,059
Mai 9	+0,705	+0,907	+0,068	—0,070	+0,056
— 24	+0,746	+0,861	+0,292	+0,033	—0,015
— 26	+0,752	+0,851	+0,320	—0,027	+0,048
— 27	+0,754	+0,845	+0,335	+0,231	—0,207
Juin 13	+0,801	+0,718	+0,558	—0,006	+0,066
— 21	+0,823	+0,637	+0,648	+0,111	—0,036
Juil. 8	+0,869	+0,431	+0,800	+0,085	+0,022
— 14	+0,885	+0,350	+0,839	—0,006	+0,124
— 19	+0,899	+0,279	+0,866	+0,202	—0,078
Août 9	+0,957	—0,035	+0,909	+0,196	—0,045
Sept. 17	+1,063	—0,583	+0,698	+0,126	+0,034

Équations de condition fournies par les angles de position.

Jour de l'observation					Erreurs des éq.$=w$
1851 Sept. 18	$d\Pi$ —0,935	$d\sigma$ —0,672	$\varkappa$ —0,705	π —0″,226	+0″,152
— 22	—0,924	—0,622	—0,747	—0,063	—0,021
— 25	—0,916	—0,583	—0,780	+0,102	—0,191
— 30	—0,903	—0,514	—0,827	—0,109	+0,010
Oct. 9	—0,878	—0,381	—0,897	—0,078	—0,036
— 17	—0,856	—0,253	—0,941	+0,005	—0,128
— 20	—0,848	—0,204	—0,952	+0,157	—0,281
— 22	—0,843	—0,171	—0,959	+0,041	—0,171
— 25	—0,834	—0,118	—0,967	+0,154	—0,286

Jour de l'observation					Erreurs des éq. = w
1851 Oct. 31	$\overline{d\Pi}$ —0,818	$\overline{d\sigma}$ —0,019	$\varkappa$ —0,974	π = —0,″160	+0,″024
Nov. 19	—0,766	+0,302	—0,926	—0,181	+0,044
— 25	—0,750	+0,396	—0,890	+0,153	—0,285
Déc. 17	—0,689	+0,705	—0,673	—0,135	+0,031
1852 Janv. 14	—0,613	+0,940	—0,253	+0,100	—0,141
— 25	—0,583	+0,972	—0,066	—0,253	—0,240
Mars 10	—0,458	+0,726	+0,650	+0,041	+0,068
— 21	—0,428	+0,590	+0,775	+0,073	+0,061
Avr. 3	—0,393	+0,403	+0,887	+0,087	+0,070
— 6	—0,385	+0,357	+0,906	+0,123	+0,038
— 8	—0,379	+0,326	+0,918	+0,226	—0,063
— 20	—0,346	+0,131	+0,965	+0,044	+0,132
— 21	—0,344	+0,116	+0,967	+0,114	+0,063
— 29	—0,322	—0,016	+0,974	—0,006	+0,187
Mai 2	—0,313	—0,066	+0,972	+0,226	—0,044
— 14	—0,281	—0,258	+0,939	+0,121	+0,061
— 24	—0,254	—0,412	+0,883	+0,114	+0,063
— 25	—0,251	—0,426	+0,876	+0,229	—0,051
Juin 7	—0,215	—0,606	+0,763	+0,362	—0,199
— 14	—0,196	—0,690	+0,687	+0,202	—0,048
— 22	—0,174	—0,775	+0,590	+0,195	—0,055
— 29	—0,155	—0,838	+0,496	+0,099	+0,028
— 30	—0,152	—0,847	+0,482	+0,112	+0,012
Juil. 19	—0,100	—0,955	+0,193	+0,037	+0,043
— 20	—0,097	—0,958	+0,179	+0,046	+0,032
Août 18	—0,018	—0,931	—0,287	+0,072	—0,071
— 19	—0,015	—0,926	—0,304	+0,008	—0,009
— 21	—0,010	—0,915	—0,335	—0,072	+0,065
— 27	+0,006	—0,877	—0,424	—0,130	+0,109
— 31	+0,017	—0,846	—0,482	—0,120	+0,088
Sept. 5	+0,031	—0,803	—0,552	+0,004	—0,048
— 10	+0,045	—0,753	—0,617	—0,090	+0,034
— 18	+0,067	—0,663	—0,714	—0,098	+0,024
— 28	+0,094	—0,531	—0,817	—0,298	+0,203
Oct. 2	+0,105	—0,474	—0,851	—0,109	+0,007
— 19	+0,151	—0,208	—0,952	—0,379	+0,255
Nov. 6	+0,200	+0,096	—0,969	—0,139	+0,003
— 7	+0,203	+0,113	—0,968	—0,293	+0,157
— 11	+0,214	+0,181	—0,957	—0,103	—0,034
— 12	+0,217	+0,197	—0,954	—0,078	—0,066
— 22	+0,244	+0,361	—0,905	—0,127	—0,004
— 27	+0,258	+0,439	—0,870	—0,144	+0,017

Jour de l'observation					Erreurs des éq. = w
1852 Déc. 10	$\overline{d\pi}$ +0,294 $\overline{d\sigma}$ +0,626 $\varkappa$	—0,746 π	=	—0″,089	—0″,044
1853 Jan. 22	+0,411	+0,969	—0,105	+0,023	—0,039
— 27	+0,425	+0,974	—0,019	+0,057	—0,060
Févr. 2	+0,441	+0,970	+0,085	+0,057	—0,044
— 5	+0,449	+0,964	+0,136	+0,080	—0,057
— 6	+0,452	+0,962	+0,154	+0,175	—0,151
— 8	+0,459	+0,955	+0,194	+0,041	—0,010
Mars 7	+0,533	+0,761	+0,608	+0,112	—0,008
— 20	+0,568	+0,606	+0,763	+0,144	—0,012
Avr. 2	+0,604	+0,422	+0,878	+0,105	+0,052
— 4	+0,609	+0,391	+0,892	+0,156	+0,003
— 20	+0,653	+0,137	+0,965	+0,271	—0,094
— 27	+0,672	+0,020	+0,974	+0,257	—0,076
Mai 9	+0,705	—0,175	+0,958	+0,183	+0,003
— 24	+0,746	—0,409	+0,884	+0,327	—0,148
— 26	+0,752	—0,438	+0,870	+0,271	—0,093
— 27	+0,754	—0,453	+0,863	+0,195	—0,018
Juin 13	+0,801	—0,676	+0,701	+0,104	+0,053
— 21	+0,823	—0,763	+0,605	+0,138	+0,005
Juil. 8	+0,869	—0,902	+0,369	—0,031	+0,140
— 14	+0,885	—0,934	+0,277	+0,285	—0,189
— 19	+0,899	—0,954	+0,199	+0,076	+0,008
Août 9	+0,957	—0,964	—0,141	+0,148	—0,119
Sept. 17	+1,063	—0,677	—0,700	—0,170	+0,101

Il a déjà été dit plus haut (pag. 10) que les mesures obtenues dans la première période (I), depuis le commencement des observations en 1851 jusqu'au 25 Janvier 1852, n'égalent pas en exactitude celles que nous avons exécutées dans la période suivante (II). C'est pourquoi j'ai cru devoir assigner aux équations de la période I, un poids inférieur à celui des équations de la période II. Un rapport exact entre les poids relatifs à attribuer en moyenne aux équations des deux périodes, ne pourrait être établi que par des résolutions successives des équations, mais même cette voie de déterminer les poids ne serait guères praticable dans notre cas, à cause du nombre trop limité des équations de la première période. N'ayant donc aucun moyen sûr de fixer plus exactement les poids relatifs des équations, et de l'autre côté ne voulant rejeter entièrement les observations de la période I, j'ai attribué à ces dernières le poids=$^1/_2$, celui des bonnes observations de la période II étant pris pour unité. Ce choix du poids relatif est motivé encore, par rapport aux équations fournies par les angles de position, par la circonstance que, dans le premier temps, j'ai produit les bissections simultanées des deux étoiles par le fil micrométrique mobile, en donnant à ce fil, pendant toutes les mesures du même jour, le dernier mouvement

constamment dans le même sens, mais en différentes nuits dans un sens opposé, de sorte qu'il y a lieu de supposer qu'en général, pour cette coordonnée, dans la moyenne des mesures de deux différentes nuits l'erreur constante introduite par cette méthode d'observation, a dû s'anéantir et qu'ainsi, en effet, deux observations de la période I ne constituent qu'une observation de la période II.

J'ai assigné également le poids $^1/_2$ aux observations faites dans la période II par un état moins favorable de l'atmosphère. Les notes ajoutées à notre tableau d'observations, indiquent les équations auxquelles ce poids inférieur a été attribué. Cependant la seule diffusion des images, sans être accompagnée d'ondulations considérables, n'a pas été regardée comme cause suffisante pour compromettre l'exactitude des mesures. Au contraire il peut arriver qu'avec des images diffuses les mesures sont très sûres. Dans ces cas toutes les étoiles présentent l'aspect de disques d'un éclat uniforme, dont la bissection se fait avec la plus grande exactitude tant que la visibilité des objets n'en a pas trop souffert.

Ayant attribué le poids $^1/_2$ aux observations de la période II faites dans des circonstances atmosphériques moins favorables, nous devons, par analogie et d'après les lois de la probabilité, donner le poids $^1/_3$ aux observations faites dans la période I par des conditions atmosphériques moins satisfaisantes.

Avec ces poids les équations de condition, traitées par la méthode des moindres carrés, nous mènent aux equations finales que voici:

Équations finales

a) par les distances

$$\begin{aligned}
59{,}17\,d\varepsilon + 4{,}86\,d\eta + 5{,}29\,\varkappa + 9{,}08\,\pi &= +1''{,}789\\
4{,}86\,d\varepsilon + 16{,}16\,d\eta + 4{,}22\,\varkappa + 1{,}59\,\pi &= +0{,}429\\
5{,}29\,d\varepsilon + 4{,}22\,d\eta + 27{,}34\,\varkappa - 2{,}30\,\pi &= -1{,}747\\
9{,}08\,d\varepsilon + 1{,}59\,d\eta - 2{,}30\,\varkappa + 21{,}53\,\pi &= +2{,}879
\end{aligned}$$

b) par les angles de position

$$\begin{aligned}
59{,}17\,\overline{d\Pi} + 4{,}86\,\overline{d\sigma} - 10{,}26\,\varkappa + 4{,}61\,\pi &= +2''{,}460\\
4{,}86\,\overline{d\Pi} + 16{,}16\,\overline{d\sigma} - 2{,}15\,\varkappa + 4{,}40\,\pi &= +0{,}923\\
-10{,}26\,\overline{d\Pi} - 2{,}15\,\overline{d\sigma} + 24{,}21\,\varkappa + 1{,}82\,\pi &= -0{,}573\\
4{,}61\,\overline{d\Pi} + 4{,}40\,\overline{d\sigma} + 1{,}82\,\varkappa + 31{,}84\,\pi &= +5{,}229
\end{aligned}$$

d'où nous déduisons, par élimination, les valeurs suivantes des inconnues cherchées:

a) par les distances

$d\varepsilon = +0''{,}0153$	avec le poids	53,24	et l'erreur probable	$0''{,}0095$
$d\eta = +0{,}0262$	»	»	»	15,15	»	»	»	0,0178
$\varkappa = -0{,}0609$	»	»	»	25,42	»	»	»	0,0138
$\pi = +0{,}1189$	»	»	»	19,67	»	»	»	0,0157

*

b) par les angles de position

$\overline{d\Pi} = +0,''0244$ avec le poids 53,25 et l'erreur probable $0,''0086$
$\overline{d\sigma} = +0,0024$ » » » 15,13 » » » 0,0162
$\varkappa = -0,0253$ » » » 22,04 » » » 0,0135
$\pi = +0,1618$ » » » 30,06 » » » 0,0115

En substituant ces valeurs dans les équations de condition, nous avons calculé les erreurs restantes, v et w, données, dans les tableaux précédents, à côté des équations auxquelles elles appartiennent. La somme des carrés de ces erreurs, multipliés par les poids correspondants, se trouve

pour les distances $\Sigma kv^2 = 0,7519$
pour les angles de position $\Sigma kw^2 = 0,6213$

et nous en déduisons l'erreur probable pour l'unité des poids, c'est à dire l'erreur probable d'une bonne observation de la seconde période:

pour les distances $= 0,''0694$
pour les angles de position $= 0,''0631$ en secondes du grand cercle
ou $= 4,''9$ dans la distance moyenne des deux étoiles comparées.

L'exactitude des observations, qui se prononce dans ces erreurs probables, paraît sans doute très satisfaisante, surtout si nous considérons la difficulté des mesures entre une étoile aussi brillante que α Lyrae et la petite étoile de comparaison. Nous voyons encore qu'en général les mesures des angles de position sont, dans ce cas, un peu plus exactes que celles des distances. C'est aussi à quoi il fallait s'attendre d'après la nature des observations, si toutes les précautions étaient également observées dans les mesures des deux coordonnées. En effet la mesure des distances, en réclamant la bissection simultanée de deux objets par deux fils différents, doit être par cette même raison tant soit peu inférieure en exactitude aux mesures des angles, dans lesquelles la bissection des deux objets se fait par le même fil. Mais cet avantage des angles de position disparaît dès que les distances excèdent certaines limites au-delà desquelles la difficulté de la détermination la plus exacte de la direction du mouvement diurne, entravera un peu l'exactitude des angles de position. Il faut donc que l'erreur probable dans la détermination de la direction du mouvement diurne soit très petite ou disparaisse vis à vis des erreurs probables des directions mesurées entre les deux objets, pour donner aux angles de position une supériorité incontestable en exactitude sur les distances.

Regardons maintenant de plus près les résultats fournis par la résolution des deux systèmes d'équations finales. Nous voyons d'abord, que l'accord des deux valeurs de la parallaxe π, eu égard aux erreurs probables dont elles sont affectées, est parfaitement satisfaisant. En outre nous avons dans la petitesse des corrections, $d\eta$ et $\overline{d\sigma}$, déduites pour le mouvement propre, et dans celles des valeurs $\varkappa$ trouvées pour la différence en aberration des deux étoiles comparées, un indice très favorable qu'aucune source d'erreurs de

nature périodique et de quelque importance, ne se soit plus cachée dans nos observations. Toujours l'accord du signe dans les deux valeurs de $\varkappa$ et la circonstance que la valeur de $\varkappa$, trouvée par les distances, surpasse de quatre à cinq fois son erreur probable, mérite bien d'attirer notre attention. Ou il se prononce ici que les mesures des distances sont sujettes encore à de très petites erreurs périodiques, ou nous avons ici un indice que la constante de l'aberration est tant soit peu plus faible pour l'étoile de comparaison que pour l'étoile principale. La valeur moyenne qui résulte de nos deux systèmes d'équations, pour la différence dans la constante de l'aberration, serait

$$\varkappa = -0''{,}0427, \text{ avec l'erreur probable } 0''{,}0098$$

En combinant également les deux valeurs de π, nous avons comme résultat définitif de nos observations, la différence des parallaxes de α Lyrae et de l'étoile de comparaison

$$\pi = +0''{,}1468, \text{ avec l'erreur probable } 0''{,}0093.$$

Pour me convaincre par l'expérience que le résultat ne sera pas considérablement altéré, si l'on donne d'autres poids relatifs aux différentes mesures, j'ai formé encore des équations finales sous deux hypothèses sur les poids, qui désignent de quelque sorte les limites des poids admissibles, savoir 1) que toutes les observations soient d'égale qualité, sans y faire une différence pour les deux périodes ou pour l'état plus ou moins favorable de l'atmosphère 2) que toute observation marquée comme exécutée dans des conditions moins favorables devait être entièrement rejetée. En résolvant ensuite les équations finales formées dans ces deux hypothèses, je suis parvenu aux valeurs suivantes de la parallaxe:

	dans l'hypoth. I	dans l'hypoth. II
par les distances	$\pi = +0''{,}127$	$\pi = +0''{,}120$
par les angles de position	$+0{,}153$	$+0{,}187$

Nous voyons donc que, dans aucune de ces hypothèses, la valeur moyenne de la parallaxe ne s'écarte d'un centième de seconde de notre valeur définitive et que, par conséquent, nous avons le droit de regarder cette dernière comme indépendante des suppositions assez vagues qui subsistent dans le choix des poids.

Il reste encore à donner les valeurs définitives des deux coordonnées de l'étoile de comparaison par rapport à α Lyrae, pour l'époque moyenne des observations, et du mouvement propre relatif des deux astres. En convertissant, dans ce but, les valeurs de $\overline{d\Pi}$ et de $\overline{d\sigma}$ et de leurs erreurs probables, exprimées toutes en secondes du grand arc, dans les valeurs angulaires qui correspondent à la distance moyenne de l'étoile de comparaison, nous avons:

$$d\Pi = +1'{,}90, \text{ avec l'erreur probable } 0'{,}68$$
$$d\sigma = +0{,}18 \quad » \quad » \quad 1{,}26$$

En ajoutant maintenant les valeurs trouvées de $d\varepsilon$, $d\eta$, $d\Pi$ et $d\sigma$ aux valeurs supposées de ε, η, Π et σ, nous parvenons aux résultats que voici:

Pour l'époque moyenne: 1852 Août 25,0

Distance = 44″,215 avec l'erreur probable 0″,010
Angle de position = 144°51′,90 » » » 0′,68

Le mouvement propre relatif des deux astres, par an,

en distance = + 0″,125 avec l'erreur probable 0″,018
en angle de position = + 25′,38 » » » 1′,26

3. **Observations et calculs sur la parallaxe de 61 Cygni.**

Bessel, dans ses mémorables recherches sur la parallaxe de cette étoile double, avait employé deux étoiles de comparaison, de 9me grandeur, dont les distances à l'étoile principale étaient environ de 7′ et 12′. Ces deux étoiles, étant trop éloignées pour admettre une observation exacte dans le champ plus rétréci de notre lunette, ne se qualifiaient pas à notre recherche. Avec le grossissement le plus faible, de 137 fois, la lunette de Poulkova offre un champ de près de 12′ de diamètre. Il aurait donc été possible de mesurer encore la plus proche des deux étoiles Besseliennes, mais d'un côté les mesures gagnent beaucoup en exactitude si l'on y peut employer un grossissement plus fort, d'autre côté les mesures des distances auraient dû être faites à l'aide des pas extrêmes de la vis micrométrique qui, par la nature de l'opération mécanique qui les produit, ne peuvent être aussi réguliers que les pas au milieu de la vis, enfin il y aurait déjà eu, pour les angles de position, quelque difficulté de déterminer la direction du mouvement diurne avec ce degré d'exactitude qu'aurait réclamé la grande distance des deux objets à comparer. Par ces raisons j'ai préféré d'employer pour objet de comparaison, une autre étoile plus proche de 61 Cygni et qui pouvait être observée aisément à l'aide du grossissement II de notre lunette, de 207 fois. Avec ce grossissement j'ai compté 44 étoiles visibles en même temps au champ de la lunette, de 8′,7 de diamètre, l'étoile double 61 Cygni étant placée au centre. Mais dans ce nombre il n'y a que très peu d'étoiles qui soient assez brillantes pour se prêter à une observation exacte. J'ai donc choisi pour objet de comparaison la plus brillante parmi ces étoiles environnantes, de 10me grandeur seulement, et distante de 61 Cygni, de 2′,8 dans la direction Sud-Est. Quoique au commencement nous n'eussions encore aucune preuve directe que cette étoile n'appartenait pas au système de 61 Cygni, au moins il fallait le supposer d'après les lois de la probabilité. En peu de jours, les changements observés dans les relations réciproques entre cette étoile et 61 Cygni ont confirmé la justesse de cette supposition.

Les deux étoiles qui composent l'étoile double 61 Cygni, ne diffèrent pas beaucoup en éclat, l'une étant de la grandeur 5,3, l'autre de 5,9, d'après les «Mensurae micrometricae» pag. 169. Il n'y a donc aucune raison de désigner une des deux étoiles, comme étoile principale du système. La probabilité du nexe physique des deux astres, déduite des recherches sur la distribution des étoiles sur la voûte céleste et de l'égalité approximative,

tant en quantité qu'en direction, de leur énorme mouvement propre, est si haute que ce nexe ne peut pas être raisonnablement tiré en doute. (Voyez l'ouvrage de mon père: «Stellarum fixarum imprimis compositarum positiones mediae» pag. CCXXI). Les deux étoiles auront donc la même parallaxe, tant que le diamètre de leur orbite autour du centre commun de gravité peut être regardé comme évanouissant vis à vis de la distance qui les sépare de la Terre. Par conséquent, dans notre recherche, il était parfaitement indifférent laquelle des deux composantes fut observée par moi. J'ai choisi pour objet d'observation la plus petite des deux étoiles, que je désignerai par ***B***, d'après l'exemple de mon père. Les motifs qui m'ont engagé à donner la préférence à l'étoile ***B*** se résument dans les deux points suivants qui, à vrai dire, ne sont que d'une importance secondaire, savoir que l'étoile ***B*** était un peu plus proche de l'étoile de comparaison que l'étoile ***A*** et qu'elle avait un peu moins d'éclat. Peut-être dira-t-on que, pour gagner un contrôle du résultat, il aurait mieux valu baser la recherche sur des jonctions micrométriques à exécuter entre l'étoile de comparaison et les deux composantes du système à part; mais, d'après mon opinion, un contrôle de ce genre n'aurait presque aucune valeur. En effet comme les jonctions avec les deux étoiles auraient été exécutées chaque nuit de très près sous les mêmes conditions, les relations observées auraient dû être affectées toujours également par les mêmes causes troublantes. Par conséquent les différences entre les résultats d'observation, s'il y en avait de sensibles, n'auraient accusé que les erreurs accidentelles de l'observation, lesquelles se prononcent encore plus distinctement, dans l'accord des mesures faites en différents nuits sur le même couple d'étoiles et elles ne nous auraient rien appris sur l'existence d'erreurs systématiques. Probablement elles nous auraient fourni des résultats d'un accord surprenant, mais cet accord n'aurait dû être regardé en aucune manière comme témoignage pour l'exactitude des mesures. Ce témoignage au contraire nous sera donné très rigoureusement par les résultats à déduire, comme dans le cas de α Lyrae, des mesures faites d'après les deux méthodes indépendantes des distances et des angles de position, entre l'une des deux composantes de l'étoile double et l'étoile de comparaison.

Les «Positiones mediae» donnent pag. CCXIX une recherche sur le mouvement relatif des deux étoiles qui composent le système de 61 Cygni. Cette recherche a mené mon père à la thèse: que le mouvement relatif des deux astres, déduit des observations faites depuis Bradley jusqu'en 1852, se représente si exactement par une ligne droite, que les observations continuées pendant près de 100 ans n'offrent encore aucune trace d'une déviation de cette ligne. Ce résultat presque inattendu ne porte aucunement à affaiblir la supposition que les deux astres soient liés par un nexe physique, mais ce que nous en devons conclure c'est qu'à l'époque actuelle nous ne savons encore absolument rien sur la période de révolution dans ce système, excepté qu'elle doit être énormément grande, et que toute tentative de déterminer les éléments de l'orbite n'aurait encore aucune chance de succès. Il s'en suit aussi que nous n'avons rien à craindre d'une influence sensible du mouvement inconnu des deux astres autour de leur centre commun de gravité, sur le

résultat que nous déduirons, pour la parallaxe, d'une série d'observations qui n'embrasse que l'espace de temps comparativement très bref d'un seul an. D'autre côté le mouvement propre que nous déduirons de notre recherche, ne sera pas celui du centre de gravité du système, mais le mouvement apparent de l'étoile *B*, à l'époque de nos observations, c'est à dire le mouvement propre du système, altéré par le mouvement de l'étoile *B* dans son orbite autour du centre de gravité; et cela encore non pas dans un sens absolu, mais relatif à l'étoile de comparaison. Ce ne serait donc qu'en faisant des hypothèses très vagues sur la position du centre de gravité entre les deux composantes, ou sur leurs masses relatives, que nous pourrions parvenir à une connaissance approximative du mouvement propre réel de tout le système, en combinant encore avec les mesures micrométriques entre *B* et l'étoile de comparaison, celles qui ont été exécutées de temps à autre entre *A* et *B*.

Les observations sur la parallaxe de 61 Cygni ont été commencées le 18 Août 1852 et ont été continuées jusqu'au 17 Sept. 1853. Leur nombre ne s'élève qu'à 39, mais qui sont assez regulièrement réparties sur toute la période. Étant convaincu que ce nombre d'observations suffirait à donner une valeur très approchée de la parallaxe, et ayant en vue des travaux analogues à étendre sur un plus grand nombre d'étoiles, je croyais que, pour le moment, une continuation ultérieure des observations de 61 Cygni, ne porterait aucun fruit à la science. Sans doute, au lieu de continuer les observations dans un train, il vaudra beaucoup mieux revenir sur cette recherche après un intervalle plus prolongé, surtout si des études ultérieures sur l'instrument, pourraient éveiller l'espoir d'élever encore l'exactitude des résultats.

A l'époque où je venais d'achever les observations, M. Woldstedt, directeur de l'observatoire de Helsingfors, était en visite à Poulkova. Sur mon invitation, motivée par la circonstance qu'à cette époque mon temps était occupé par d'autres travaux, et par le désir de soumettre les observations à la critique attentive et minutieuse d'un astronome aussi consciencieux, M. Woldstedt eut la complaisance de se charger des réductions et d'un calcul préalable de mes mesures. C'était dans sa présence que je faisais les extraits nécessaires de mon journal d'observations, et déjà en faisant ces extraits nous étions frappés des variations périodiques qui se manifestaient soit dans les distances soit dans les angles de position, quoiqu'elles fussent encore cachées en partie par l'effet du mouvement propre rapide sur les deux coordonnées. Du prime abord j'étais convaincu que ces variations devaient être attribuées à une parallaxe très considérable et le résultat des calculs a parfaitement confirmé cette attente.

M. Woldstedt prit la copie de mes observations avec soi à Helsingfors et après avoir achevé les calculs il me transmit les résultats. Ce sont ces résultats qui ont été communiqués par moi à M. Airy et qui ont été publiés par l'Astronome Royal dans les «Monthly Notices» de la Société Astronomique de Londres, Vol. XIV pag. 159. A cette communication je croyais nécessaire d'ajouter que je ne regardais la valeur de la parallaxe déduite

par M. Woldstedt, comme le résultat définitif de notre recherche, quoique déjà comme un résultat très approché. C'est que malgré la rigueur extrême qu'avait mise l'astronome de Helsingfors dans tous ses calculs, je croyais que certaines parties admettaient d'être traitées encore plus complètement. Il me paraissait particulièrement utile et intéressant d'introduire aussi, dans les équations de condition, le membre correspondant à l'effet d'une différence dans la constante de l'aberration des deux astres comparés, et d'ajouter aux réductions pour le mouvement propre en distance et en angle de position, les quantités qui dépendent du carré du temps. Par ces raisons je me suis décidé à refaire entièrement les calculs, en me servant toujours des calculs de M. Woldstedt, comme contrôle de l'exactitude dans tous les cas particuliers.

Par rapport à la méthode d'observation, je n'ai qu'à renvoyer à ce qui a été dit dans la partie précédente de ce mémoire, par rapport aux observations de α Lyrae. Je remarque seulement qu'à cause de la plus grande distance de l'étoile de comparaison, j'ai voué ici encore plus de soin à la détermination du mouvement diurne, que dans le cas de α Lyrae. En effet, dans la distance moyenne des étoiles de comparaison, l'erreur d'une minute dans la direction du mouvement diurne produirait une erreur, dans le lieu relatif des astres comparés, pour α Lyrae de 0″,013, pour 61 Cygni de 0″,048. Ayant comparé plus tard, dans les deux cas, les directions du mouvement diurne, déterminées en différents jours et dans des positions analogues de l'instrument, avec les moyennes arithmétiques de toutes les directions déterminées dans les périodes respectives; j'ai trouvé que, pour les observations de α Lyrae, les déterminations de la direction du mouvement diurne sont sujettes, chaque nuit, à une erreur probable de 1′,44, tandis que cette erreur ne s'élève qu'à 1′,15 pour les observations de 61 Cygni. Ces deux erreurs probables agiront donc sur les positions de ces deux astres par rapport aux étoiles de comparaison respectivement de 0″,0185 et de 0″,0558. Par conséquent il y a lieu de supposer que, malgré le soin voué à la détermination de la direction du mouvement diurne, l'erreur probable de cette détermination formera une fraction assez considérable de l'erreur probable totale des mesures des angles de position de 61 Cygni par rapport à son étoile de comparaison. Cependant il y faut encore considérer que la méthode, par laquelle je suis parvenu aux valeurs précédentes des erreurs probables de la direction du mouvement diurne, renferme les deux conditions: 1) que dans des périodes ordinairement de plusieurs semaines, la position des verniers du cercle de position, soit restée parfaitement constante par rapport à ce cercle; 2) qu'elle n'ait point changé d'un soir à l'autre, si même les angles horaires de l'observation avaient varié entre eux de deux à trois heures. En réalité ces conditions ne peuvent pas être remplies en toute rigueur, par suite des effets des différences de température, des petites variations de la situation du micromètre par rapport à la verticale, et par d'autres causes plus ou moins accidentelles. Il en faut conclure que les erreurs probables déduites plus haut, pour les déterminations de la direction du mouvement diurne, ont été trouvées considérablement plus fortes qu'elles ne conviennent effectivement à ces déterminations. Néanmoins nous avons

ici l'indication de la raison principale qui fait que, pour les plus grandes distances, l'exactitude des mesures de l'angle de position ne peut plus rivaliser avec celle des distances, tandis que dans les petites distances, les angles de position ont une petite prépondérance en exactitude sur les distances, comme nous l'avons vu dans l'exemple de α Lyrae. Cette prépondérance augmenterait encore considérablement pour les distances minimes des étoiles doubles physiques, si dans ces cas il n'y avait pas de raisons de soupçonner l'existence d'erreurs systématiques sur lesquelles l'attention des astronomes a déjà été attirée en d'autres occasions. Comme cette question n'est en aucune relation directe avec notre recherche actuelle, nous pouvons nous dispenser d'entrer ici dans les détails des recherches que nous avons faites sur cet objet. Je remarque seulement que les recherches faites sur des étoiles doubles artificielles, en indiquant l'existence d'erreurs systématiques très considérables dans les mesures micrométriques d'étoiles doubles de petite distance, ont prouvé en même temps que toute trace d'erreurs constantes ou systématiques disparaît dès que la distance des étoiles comparées s'élève au dessus de $12''$.

Je donnerai maintenant la liste de mes observations sur les relations entre 61 Cygni (*B*) et son étoile de comparaison, dans la même forme que je l'ai fait plus haut pour α Lyrae. Le grossissement employé a été toujours le même, de 207 fois.

61 Cygni et Comes (10).

Jour de l'observ.	Temps sid.	Tempér.	Coïncidence des fils	Distance en révolutions de la vis	Distance en secondes	Direction observée	Direction du mouvement diurne	Angle de position	Remarques.
1852 Août 18	21^h50^m	+12°,0	59,948	17r,169	167″,04	145°18′	282°48′	132°30′	
— 27	21 42	+ 8,3	59,406	17,166	167,03	145 4	282 50	132 14	Images ondulantes.
— 30	21 39	+10,9	59,897	17,157	166,93	145 14	282 48	132 26	
Sept. 7	21 43	+ 8,5	55,847	17,174	167,10	145 18	282 50	132 28	Diffusion des images.
— 18	21 50	+ 5,4	58,278	17,146	166,84	145 20	282 52	132 28	Images ondulantes.
— 28	20 20	+ 5,8	58,050	17,164	167,02	325 35	102 58	132 37	
Oct. 2	20 0	+ 6,3	57,575	17,160	166,98	325 27	102 58	132 29	
— 19	21 8	— 3,0	57,284	17,116	166,58	145 33	282 55	132 38	
Nov. 6	21 10	— 5,8	57,274	17,127	166,70	145 33	282 51	132 42	
— 7	21 5	— 9,5	58,919	17,137	166,82	145 30	282 50	132 40	Im. ond., l'étoile de compar. très faible.
— 12	21 24	—10,9	56,960	17,108	166,54	145 32	282 50	132 42	
— 27	20 59	— 6,4	54,401	17,122	166,65	145 36	282 51	132 45	
Déc. 10	21 37	—11,0	53,836	17,081	166,28	145 30	282 50	132 40	Images ondulantes et diffuses.
1853 Jan. 22	1 10	—10,6	53,832	17,034	165,82	145 52	282 52	133 0	
— 27	1 55	—13,7	54,931	17,045	165,93	145 47	282 53	132 54	Images ondulantes.
— 31	2 3	— 8,2	56,103	17,047	165,93	145 51	282 51	133 0	Images ondulantes et diffuses.
Févr. 2	2 47	— 6,0	57,286	17,045	165,90	145 54	282 54	133 0	
— 5	2 52	— 9,8	58,417	17,047	165,93	145 55	282 54	133 1	Images ondulantes.
— 6	3 0	— 9,2	58,420	17,060	166,06	146 0	282 52	133 8	Images ondulantes.

Jour de l'observ.	Temps sid.	Tempér.	Coïncidence des fils	Distance en révolutions de la vis	Distance en secondes	Direction observée	Direction du mouvement diurne	Angle de position	Remarques.
1853 Févr. 7	3^h28^m	— 9°,4	58,470	17′,002	165″,49	145°55′	282°54′	133° 1′	Images ondulantes et diffuses.
Mars 7	13 12	— 6,4	58,770	17,002	165,48	326 7	102 57	133 10	Images très ond., des nuages s'élèvent.
— 20	14 2	—12,0	58,818	17,005	165,53	326 19	102 56	133 23	
Avr. 2	13 40	— 7,2	58,166	16,958	165,06	326 27	102 54	133 33	Obs. sûre.
— 4	14 1	— 6,9	57,416	17,039	165,84	326 26	102 56	133 30	
— 20	14 2	— 1,1	54,917	16,991	165,36	326 36	102 54	133 42	Im. très ondulantes.
— 27	15 28	+ 3,4	59,275	17,014	165,57	326 30	102 53	133 37	Images ondulantes.
Mai 9	15 15	+ 5,2	57,956	17,002	165,43	326 42	102 55	133 47	
— 24	15 59	+ 6,3	56,763	17,031	165,72	326 46	102 52	133 54	
— 26	15 49	+ 9,0	55,512	17,027	165,67	326 46	102 56	133 50	
— 27	16 23	+14,0	57,909	17,051	165,88	326 48	102 56	133 52	
Juin 13	17 21	+13,3	55,534	17,036	165,74	326 55	102 56	133 59	
— 21	17 45	+12,6	58,194	17,042	165,80	326 58	103 3	133 55	Observations troublées par le vent.
Juil. 8	18 22	+11,1	59,091	16,981	165,22	327 7	103 2	134 5	Images ondulantes.
— 14	18 12	+11,2	56,959	17,051	165,90	327 9	103 3	134 6	Diffusion des images.
— 19	18 40	+13,2	58,168	17,082	166,18	327 11	103 0	134 11	
Août 9	19 21	+12,1	56,958	17,044	165,83	327 12	102 59	134 13	
— 11	21 21	+10,8	57,585	17,065	166,03	147 2	282 47	134 15	
Sept. 8	22 49	+ 8,2	57,466	17,065	166,04	146 57	282 56	134 1	
— 17	19 45	+ 6,2	59,400	17,086	166,24	327 9	102 59	134 10	

Le grand mouvement propre de 61 Cygni se prononce, dans les observations précédentes, principalement par un changement considérable de l'angle de position, qui s'élève à environ 2° pour les époques les plus éloignées entre elles de nos observations, tandis que le changement de la distance n'est comparativement que très petit. Par cette raison, pour avoir égard aux petites variations que devait subir l'effet de la réfraction sur les relations observées par le changement même de ces relations, nous devions calculer la réfraction pour les deux valeurs extrêmes des angles observés 132° 15′ et 134° 15′ et en déduire par une simple interpolation, les valeurs correspondant à chaque angle intermédiaire, Les valeurs extrêmes des distances observées, ne s'éloignent qu'une seule fois, le 2 Avril 1853, de la distance moyenne 166″,2 de toute une seconde. Dans ce cas les réfractions en distance auraient dû subir un changement de leur $^1/_{150}$me partie, quantité parfaitement négligeable, même pour les plus fortes réfractions dont les relations sont affectées. C'est donc avec la valeur constante de la distance = 166″,2 et les deux valeurs de l'angle de position $P = 132° 15′$, $P' = 134° 15$, que j'ai calculé la table suivante des corrections à ajouter aux relations observées, pour les délivrer de l'effet de la réfraction.

*

Angle horaire	Correction de la distance		Correction de l'angle de position	
	$P=132°\,15'$	$P'=134°\,15'$	$P=132°\,15'$	$P'=134°\,15'$
$-\ 8^h\ 0^m$	$+0,''360$	$+0,''368$	$-0'{,}64$	$-0'{,}84$
7 30	+0,293	+0,298	−0,83	−0,99
7 0	+0,235	+0,238	−0,85	−0,98
6 30	+0,192	+0,194	−0,79	−0,89
6 0	+0,158	+0,160	−0,69	−0,77
5 30	+0,132	+0,133	−0,58	−0,64
5 0	+0,113	+0,114	−0,48	−0,52
4 30	+0,098	+0,099	−0,38	−0,41
4 0	+0,085	+0,086	−0,29	−0,32
3 30	+0,076	+0,076	−0,22	−0,24
3 0	+0,069	+0,069	−0,16	−0,17
2 30	+0,064	+0,064	−0,10	−0,11
2 0	+0,059	+0,059	−0,05	−0,06
1 30	+0,056	+0,056	−0,01	−0,02
1 0	+0,053	+0,053	+0,02	+0,01
− 0 30	+0,051	+0,051	+0,05	+0,05
0 0	+0,049	+0,050	+0,08	+0,08
+ 0 30	+0,048	+0,049	+0,11	+0,11
1 0	+0,047	+0,048	+0,13	+0,13
1 30	+0,046	+0,047	+0,15	+0,16
2 0	+0,046	+0,047	+0,18	+0,19
2 30	+0,046	+0,046	+0,22	+0,24
3 0	+0,046	+0,046	+0,28	+0,30
3 30	+0,046	+0,046	+0,35	+0,37
4 0	+0,046	+0,046	+0,45	+0,48
4 30	+0,046	+0,046	+0,59	+0,62
5 0	+0,046	+0,047	+0,77	+0,82
5 30	+0,047	+0,047	+1,03	+1,09
6 0	+0,047	+0,048	+1,39	+1,47
6 30	+0,049	+0,050	+1,90	+2,01
7 0	+0,052	+0,054	+2,61	+2,74
7 30	+0,058	+0,062	+3,59	+3,76
+ 8 0	+0,069	+0,076	+4,84	+5,06

L'époque moyenne de mes observations est de très près le 27 Févr. 1853. Pour cette époque nous avons la position moyenne du milieu entre l'étoile *B* et l'étoile de comparaison, approximativement

$$\mathcal{R} = 21^h\,0^m\,24^s;\ \text{Décl.} = +38°\,0'\,51''.$$

Avec ces données, la réduction des angles de position pour l'effet de la précession s'exprime par $+0'{,}300\ (t-T)$. L'effet de la nutation est encore parfaitement négligeable dans ce cas. L'effet de l'aberration, au contraire, surpasse dans ce cas celui de la préces-

sion et ne doit plus être négligé. Il se calcule très simplement à l'aide des formules données par Bessel dans ses «Astronomische Untersuchungen» Vol. II, pag. 208. Mais la déduction de ces formules telle qu'elle est donnée par Bessel est assez compliquée et il paraît qu'on peut les obtenir par une voie beaucoup plus simple. Voici une déduction qui m'a été communiquée par M. Döllen et qui ne paraît pas céder à l'autre par rapport à l'élégance.

L'action de l'aberration, $d\alpha$ et $d\delta$, sur la position d'une étoile quelconque s'exprime, en y conservant les notations du «Nautical Almanac», par les formules connues:

$$d\alpha = Aa + Bb$$
$$d\delta = Aa' + Bb'$$

où $A = -20''{,}420 . \cos\omega \cos\odot$ $\qquad B = -20''{,}420 . \sin\odot$

$a = \cos\alpha \sec\delta$ $\qquad b = \sin\alpha \sec\delta$

$a' = \operatorname{tang}\omega \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta$ $\qquad b' = \cos\alpha \sin\delta$

Désignons maintenant les coordonnées relatives des deux étoiles comparées, exprimées en secondes du grand arc, dans le sens de l'ascension droite par λ, de la déclinaison par μ et nous aurons avec une exactitude suffisante:

$$\lambda = \cos\delta . \Delta\alpha \qquad e^2 = \lambda^2 + \mu^2$$
$$\mu = \Delta\delta \qquad \operatorname{tg} P = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ étant les différences en ascension droite et déclinaison, e et P la distance et l'angle de position, et δ la déclinaison de l'une ou de l'autre des deux étoiles ou bien du milieu entre elles.

Maintenant, par l'effet de l'aberration toutes ces quantités recoivent de petits changements dont les relations s'expriment par les formules:

$$d\lambda = \cos\delta . d(\Delta\alpha) - \sin\delta . \Delta\alpha . d\delta \sin 1'' \qquad ede = \lambda d\lambda + \mu d\mu$$
$$d\mu = \qquad d(\Delta\delta) \qquad e^2 \sin 1'' . dP = \mu d\lambda - \lambda d\mu$$

le Δ signifiant toujours la variation d'une étoile à l'autre, le d la variation due à l'action de l'aberration. Mais comme en toute rigueur

$$d(\Delta\alpha) = \Delta(d\alpha) = A\Delta a + B\Delta b$$
$$d(\Delta\delta) = \Delta(d\delta) = A\Delta a' + B\Delta b'$$

nous aurons

$$d\lambda = A[\cos\delta . \Delta a - a' \sin\delta . \Delta\alpha \sin 1''] + B[\cos\delta . \Delta b - b' \sin\delta . \Delta\alpha \sin 1'']$$
$$d\mu = A\Delta a' + B\Delta b'$$

Les quantités Δa, Δb, $\Delta a'$ et $\Delta b'$ se trouvent par la différentiation des expressions pour a, b, a', b' de sorte que:

$$\Delta a = -\sec\delta \sin\alpha . \Delta\alpha \sin 1'' + \sec\delta \operatorname{tg}\delta \cos\alpha . \Delta\delta \sin 1''$$
$$\Delta b = \sec\delta \cos\alpha . \Delta\alpha \sin 1'' + \sec\delta \operatorname{tg}\delta \sin\alpha . \Delta\delta \sin 1''$$
$$\Delta a' = -\sin\delta \cos\alpha . \Delta\alpha \sin 1'' - (\operatorname{tg}\omega \sin\delta + \cos\delta \sin\alpha) \Delta\delta \sin 1''$$
$$\Delta b' = -\sin\delta \sin\alpha . \Delta\alpha \sin 1'' + \cos\delta \cos\alpha . \Delta\delta \sin 1''$$

En substituant ces valeurs, dans les expressions pour $d\lambda$ et $d\mu$, après avoir introduit λ et μ au lieu de $\Delta\alpha \cos\delta$ et de $\Delta\delta$, et en mettant

$$\varkappa = -(\operatorname{tg}\omega \sin\delta + \cos\delta \sin\alpha)$$

nous parvenons à

$$d\lambda = A \sin 1''[\lambda . \varkappa + \mu \operatorname{tg}\delta \cos\alpha] + B \sin 1''[\lambda \cos\delta \cos\alpha + \mu \operatorname{tg}\delta \sin\alpha]$$
$$d\mu = A \sin 1''[\mu . \varkappa - \lambda \operatorname{tg}\delta \cos\alpha] + B \sin 1''[\mu \cos\delta \cos\alpha - \lambda \operatorname{tg}\delta \sin\alpha]$$

Il ne reste donc qu'à faire entrer ces expressions de $d\lambda$ et $d\mu$ dans les équations précédentes pour ede et $e^2 \sin 1''. dP$ et de diviser ensuite les deux équations respectivement par e et $e^2 \sin 1''$. Cette opération exécutée nous trouvons:

$$de = A\varkappa . e \sin 1'' + B \cos\delta \cos\alpha . e \sin 1''$$
$$dP = A \operatorname{tg}\delta \cos\alpha + B \operatorname{tg}\delta \sin\alpha$$

équations identiques avec celles de Bessel.

La dernière équation nous donne dP exprimé en secondes. Nos mesures nous donnent les P en minutes et fractions de la minute; d'où il suit que nous devons diviser les valeurs de dP par 60, pour les avoir exprimées dans la même unité.

Avec cela, en appliquant les formules à notre exemple de 61 Cygni, nous trouvons

$$de = [6{,}3668]A + [6{,}6528]B$$
$$dP = [7{,}9651]A + [7{,}9636n]B$$

où les quantités enfermées en parenthèses sont les logarithmes des valeurs numériques correspondantes. Les valeurs de Log. A et Log. B étant données, pour chaque jour, dans le «Nautical Almanac», les quantités de et dP, ou les corrections $-de$ et $-dP$ à ajouter aux relations observées, se calculent très facilement. Dans notre cas ces corrections, s'élèvent au maximum pour les distances à $\pm 0''{,}010$, pour les angles de position à $\pm 0'{,}26$ ou à $\pm 0''{,}013$ en secondes du grand arc.

Pour α Lyrae ces quantités auraient été trouvées par

$$de = [6{,}0413n]A + [5{,}3645]B$$
$$dP = [7{,}2652]A + [8{,}1203n]B$$

ou les corrections auraient atteint au maximum les valeurs de $\pm 0''{,}0021$ pour les distances et de $\pm 0'{,}27$ pour les angles de position. La dernière quantité exprimée en secondes du grand arc, équivaut à $\pm 0''{,}0035$. La petitesse extrême de ces quantités justifie entièrement que, pour α Lyrae, nous avons négligé les corrections dues à l'effet de l'aberration.

Le catalogue de M. Argelander «DLX stellarum fixarum positiones mediae ineunte anno 1830» donne le mouvement propre considérablement différent pour les deux étoiles qui composent le système de 61 Cygni. Cette différence provient, abstraction faite des erreurs accidentelles des observations, du mouvement des deux étoiles dans l'orbite autour de leur centre commun de gravité. Le mouvement propre donné dans l'ouvrage de mon père «Stellarum fixarum imprimis compositarum positiones mediae» vaut pour le milieu entre les deux étoiles. La quantité qu'il trouve est de très près la moyenne entre les deux valeurs de M. Argelander, dont elle ne diffère que de 0″,018 en *A* et de 0″,004 en Décl. Il était donc indifférent laquelle des deux déterminations nous employions dans notre recherche. Comme nos mesures se rapportent toutes à l'étoile *B*, c'était évidemment le mouvement propre du système, augmenté du mouvement de l'étoile *B* dans son orbite, à l'aide duquel il fallait exécuter la réduction de nos observations à leur époque moyenne. Cette quantité étant directement donnée dans le catalogue de M. Argelander, c'est d'elle que je me suis servi dans les réductions.

Pour l'étoile *B* le catalogue de M. Argelander donne

le mouvement propre en *A* = + 0″,3462 = + 5″,193
» » » en Décl. = + 3″,016

Avec ces données nous parvenons aux formules suivantes de réduction:

en distance, réd. = + 0″,912 $(t-T)$ − 0″,076 $(t-T)^2$
en angle de position, réd. = − 103′,45 $(t-T)$ − 0′,57 $(t-T)^2$

où t est le temps exprimé en fractions de l'année, écoulé depuis l'époque moyenne T = 1853 Févr. 27,0.

En ajoutant, aux relations observées, ces réductions et les corrections pour l'effet de la réfraction, de la précession et de l'aberration, nous parvenons à la table suivante des relations de l'étoile de comparaison à *B*, réduites à l'époque moyenne et correspondantes à l'équinoxe apparent de cette époque.

Jour de l'observation	Distance réd. à 1853 Fév. 27,0	Angle de position réd. à 1853 Fév. 27,0
1852 Août 18	166″,585	133° 24′,1
— 27	166,599	133 5,5
— 30	166,506	133 16,7
Sept. 7	166,697	133 16,5
— 18	166,464	133 13,4
— 28	166,675	133 19,6
Oct. 2	166,645	133 10,5
— 19	166,285	133 14,8
Nov. 6	166,451	133 13,9
— 7	166,573	133 11,6
— 12	166,305	133 12,2
— 27	166,455	133 11,0
Déc. 10	166,118	133 2,5
1853 Janv. 22	165,770	133 10,9
— 27	165,895	133 3,7
— 31	165,905	133 8,6
Févr. 2	165,881	133 8,5
— 5	165,919	133 8,7
— 6	166,052	133 15,5
— 7	165,487	133 8,7
Mars 7	165,839	133 7,0
— 20	165,824	133 16,2
Avr. 2	165,426	133 22,5
— 4	166,172	133 18,9
— 20	165,734	133 26,3
— 27	165,861	133 19,6
Mai 9	165,762	133 26,1
— 24	166,057	133 28,9
— 26	166,019	133 24,3
— 27	166,212	133 26,2
Juin 13	166,089	133 28,4
— 21	166,160	133 22,2
Juil. 8	165,612	133 27,4
— 14	166,306	133 26,7
— 19	166,593	133 30,4
Août 9	166,284	133 26,5
— 11	166,480	133 28,0
Sept. 8	166,548	133 6,2
— 17	166,776	133 12,5

Les équations de condition que je vais établir maintenant, contiennent les mêmes inconnues que pour α Lyrae. Aussi les coefficients de ces inconnues ont été calculés

d'après les mêmes règles, à la seule exception près que les coefficients de la parallaxe ont été multipliés encore par le rayon vecteur du Soleil correspondant à chaque jour d'observation. Dans le cas de α Lyrae ce facteur pouvait être négligé comme d'aucune conséquence, mais ici à cause de la parallaxe évidemment beaucoup plus forte, il peut déjà exercer, dans la valeur à déduire, une influence sur les centièmes de seconde.

Dans le calcul des coefficients et l'établissement des équations de condition, je suis parti des données suivantes.

Époque moyenne $T = 1853$ Févr. 27,0

$\varepsilon = 166''{,}200$

$\Pi = 133^\circ 15',0$

Position de l'étoile *B*. $\alpha = 21^h 0^m,3$, $\delta = +38^\circ 1',8$

Avec ces données nous trouvons:

$L = 334^\circ 35',3$, $B = +51^\circ 51',9$, $Q = 160^\circ 24',7$

$u = +0{,}978$; $v = +0{,}813$

$U = 260^\circ 14'$; $V = 178^\circ 56'$

Il s'en suit qu'en général les coefficients de la parallaxe seront un peu plus forts dans les équations fournies par les angles de position que dans celles qui nous seront offertes par les distances. Sous ce point de vue, si toutes les conditions de l'observation étaient également bien remplies pour les deux coordonnées, les angles de position auraient donc, dans ce cas, une prépondérance marquée sur les distances, pour la déduction de la parallaxe.

Les valeurs de *U* et *V* nous indiquent que, par l'effet de la parallaxe,

le maximum de la distance doit avoir eu lieu le 21 Sept.
le minimum » » » » » » » le 19 Mars
le maximum de l'angle de position » » » le 10 Juin
le minimum » » » » » » » le 11 Déc.

époques qui en effet s'accordent à merveille avec les données du tableau précédent.

Équations de condition fournies par les distances.

Jour de l'observation				Erreurs des éq.$= v$
1852 Août 18	$d\varepsilon - 0{,}527\, d\eta + 0{,}442 \times + 0{,}691\, \pi = +0''{,}385$			$-0''{,}046$
— 27	$-0{,}502$	$+0{,}334$	$+0{,}749$	$+0{,}399$	$-0{,}034$
— 30	$-0{,}494$	$+0{,}296$	$+0{,}764$	$-0{,}306$	$+0{,}065$
Sept. 7	$-0{,}473$	$+0{,}191$	$+0{,}796$	$+0{,}497$	$-0{,}113$
— 18	$-0{,}442$	$+0{,}041$	$+0{,}815$	$+0{,}264$	$+0{,}125$
— 28	$-0{,}415$	$-0{,}097$	$+0{,}808$	$+0{,}475$	$-0{,}094$

Jour de l'observation					Erreurs des éq.= v
1852 Oct. 2	$d\xi$ —0,404	$d\eta$ —0,152	$\varkappa$ +0,799	π = +0″,445	—0″,070
— 19	—0,358	—0,376	+0,717	+0,085	+0,241
Nov. 6	—0,309	—0,580	+0,564	+0,251	—0,010
— 7	—0,306	—0,590	+0,554	+0,373	—0,138
— 12	—0,292	—0,637	+0,500	+0,105	+0,102
— 27	—0,251	—0,747	+0,318	+0,255	—0,145
Déc. 10	—0,216	—0,801	+0,141	—0,082	+0,100
1853 Janv. 22	—0,098	—0,677	—0,444	—0,430	+0,150
— 27	—0,084	—0,634	—0,502	—0,305	—0,004
— 31	—0,073	—0,597	—0,545	—0,295	—0,035
Févr. 2	—0,068	—0,577	—0,566	—0,319	—0,021
— 5	—0,060	—0,545	—0,596	—0,281	—0,073
— 6	—0,057	—0,534	—0,605	—0,148	—0,211
— 7	—0,054	—0,523	—0,614	—0,713	+0,348
Mars 7	+0,024	—0,163	—0,792	—0,361	—0,086
— 20	+0,059	+0,020	—0,811	—0,376	—0,077
Avr. 2	+0,094	+0,200	—0,789	—0,774	+0,335
— 4	+0,100	+0,226	—0,782	—0,028	—0,406
— 20	+0,144	+0,428	—0,695	—0,466	+0,080
— 27	+0,163	+0,508	—0,640	—0,339	—0,017
Mai 9	+0,196	+0,625	—0,526	—0,438	+0,142
— 24	+0,237	+0,735	—0,353	—0,143	—0,063
— 26	+0,242	+0,746	—0,328	—0,181	—0,012
— 27	+0,245	+0,752	—0,315	+0,012	—0,199
Juin 13	+0,292	+0,809	—0,089	—0,111	+0,039
— 21	+0,313	+0,813	+0,020	—0,040	+0,024
Juil. 8	+0,360	+0,775	+0,250	—0,588	+0,687
— 14	+0,376	+0,747	+0,327	+0,106	+0,031
— 19	+0,390	+0,718	+0,389	+0,393	—0,226
Août 9	+0,447	+0,543	+0,614	+0,084	+0,192
— 11	+0,453	+0,521	+0,632	+0,280	+0,005
Sept. 8	+0,530	+0,181	+0,798	+0,348	+0,010
— 17	+0,554	+0,060	+0,815	+0,576	—0,212

Equations de condition fournies par les angles de position.

Jour de l'observation					Erreurs des éq.= w
1852 Août 18	$\overline{dH}$ —0,527	$d\sigma$ —0,892	$\varkappa$ +0,406	π = +0″,442	—0″,111
— 27	—0,502	—0,943	+0,265	—0,462	+0,724
— 30	—0,494	—0,955	+0,216	+0,083	+0,154

Jour de l'observation					Erreurs des éq. = w
1852 Sept. 7	$\overline{dII}$ —0,473	$\overline{d\sigma}$ —0,975 ×	+0,084 π =	+0″,073	+0″,098
— 18	—0,442	—0,973	—0,099	—0,078	+0,156
— 28	—0,415	—0,943	—0,262	+0,224	—0,229
Oct. 2	—0,404	—0,923	—0,326	—0,219	+0,181
— 19	—0,358	—0,789	—0,576	—0,010	—0,159
Nov. 6	—0,309	—0,572	—0,786	—0,053	—0,233
— 7	—0,306	—0,558	—0,795	—0,165	—0,125
— 12	—0,292	—0,486	—0,840	—0,136	—0,180
— 27	—0,251	—0,248	—0,933	—0,194	—0,179
Déc. 10	—0,216	—0,025	—0,963	—0,604	+0,209
1853 Janv. 22	—0,098	+0,659	—0,712	—0,198	—0,103
— 27	—0,084	+0,721	—0,651	—0,545	+0,271
— 31	—0,073	+0,766	—0,600	—0,309	+0,058
Févr. 2	—0,068	+0,787	—0,573	—0,314	+0,076
— 5	—0,060	+0,817	—0,531	—0,305	+0,087
— 6	—0,057	+0,826	—0,517	+0,024	—0,235
— 7	—0,054	+0,836	—0,502	—0,303	+0,098
Mars 7	+0,024	+0,977	—0,048	—0,385	+0,400
— 20	+0,059	+0,963	+0,171	+0,058	+0,066
Avr. 2	+0,094	+0,901	+0,381	+0,359	—0,128
— 4	+0,100	+0,888	+0,412	+0,188	+0,058
— 20	+0,144	+0,744	+0,639	+0,544	—0,179
— 27	+0,163	+0,663	+0,725	+0,221	+0,190
Mai 9	+0,196	+0,505	+0,847	+0,534	—0,057
— 24	+0,237	+0,281	+0,950	+0,670	—0,133
— 26	+0,242	+0,249	+0,959	+0,448	+0,093
— 27	+0,245	+0,233	+0,963	+0,540	+0,004
Juin 13	+0,292	—0,042	+0,993	+0,646	—0,077
— 21	+0,313	—0,172	+0,979	+0,347	+0,219
Juil. 8	+0,360	—0,433	+0,892	+0,596	—0,064
— 14	+0,376	—0,518	+0,843	+0,565	—0,055
— 19	+0,390	—0,586	+0,796	+0,744	—0,255
Août 9	+0,447	—0,819	+0,542	+0,555	—0,185
— 11	+0,453	—0,837	+0,513	+0,626	—0,262
Sept. 8	+0,530	—0,976	+0,071	—0,425	+0,563
— 17	+0,554	—0,975	—0,077	—0,121	+0,184

En attribuant de nouveau le poids $^1/_2$ aux équations fournies par des mesures faites dans des circonstances atmosphériques moins favorables, telles qu'elles sont indiquées dans notre tableau des observations (pag. 34), la résolution des équations précédentes d'après la méthode des moindres carrés, nous mène aux équations finales suivantes.

Équations finales

a) par les distances

$$\begin{aligned}
32{,}00\,d\varepsilon + 0{,}12\,d\eta + 3{,}22\,\varkappa + 3{,}30\,\pi &= +0''{,}512\\
0{,}12\,d\varepsilon + 3{,}49\,d\eta + 3{,}05\,\varkappa - 1{,}66\,\pi &= -0{,}864\\
3{,}22\,d\varepsilon + 3{,}05\,d\eta + 9{,}29\,\varkappa + 0{,}41\,\pi &= +0{,}245\\
3{,}30\,d\varepsilon - 1{,}66\,d\eta + 0{,}41\,\varkappa + 11{,}91\,\pi &= +5{,}992
\end{aligned}$$

b) par les angles de position

$$\begin{aligned}
32{,}00\,\overline{d\Pi} + 0{,}12\,\overline{d\sigma} - 4{,}45\,\varkappa + 3{,}44\,\pi &= +4''{,}373\\
0{,}12\,\overline{d\Pi} + 3{,}49\,\overline{d\sigma} + 1{,}40\,\varkappa + 3{,}92\,\pi &= +1{,}822\\
-4{,}45\,\overline{d\Pi} + 1{,}40\,\overline{d\sigma} + 17{,}30\,\varkappa - 0{,}04\,\pi &= -1{,}073\\
3{,}44\,\overline{d\Pi} + 3{,}92\,\overline{d\sigma} - 0{,}04\,\varkappa + 13{,}40\,\pi &= +6{,}870
\end{aligned}$$

d'où nous déduisons, par élimination, les valeurs suivantes des inconnues cherchées:

a) par les distances

$d\varepsilon = -0''{,}0391$	avec le poids	29,91	et l'erreur probable	$0''{,}0186$
$d\eta = -0{,}0272$	»	»	»	2,21	»	»	»	0,0769
$\varkappa = +0{,}0264$	»	»	»	6,10	»	»	»	0,0463
$\pi = +0{,}5092$	»	»	»	10,40	»	»	»	0,0355

b) par les angles de position

$\overline{d\Pi} = +0''{,}0775$	avec le poids	29,85	et l'erreur probable	$0''{,}0250$
$\overline{d\sigma} = -0{,}0276$	»	»	»	2,22	»	»	»	0,0916
$\varkappa = -0{,}0389$	»	»	»	15,96	»	»	»	0,0342
$\pi = +0{,}5008$	»	»	»	8,57	»	»	»	0,0466

La substitution de ces valeurs dans les équations de condition donne l'erreur probable pour l'unité du poids, c'est à dire l'erreur probable qui convient à des mesures faites par des conditions favorables, pour les distances $= 0''{,}1144$, pour les angles de position $= 0''{,}1365$. L'exactitude des distances mesurées, surpasse donc ici celle des angles de position. Cette augmentation de l'erreur probable pour les angles doit être attribuée en grande partie, comme nous l'avons expliqué plus haut, à l'influence plus forte qu'exercent ici les petites incertitudes dans la détermination de la direction du mouvement diurne. Ces incertitudes ont été évaluées par nous (pag. 33) à $\pm 0''{,}0558$. En soustrayant cette quantité de l'erreur probable totale, nous avons l'erreur probable qui convient à une direction mesurée par $\sqrt{0{,}1365^2 - 0{,}0558^2} = 0''{,}1246$, de très près égale à celle des distances.

Il est bien remarquable que, malgré le coefficient en général plus fort de la parallaxe dans les équations fournies par les angles de position, le poids de π soit trouvé plus petit dans celles-ci, que dans les équations obtenues par les distances. Cela provient, à ce qui paraît, principalement de la circonstance que le minimum de la parallaxe en angle de po-

sition tombe sur le mois de Décembre, saison très peu favorable aux observations astronomiques dans notre climat, tandis que soit le maximum, soit le minimum de la parallaxe en distance correspondent aux saisons les plus favorables des mois de Mars et de Septembre.

Les deux valeurs de π, que nous avons déduites sont d'un accord qui ne laisse rien à désirer et celles de $\varkappa$, $d\eta$ et $\overline{d\sigma}$ sont si petites vis à vis de leurs erreurs probables que nous devons les regarder comme provenues uniquement des erreurs accidentelles des observations. Nous avons donc ici un indice très favorable que nos observations sont entièrement libres de toute erreur systématique ou périodique. A côté du résultat gagné pour la parallaxe de 61 Cygni, cette recherche nous fournit ainsi de nouveau la conviction intime que toutes les parallaxes relatives que nous déduirons par les mêmes moyens et d'après les mêmes méthodes d'observation, seront également à l'abri de toute objection sérieuse.

En réunissant maintenant les deux valeurs de π, nous avons pour résultat définitif de nos mesures, la différence des parallaxes de 61 Cygni et de son étoile de comparaison

$$\pi = +0''{,}5060 \text{ avec l'erreur probable } 0''{,}0282.$$

Les deux valeurs de $\varkappa$ réunies donnent en moyenne

$$\varkappa = -0''{,}0158 \text{ avec l'erreur probable } 0''{,}0275.$$

Nos observations n'indiquent donc, dans ce cas, aucune trace d'une différence dans la constante de l'aberration pour les deux étoiles comparées.

En ajoutant $d\varepsilon$ à la valeur de ε, dont nous sommes partis, nous avons, pour l'époque moyenne de nos observations, 1853 Févr. 27,0, la distance entre les deux astres comparés

$$\varepsilon = 166''{,}161 \text{ avec l'erreur probable } 0''{,}0186$$

à l'aide de laquelle nous devons convertir les valeurs de $\overline{d\Pi}$ et de son erreur probable, données en secondes du grand arc, dans les minutes correspondantes de l'angle de position. Ce calcul exécuté, nous avons pour la même époque:

$$d\Pi = +1'{,}60 \text{ avec l'erreur probable } 0'{,}52$$

et par conséquent

$$\Pi = 133^\circ\,16'{,}60 \text{ avec l'erreur probable } 0'{,}52.$$

Afin d'avoir les relations pour le commencement de l'année 1853, nous devons ajouter à la distance moyenne la réduction $+0''{,}144$ pour l'effet du mouvement propre, et à l'angle de position les réductions $+0'{,}032$ pour précession et nutation et $-16'{,}13$ pour le mouvement propre. Avec cela nous avons, pour le commencement de l'année 1853, la distance $= 166''{,}305$, l'angle de position $133^\circ\,0'{,}50$, où le dernier se rapporte à l'équinoxe moyen du 1 Janvier.

Quant au mouvement propre relatif des deux astres comparés, les corrections trouvées sont si petites et d'autant inférieures à leurs erreurs probables, qu'elles ne servent qu'à indiquer tout au plus que le mouvement propre de l'étoile de comparaison a été réellement

imperceptible dans le courant de nos observations. Il n'y a donc pas lieu d'appliquer ces corrections aux valeurs qui nous ont servi dans nos réductions, et qui probablement sont beaucoup plus exactes, qu'elles ne pourraient ressortir de notre recherche.

---

4. **Comparaison des parallaxes trouvées avec les résultats des déterminations antérieures.**

Nous possédons, pour chacune des étoiles en question, deux déterminations antérieures de la parallaxe, qui, par les soins voués à la recherche, par la qualité des instruments employés et par la supériorité des méthodes d'observation, peuvent prétendre à concourir avec nos déterminations dans l'établissement des valeurs définitives de cette quantité. Ce sont pour α Lyrae les travaux exécutés par mon père à Dorpat (1835—1838) et par M. Peters à Poulkova (1842—43), pour 61 Cygni ceux de Bessel et Schlüter à Königsberg (1837—40) et de M. Peters à Poulkova (1842—43).

Considérons d'abord le résultat trouvé par mon père pour la parallaxe de α Lyrae. Ses observations et les résultats qu'il en a déduits, sont consignés dans son Mémoire «Additamentum in Mensuras micrometricas stellarum duplicium» présenté à l'Académie en 1839. Après avoir rejeté les mesures des angles de position, comme sujettes à de graves objections surtout par rapport à la détermination de la direction du mouvement diurne, mon père trouve, par les distances seules, la parallaxe $= +0''{,}2613$ avec l'erreur probable $= 0''{,}0254$. Ce résultat diffère du nôtre de $+0''{,}1125$, tandis que, d'apres les lois de la probabilité, la différence à laquelle il fallait s'attendre dans les résultats des deux déterminations, n'aurait dû être que de $0''{,}0401$ ou 2,8 fois plus petite qu'elle se trouve effectivement.

L'augmentation de la différence des deux résultats doit être attribuée, probablement, en grande partie à une accumulation extraordinaire d'erreurs accidentelles dans la détermination de Dorpat, et cela peut-être principalement par la raison, que mon père, dans la résolution des équations de condition, ne leur a pas assigné de différents poids d'après les conditions plus ou moins favorables des observations. Les journaux originaux d'observation de mon père, que j'ai eu l'occasion de consulter, ne contiennent presque aucune indication sur les conditions des observations, si ce n'est exceptionellement la remarque que telle mesure mérite une confiance particulière. Il ne se trouve pas un seul cas où l'observation soit interrompue ou qu'elle soit omise dans les calculs à cause du mauvais état des images. Par ces raisons nous devons conclure que les mesures de mon père, étant faites dans toutes les conditions possibles, ne peuvent prétendre toutes au même degré d'exactitude.

Faute de renseignements plus exacts sur les conditions des différentes observations, nous nous voyons hors d'état de leur assigner même approximativement des poids convenables, et nous sommes obligés, comme cela a été fait par mon père lui-même, de les

estimer toutes de la même valeur. Mais pour apprécier l'influence que de différents poids pourraient exercer sur le résultat, il suffit de dire qu'en donnant le poids 0 à trois observations seulement, c'est à dire en les rejetant entièrement, la parallaxe à déduire n'offrirait plus une différence de notre valeur, qui surpasserait l'attente légitime d'après les erreurs probables.

Une autre objection qui regarde également les poids des observations, mais qui dans l'application n'est d'aucune conséquence, me paraît devoir être élevée encore contre la méthode de calcul suivie par mon père. Dans la seconde année de ses observations et plus tard, M. W. Struve a fait généralement chaque nuit deux séries de mesures sur α Lyrae, qui se suivaient presque immédiatement l'une après l'autre. L'intervalle de temps qui les séparait ne s'étendait au delà de quelques minutes, employées pour ajuster de nouveau le foyer de la lunette. Les résultats obtenus par ces deux séries furent supposés par mon père comme entièrement indépendants l'un de l'autre et fournissaient ainsi, dans ses calculs, deux équations distinctes. Il y a cependant des circonstances qui s'opposent plus ou moins à la justesse de cette supposition. L'expérience nous prouve que bien souvent, pendant toute une nuit ou au moins pendant certaines périodes de la même nuit, l'oeil de l'observateur est disposé à mesurer toutes les distances ou un peu trop grandes ou un peu trop petites et cette disposition est encore favorisée si, comme dans notre cas, l'éclat de l'une des étoiles comparées est incomparablement plus vif que celui de l'autre. En outre le lieu de la coïncidence des fils n'ayant pas été altéré, dans l'intervalle entre les deux séries de mesures, l'esprit de l'observateur était préoccupé dans la seconde série par les nombres obtenus dans la première observation. Enfin toute autre cause troublante, comme p. ex. la température, la friction ou la pesanteur devait exercer de très près le même effet, quoique probablement en général très peu sensible, sur les résultats offerts par les deux séries. Par ces raisons il paraît inadmissible de regarder les résultats des deux séries d'observations, faites par mon père pendant les mêmes nuits immédiatement l'une après l'autre, comme entièrement indépendants l'un de l'autre. Chaque nuit ne devait fournir qu'une seule équation. Cela posé le nombre des équations de Dorpat diminue de 96 à 58. C'est qu'il y a 21 jours où mon père n'a fait qu'une seule, 36 où il a fait deux et un jour où il a exécuté même trois séries d'observations de suite. Presque tous les 21 jours où il n'y a eu qu'une seule observation tombent sur des périodes dans lesquelles le coefficient de la parallaxe en distance a été très petit. C'est pourquoi l'augmentation des poids que gagnent, par la méthode proposée de calcul, les équations fournies par les observations de ces jours, n'agit que très peu sur la valeur de la parallaxe. En effet la résolution des 58 équations restantes nous conduit à la parallaxe $\pi = +0''{,}2575$ avec l'erreur probable $0''{,}0299$, valeur presque identique avec celle qu'avaient fournie les 96 équations de mon père.

Dans ce calcul nous avons supposé, que le mouvement propre relatif des deux astres soit exactement égal à celui de α Lyrae en sens absolu, tel qu'il est déterminé par M. Argelander. La justesse de cette supposition, dans des limites très restreintes, étant prouvée par

les observations de Poulkova, nous n'hésitons pas de regarder la parallaxe telle que nous la venons de donner, comme le résultat définitif des observations de Dorpat. Quoique cette valeur ne diffère que très peu de la parallaxe évaluée par mon père, notre résultat ne manque point de quelque importance en ce qu'il affaiblit, par l'augmentation de l'erreur probable, le rapport entre la différence effective de la parallaxe de Dorpat avec la valeur de Poulkova et leur différence légitime. Auparavant ce rapport a été établi de 2,8 à 1, tandis que maintenant nous le trouvons de 2,4 à 1.

Afin d'épuiser les observations de Dorpat sous tous les rapports, il m'a paru intéressant d'introduire dans les 58 équations, comme inconnues à déterminer, le mouvement propre relatif des deux astres et leur différence en aberration, de la même manière que nous l'avons fait pour les observations de Poulkova. En conservant ici les mêmes désignations que dans notre recherche, nous parvenons aux équations finales que voici:

$$\begin{aligned}
58{,}00\,d\varepsilon - \ 7{,}98\,d\eta - \ 3{,}57\varkappa + \ 8{,}33\pi &= +0''{,}27\\
-7{,}98\,d\varepsilon + 26{,}83\,d\eta + 12{,}00\varkappa - \ 5{,}11\pi &= -0{,}81\\
-3{,}57\,d\varepsilon + 12{,}00\,d\eta + 27{,}47\varkappa + \ 0{,}83\pi &= -2{,}42\\
+8{,}33\,d\varepsilon - \ 5{,}11\,d\eta + \ 0{,}83\varkappa + 22{,}39\pi &= +5{,}48
\end{aligned}$$

L'erreur probable d'une seule équation de condition se trouve ici $= 0''{,}1308$. Avec cela, la résolution des équations finales nous conduit à:

$$\begin{aligned}
d\varepsilon &= -0''{,}0336 \text{ avec l'erreur probable } 0''{,}0179\\
d\eta &= +0{,}0723 \ \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0{,}0294\\
\varkappa &= -0{,}1326 \ \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0{,}0281\\
\pi &= +0{,}2785 \ \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0{,}0292
\end{aligned}$$

Nous voyons ici que la valeur de $d\eta$ et en plus fort degré celle de $\varkappa$ qui toutes les deux, d'après les observations de Poulkova, devaient être de très près zéro, ont été trouvées l'une deux à trois fois, l'autre quatre à cinq fois plus grandes que leurs erreurs probables. C'est surtout la valeur de $\varkappa$ qui, quoique du même signe que la petite valeur que nous avons trouvée plus haut (pag. 29), indique que la parallaxe de Dorpat ne mérite pas tout à fait ce degré de confiance qui lui devait être assigné d'après son erreur probable. Il faut donc supposer que les observations ont souffert par une cause troublante d'origine inconnue. Mais en considérant que l'effet de cette cause troublante sur la valeur de $\varkappa$ n'a été que tout au plus de $0''{,}1326$, tandis que π a été trouvé $= +0''{,}2785$ nous n'avons aucun droit de supposer que toute cette valeur de π soit provenue uniquement par l'action de cette même cause troublante. Au contraire nous devons dire que, dans les observations de mon père, l'effet de la parallaxe sur les relations mutuelles des deux astres comparés, s'est très distinctement prononcé. Mais en même temps nous devons convenir que la valeur calculée soit sujette à une incertitude plus forte, qu'elle n'est accusée par son erreur probable. Dans ces circonstances nous avons hésité de réunir la parallaxe déterminée à Dorpat avec notre propre détermination, conformément aux poids qui conviennent aux deux valeurs d'après leurs erreurs probables.

M. Peters (Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes, pag. 136) a fixé la parallaxe absolue de α Lyrae, à l'aide des observations faites au grand cercle vertical de Poulkova, à +0″,103 avec l'erreur probable 0″,053. Cette valeur s'accorde avec notre détermination en dedans de son erreur probable. Aussi n'y a-t-il aucune raison à faire une objection plus grave ni contre les observations ni contre les méthodes de calcul de M. Peters. Le résultat qu'il a obtenu nous paraît donc à l'abri de tout reproche, en tant que nous sommes en état de juger à present sur les différentes sources d'erreurs qui peuvent avoir agi sur la détermination. Toujours est-il à désirer que les quantités minimes déduites d'opérations aussi compliquées que les réclame la détermination absolue des parallaxes à l'aide des distances zénithales, avant d'être regardées généralement comme des résultats positifs acquis à la science, trouvent quelque part une confirmation ultérieure par une voie d'opération plus simple et par cette raison moins exposée à de causes troublantes de nature inconnue. Une confirmation de ce genre est donnée, dans le cas de α Lyrae, pour les résultats trouvés par M. Peters, par notre détermination, et nous le regardons comme un fruit très important de notre recherche d'avoir fourni une preuve que les observations de ce savant, instituées d'après les indications et dirigées par l'expérience de mon père, ne sont affectées d'autres erreurs que telles qui sont en accord avec les erreurs probables indiquées.

La valeur de la parallaxe, déterminée par M. Peters, n'est point directement comparable avec la nôtre. L'une est absolue, tandis que l'autre n'est que la différence des parallaxes des deux astres comparés. Afin de les rendre comparables entre elles, il faudrait donc, pour être rigoureux, ajouter à notre parallaxe la quantité minime qui représente la parallaxe de l'étoile de comparaison, telle qu'elle se déduit d'après les lois de la probabilité. En partant des données fournies dans les «Études d'Astronomie stellaire» de mon père, sur les rapports qui existent entre les distances moyennes des étoiles de différents ordres de grandeur, et en prenant pour base la parallaxe moyenne $=0''{,}116$ des étoiles de 2me grandeur, telle qu'elle est fixée par M. Peters, nous devons estimer la parallaxe de l'étoile de comparaison à 0″,0066. En ajoutant cette quantité à notre parallaxe relative nous avons la parallaxe absolue de α Lyrae $\pi' = 0''{,}1534$. Évidemment cette dernière valeur est sujette à une erreur probable plus forte que nous l'avons trouvée pour la parallaxe relative, car il y entre encore l'erreur probable de la parallaxe hypothétique de l'étoile de comparaison. Mais jusqu'à présent nous ne possédons pas encore de données suffisantes pour former un jugement tant soit peu fondé sur le montant de cette dernière erreur probable. C'est pourquoi, en ne voulant pas nous hazarder dans des suppositions apparemment trop vagues, nous nous voyons obligés de renoncer pour le moment à une réunion légitime de notre parallaxe relative avec la parallaxe absolue de M. Peters. Remarquons seulement que les résultats eux-mêmes des deux recherches en question, nous fournissent la preuve que la parallaxe de l'étoile de comparaison est tellement petite que nos moyens d'observation, quelques perfectionnés qu'ils soient déjà, ne suffisent pas encore à indiquer son existence. En outre il y aurait lieu de supposer que l'incertitude qui subsiste sur la valeur hypothé-

tique de la parallaxe de l'étoile de comparaison est d'un ordre inférieur vis à vis des erreurs probables inhérentes aux déterminations elles-mêmes. Avec ces considérations, si l'on veut combiner la détermination de M. Peters avec la nôtre, en raison des poids qu'assignent aux deux valeurs les erreurs probables déduites directement des équations de condition, on trouvera en moyenne la parallaxe absolue de α Lyrae $= 0''{,}152$. J'avoue que cette méthode de combiner les deux déterminations n'est pas au dessus de toute objection; mais pour le moment nous n'avons pas de moyen de procéder autrement. Aussi il est clair que le résultat définitif ne sera guères changé d'une quantité dont nous pouvons répondre pour nos observations, si même les poids relatifs des deux déterminations seront altérés très considérablement. Supposons par exemple qu'en raison de l'incertitude de la parallaxe hypothétique de l'étoile de comparaison, l'erreur probable de notre détermination dût être acceptée quatre fois plus grande que nous l'avons fait auparavant, et nous trouverons en moyenne la parallaxe absolue de α Lyrae $= 0''{,}137$, quantité différente de la valeur précédente seulement de $0''{,}015$.

Passons maintenant à la parallaxe de 61 Cygni. Nous avons déjà dit, dans l'entrée de ce Mémoire, qu'à cause des imperfections de l'héliomètre de Königsberg, qui se sont manifestées dans les observations de M. Wichmann sur la parallaxe de l'étoile d'Argelander, nous étions obligés de regarder la parallaxe déterminée par Bessel comme sujette à des doutes très graves. Il n'y a donc rien de surprenant que le résultat de notre recherche diffère de celui de Bessel, d'autant que cette différence ne peut plus être attribuée à une accumulation des erreurs accidentelles.

D'après une recherche de M. Peters publiée dans le Bulletin de notre Académie (Vol. VIII $\mathcal{N}$ 4), nous avons pour résultat définitif des observations de Bessel, la parallaxe de 61 Cygni $= +0''{,}3602$, avec l'erreur probable $0''{,}0121$, tandis que nos propres observations la font $= +0''{,}5060$ avec l'erreur probable $0''{,}0282$ (pag. 45). La différence effective entre les deux résultats s'élève donc ici à $0''{,}1458$, quantité 3,2 fois plus forte qu'il ne fallait l'attendre d'après les erreurs probables des deux déterminations et ce rapport aurait été encore plus fort si nous étions partis des quantités données par Bessel lui-même comme résultats de ces recherches. Nous nous trouvons donc vis à vis de la parallaxe Besselienne à peu près dans les mêmes conditions que vis à vis de celle de mon père pour α Lyrae, avec cette différence toujours que, pour les observations de Königsberg, une erreur systématique est déjà reconnue par les recherches postérieures mentionnées, tandis que, pour les observations de Dorpat, nous avons à peine un soupçon d'une erreur de ce genre, éveillé par le résultat même des observations qui ont été l'objet de notre discussion. Par cette raison, n'ayant pas même osé faire concourir le résultat obtenu par mon père dans le but de fixer définitivement la parallaxe de α Lyrae, nous avons encore moins le droit de le faire, par rapport à la parallaxe de 61 Cygni, pour la valeur trouvée par Bessel. En revanche les observations de Königsberg ont peut-être cet avantage qu'avec le temps, dès que la nature de l'erreur systématique, indiquée par M. Döllen, sera plus ap-

profondie par les successeurs de Bessel, il sera possible de les corriger de son influence et de les faire valoir encore au profit de la détermination la plus exacte de la parallaxe cherchée. Espérons que cette recherche soit entreprise le plus-tôt possible et avec tous les soins qu'aurait voués à l'investigation le grand Bessel lui-même, s'il avait eu seulement un soupçon de l'existence d'une source d'erreurs de ce genre dans son instrument favori.

De même que pour α Lyrae il n'y a donc que deux déterminations de la parallaxe de 61 Cygni, dont nous pouvons tenir compte, celle de M. Peters et la nôtre. Dans le Mémoire cité de M. Peters nous trouvons pag. 136, comme résultat de ses observations faites sur 61 Cygni, au grand cercle vertical de Poulkova, la parallaxe absolue de cette étoile = +0″,349 avec l'erreur probable 0″,080. Cette valeur diffère de la nôtre de 0″,157, mais cette différence n'a rien de choquant puisque, eu égard aux erreurs probables des deux déterminations, il fallait s'attendre à une différence de 0″,126. Nous pouvons donc dire que la valeur trouvée par M. Peters est en parfaite harmonie avec notre résultat.

Les «Études» de mon père et le Mémoire de M. Peters assignent à notre étoile de comparaison, estimée de 10me grandeur, une parallaxe absolue d'environ 0″,0048. Avec cela la valeur de 0″,5060 pour la parallaxe relative, passe à 0″,5108 pour la parallaxe absolue. En combinant encore, conformément à ce que nous avons dit dans le cas de α Lyrae, cette valeur avec la parallaxe trouvée par M. Peters, eu égard aux poids relatifs des deux déterminations, nous avons en moyenne la parallaxe absolue de 61 Cygni = 0″,493. On remarquera qu'ici l'incertitude qui existe sur la parallaxe hypothétique de l'étoile de comparaison et de son erreur probable, exerce une influence encore considérablement plus petite que dans le cas de α Lyrae, soit parce que l'étoile de comparaison est encore plus petite, soit parce que les erreurs probables des deux déterminations sont elles-mêmes plus fortes.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 2.

DIE PARTHENOGENESIS IM PFLANZENREICHE.

EINE ZUSAMMENSTELLUNG

DER WICHTIGSTEN

VERSUCHE UND SCHRIFTEN ÜBER SAMENBILDUNG OHNE BEFRUCHTUNG

NEBST

BELEUCHTUNG DERSELBEN NACH EIGENEN BEOBACHTUNGEN

VON

Dr. **E. Regel,**
wissenschaftlichem Director des Kaiserlichen botanischen Gartens.

(Mit 2 Tafeln.)

Der Akademie vorgelegt am 7. Januar 1859.

St. PETERSBURG, 1859.

Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:
EGGERS und COMP. in St. Petersburg, LEOPOLD VOSS in Leipzig.

Preis 60 Kop. = 20 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

K. Vesselovsky, beständiger Secretair.

Im März 1859.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

DIE PARTHENOGENESIS IM PFLANZENREICHE.

Eine Zusammenstellung

der wichtigsten Versuche und Schriften über Samenbildung ohne Befruchtung

nebst

Beleuchtung derselben nach eigenen Beobachtungen

von **E. Regel.**

Einleitung.

Die Ansicht, dass auch in der Pflanzenwelt zweierlei Geschlechter zusammenwirken müssten, um den Embryo zu erzeugen, ist eine sehr alte. Undeutlich war solche schon bei den ältesten Culturvölkern vorhanden. So erzählt schon Herodot, dass die Babylonier männliche und weibliche Dattelpalmen unterschieden und aus der Wüste die Blumen der männlichen Pflanzen zur Befruchtung der cultivirten weiblichen Pflanzen holten. Auch die Befruchtung der Früchte der cultivirten Feige war schon damals bekannt.

Undeutlich über die Organe, durch deren Zusammenwirkung der Same sich ausbildet, blieb aber die Vorstellung vom Geschlechte der Pflanzen bis gegen Ende des 17. Jahrhunderts. Nachdem (1685) Grew, Bobart, Millington schon die Befruchtung durch Vermittelung des Blüthenstaubes erkannt hatten, erschien im Jahre 1694 die erste klarere Darstellung über das Geschlecht der Pflanzen von Camerarius (De sexu plantarum). Seit dieser Zeit ward die Lehre vom Geschlechte der Pflanzen immer weiter ausgebaut. Mit Hülfe der immer mehr sich vervollkommnenden Vergrösserungsgläser wurden die Organe, durch deren Vermittelung die Befruchtung vor sich geht, immer besser erkannt und durch praktische Experimente, in welchen Koelreuter durch Erziehung von Pflanzenbastarden als erster voranging, wurden die Ansichten immer mehr und mehr abgeklärt. — Die Vorgänge dagegen, welche die Befruchtung begleiten, die Entstehung und Befruchtung des Keimbläschens im Innern des Embryosackes der höheren Gewächse, sowie die verschiedenartigen Vorgänge bei den niedrigern Pflanzen, von den Coniferen bis zu den Zellengewächsen hinab, das sind alles Entdeckungen, die erst unserer Zeit angehören, ja theilweise erst endgültig in der neuesten Zeit geschlichtet worden sind, theilweise auch noch der vollstän-

digen Erledigung harren. Es gehört jedoch die Darlegung der verschiedenen Ansichten und die allmälige Vereinbarung derselben nicht hierher, denn im Wesentlichen versuchen sie es ja gerade zu zeigen, dass nur unterm Einfluss der Befruchtung, der Embryo sich im Samen entwickele und dass wo keine Befruchtung stattfinde, auch kein Embryo sich entwickeln könne.

Dagegen hatte es von dem Zeitpunkte an, wo die Lehre von der Befruchtung ausgebaut wurde, auch nicht an Männern gefehlt, welche entweder es überhaupt läugneten, dass die Befruchtung zur Ausbildung des Embryo's nothwendig sei, oder welche, ohne die Befruchtung zu läugnen, doch einzelne Fälle aufzählten, wo eine Embryobildung auch ohne Einwirkung der männlichen Geschlechtsorgane stattfinde. Treviranus (Physiologie der Gewächse II. 396—405) und C. Fr. Gärtner (Beiträge zur Kenntniss der Befruchtung I. 446) haben die Stimmen dieser Gegner bis zum Jahre 1844 zusammengestellt und beleuchtet.

Nachdem nun C. Th. E. v. Siebold (Die wahre Parthenogenesis bei den Schmetterlingen und Bienen, 1856) in neuester Zeit die Parthenogenesis bei einzelnen Thiergattungen als ausgemachte Thatsache hinstellte, da traten auch für das Pflanzenreich alle jene schon früher wiederholt aufgestellten Behauptungen auf's neue in den Vordergrund, welche annehmen, dass auch im Pflanzenreich sich ein normaler Embryo ohne Einfluss der Befruchtung ausbilden könne.

Wir wollen die Beobachtungen derjenigen Männer hier kurz wiedergeben, welche von Spallanzani bis auf unsere Zeit am bekanntesten geworden sind und den meisten Einfluss auf die hin und her schwankende Ansicht der Naturforscher gehabt haben. Wir werden dabei der früheren, schon von Gärtner ausführlich mitgetheilten Versuche nur kurz gedenken, dagegen die neuesten Beobachtungen so ausführlich wiedergeben, als dies der Gegenstand, den wir besprechen, verlangt. Da wir aber gerade diejenigen Beobachtungen specieller hervorheben, welche für die Parthenogenesis sprechen, so wollen wir die Bemerkung voraussenden, dass mit dem Fortschreiten der Wissenschaft, mit der stets genaueren Erkenntniss der Vorgänge bei der Befruchtung und deren sichtlichem Einfluss auf Bildung des Embryo, die Zahl derer immer kleiner ward, welche die Möglichkeit einer Samenbildung ohne Befruchtung annahmen. Ausserdem lieferten mit der gehörigen Umsicht ausgeführte Versuche, wo die Befruchtung unzweifelhaft verhindert ward, das Resultat, dass in diesem Falle keine Bildung von keimfähigen, mit Embryonen ausgerüsteten Samen stattfand und so wurden der Beispiele, die für eine Parthenogenesis im Pflanzenreich aufgeführt wurden, immer weniger, ja sie beschränken sich gegenwärtig theils auf schwerer zu beobachtende Pflanzen, theils stützen sie sich auf eine Pflanze, die bis jetzt nur von sehr wenigen beobachtet werden konnte.

I. Besprechung

der wichtigsten bis zur heutigen Zeit gemachten Versuche, sowie der wichtigsten Schriften über Parthenogenesis im Pflanzenreiche.

1. Spallanzani.

Der Abt Spallanzani machte seine zahlreichen Versuche über Befruchtung von Thieren und Pflanzen in den Jahren 1767—1779 [1]). Es ist bekannt dass diese Versuche, die allerdings nach Spallanzani's eigener Schilderung mit grosser Umsicht angestellt wurden, bis auf unsere Zeit als vorzüglichster Anhaltspunkt für die Behauptung der Möglichkeit einer Samenbildung ohne Befruchtung benutzt werden. Zunächst nennt Spallanzani *Ocimum Basilicum L.*, wovon er Samen erhielt, obgleich er die Befruchtung verhinderte. Hören wir was er sagt:

«Jedesmal wenn sich die Blumen öffnen wollten schnitt ich die 4 Antheren ab, welche noch sehr voll von einem trocknen Staube waren. Blumen die nicht castrirt wurden schnitt ich weg, wenn sie sich zu öffnen begannen [2]). Die Pflanze ward getrennt von solchen der gleichen Art in ein Fenster gestellt und dennoch trug sie keimfähigen Samen.»

Später machte Spallanzani selbst die Beobachtung, dass der Pollen der Antheren schon einige Tage vor dem Oeffnen der Blumen reif war, er schnitt deshalb die Antheren viel frühzeitiger aus. Die meisten so behandelten Blumen fielen bald ab, einige wenige bildeten Früchte, die theils kleine unvollkommene Samen und ausserdem im Ganzen 25 vollkommene Samen enthielten. Die Hälfte dieser letzteren ward ausgesäet, keimte zwar nicht, soll aber nach Spallanzani eine vollkommene Keimpflanze enthalten haben. Hier lieferte also Spallanzani selbst den Beweis, dass die Einwirkung von Pollen zur Ausbildung keimfähiger Samen beim *Basilicum* nothwendig sei. Wie es mit der Behauptung Spallanzani's steht, dass sowohl jene anscheinend vollkommenen Samen von *Ocymum*, sowie diejenigen, die er bei ähnlicher Behandlung von *Hibiscus syriacus* erzog, und die ebenfalls nicht keimten, dennoch einen Embryo besessen hätten, das können wir jetzt nur nach analogen Fällen entscheiden. Es spricht diese Behauptung entschieden gegen die Wahrhaftigkeit seiner Berichterstattung.

Umsichtig erscheinen die Versuche mit *Cucurbita Melopepo* und *C. Citrullus* angestellt.

---

[1]) Abbé Spallanzani, Professeur d'histoire naturelle à Pavie, expériences pour servir à l'histoire de la génération des animaux et des plantes, traduit par Jean Senebier. Génève 1785.

[2]) Die Antheren müssen stets lange bevor die Blumen sich öffnen ausgeschnitten werden, denn viele Pistille werden schon in der Knospe befruchtet. Ein Ausschneiden derselben beim Oeffnen kann kein Resultat geben, worauf man sich stützen kann, selbst wenn alle andere Blumen als Knospen abgeschnitten werden und die Pflanze durchaus isolirt gestellt wird.

Von der ersteren wurden alle Blumen bis auf zwei weibliche vor dem Oeffnen derselben abgeschnitten, und diese letzteren gaben Früchte mit reifen keimfähigen Samen. Um aber auch die Möglichkeit der Befruchtung durch Insecten oder durch die Luft zu beseitigen, schloss er einige Blumen der *C. Citrullus* durch Gläser vor deren Oeffnen vom Zutritt der Luft gänzlich ab. Erst nachdem diese Blumen schon kleine Früchtchen angesetzt, wurden die Gläser entfernt. Trotzdem wurden die Früchte reif und enthielten keimfähige Samen [1]).

Die Versuche welche Spallanzani mit weiblichen Hanfpflanzen (*Cannabis sativa*) angestellt hat, sind jedenfalls besser und exacter (nach seiner Beschreibung), als alle die der folgenden Beobachter. Sie sind so angestellt, dass wenn man einen genauen Nachweis über deren Exactität hätte, sie allerdings die Parthenogenesis bei dieser Pflanze beweisen würden. Nachdem er in seinem eigenen Garten eine weibliche, einzeln stehende Hanfpflanze hatte reifen Samen tragen sehen und mehrere andere ähnliche Fälle von ihm beobachtet worden, schritt er zum Experiment. Im Mai 1777 versetzte er 6 kleine Hanfpflanzen in Töpfe. Sobald man das Geschlecht derselben erkennen konnte, zeigte es sich, dass 4 männliche dabei waren. Diese wurden vernichtet und die 2 anderen Pflanzen wurden 20 Tage bevor sie zu blühen begannen in ein gegen Mittag gelegenes Zimmer mit 2 Fenstern gestellt. 42 Tage blieben sie hier stehen und während dieser ganzen Zeit wurden die Fenster nie geöffnet, die Thür aber nur dann, wenn Spallanzani selbst behufs der Beobachtung und des Begiessens in's Zimmer ging. Um jeden Zweifel zu heben, führte er ausserdem 2 mit Blumen bedeckte Zweige der einen Pflanze in eine weitbauchige Glasflasche und verschloss deren untere Oeffnung luftdicht. Ausserdem schnitt er diesen beiden Pflanzen alle Aeste weg, mit Ausnahme der beiden in die Flasche eingeführten und beobachtete sowohl die am Stengel befindlichen Blumen, wie die in der Flasche befindlichen durch das Glas, täglich zweimal, konnte aber nie eine Spur von männlichen Blumen finden. Trotz aller dieser Vorsichtsmassregeln trugen die Pflanzen im Zimmer und auch die beiden in der Flasche eingeschlossenen Aeste reife Samen. Allerdings waren diese kleiner als die auf dem Felde gereiften. Es reiften ferner an den in dem Zimmer befindlichen Theilen dieser Pflanzen weit weniger Samen als bei den Pflanzen im Freien und an den eingeschlossenen Aesten noch weniger, aber die Saamen, welche reiften, zeigten sich dennoch keimfähig. Einen zweiten Versuch machte er, indem er im November Hanfpflanzen aussäete, solche im Topfe im Zimmer erzog, die männlichen Pflanzen zeitig vernichtete und die weiblichen auf diese Weise $1\frac{1}{2}$ Monate früher zur Entwickelung brachte, bevor die Hanfpflanzen auf dem freien Felde blüheten. Auch von ihnen schnitt er fast alle Aeste ab und beobachtete die Pflanzen täglich, ob sich keine männlichen Blumen an denselben zeigten. Obgleich er keine solche entdecken konnte, trugen auch diese Pflanzen reife keimfähige Samen.

Spallanzani kam daher zu dem Schluss, dass die Hanfpflanze ohne Einwirkung von

[1]) Ist dieser Versuch genau wie angegeben ausgeführt, dann könnten nur zufällig entwickelte Antheren die Befruchtung vollführt haben. Derselbe sollte wiederholt werden und würde, sorgfältig ausgeführt, allerdings beweisfähig für Parthenogenesis sein. Die Versuche späterer Beobachter lieferten aber ein ganz anderes Resultat.

Pollen keimfähige Samen entwickeln könne, da er bei diesen Versuchen jede Möglichkeit der Befruchtung durch in der Luft schwebende Pollenkörner ausgeschlossen habe. Wir können diesen Versuchen Spallanzani's nur die unseren und die Frage entgegenstellen, ob er wirklich mit Wahrheitsliebe berichtet, oder ob, wenn dies geschehen sein sollte, obgleich es von seinen eigenen Zeitgenossen bezweifelt wird, er wirklich so exact beobachtete, wie er selbst angiebt. Seine Wahrheitsliebe möchten wir bezweifeln, weil er z. B. angiebt, in den angeblich vollkommenen Samen von *Hibiscus* und *Ocimum*, die aber nicht keimten, dennoch einen Embryo, ähnlich wie in vollkommen befruchteten Samen, gefunden zu haben. Wäre das wahr, so würden diese Samen auch gekeimt haben. Dass ferner von ihm jedenfalls nicht die Schärfe der Beobachtung angewendet ward, die bei solchen Versuchen nothwendig, das geht klar aus dem folgenden Versuche hervor, welcher sich mit *Spinacia* beschäftigt.

Hier wurden weibliche Pflanzen ebenfalls getrennt, theils sogar unter Glasglocken gezogen und reife keimfähige Samen dennoch erzielt. Männliche Blumen beobachtete Spallanzani nur einmal an drei weiblichen Pflanzen, an den anderen Versuchspflanzen konnte er keine entdecken (!?), während solche, wie wir später sehen werden, immer vorkommen. Wir glauben daher zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass auch die Versuche mit dem Hanf und der Wassermelone, die sonst überzeugend sein würden, nicht mit der gehörigen Schärfe und genau so wie sie beschrieben angestellt wurden, obgleich wir sie nach der Darstellung des Verfassers zu den besten der in dieser Richtung gemachten zählen müssen. — Endlich benutzte Spallanzani auch weibliche in Töpfe gepflanzte Exemplare von *Mercurialis annua* zu ähnlichen Versuchen. Dieselben liessen jedoch alle Blumen fallen ohne Samen anzusetzen, so lange sie nämlich entfernt von männlichen Pflanzen erzogen wurden. In der Nähe von männlichen Pflanzen setzten sie bei einem anderen Versuche Samen an.

2) A. de Marti.

A. de Marti[1]) wiederholte die Versuche von Spallanzani. Er zeigt, dass man am Hanfe, am Spinate und selbst bei den Wassermelonen häufig männliche Blumen oder selbst Zwitterblumen finde. Wenn er diese männlichen Blumen entfernte, so erhielt er an abgesonderten Pflanzen auch keine reifen Samen. Zuweilen blieben aber trotz dem sorgfältigsten Nachsehen einzelne männliche Blumen stehen. Marti ist deshalb der Ansicht, dass Spallanzani die männlichen Blumen übersehen und sich getäuscht habe.

3) Volta.

Ihm folgte der berühmte Volta[2]), welcher versichert die Experimente Spallanzani's wiederholt und keine reifen Samen erhalten zu haben, sobald er auch alle Staubfäden rechtzeitig entfernte.

[1]) Experimento y observaciones sobre los sexos y fecondacion de las plantas. I Vol. Barcelona 1791.

[2]) Mémoires de l'Academie de Mantoue. I. pag. 226.

4) **Lecocq.**

Lecocq[1]) wiederholte Spallanzani's Versuche. Seine Versuche, die keinen Werth haben, führten ihn zu dem Schluss, dass alle getrennt geschlechtlichen einjährigen Pflanzen, wenn sie nicht befruchtet wurden, auch Samen ohne Befruchtung bilden könnten. Die Natur wolle augenscheinlich durch diese Einrichtung das Aussterben derselben verhindern. Er machte seine Versuche mit *Cannabis*, *Mercurialis*, *Spinacia*, und erhielt von diesen ohne Befruchtung Samen.

Die weibliche Pflanze von *Lychnis dioica* lieferte bei seinen Versuchen keine Samen ohne Befruchtung.

5) **Henschel.**

Henschel stellte in den Jahren 1817—1828 zahlreiche Versuche an[2]). Derselbe ging schon von der Voraussetzung aus, dass der Pollen zur Befruchtung der Gewächse überhaupt nicht nothwendig sei. Ebenso wollte derselbe den Pollen durch Magnesia, Schwefel, Kohle, Opium, Moschus etc. ersetzen. Die Versuche desselben sind so liederlich und leichtsinnig angestellt, dass sie gar keine Berücksichtigung verdienen. Welchen Unsinn derselbe gepredigt, mag aus einem anderen Werke desselben hervorgehen, hier heisst es pag. 627[3]):

«Unbefruchtet ist das thierische Ovulum ein eben so schlafender Keim als das völlig gereifte Pflanzensamenkorn. Jahre können beide ruhen, wenn nicht der zeugende Moment sie erweckt. Mann und Weib umarmen sich und setzen ihren Gattungsmoment in dem Thierkeime fort. Himmel und Erde durchdringen sich, Licht und Wärme, Luft und Wasser ergreifen sich und setzen ihren organischen Prozess im Pflanzenkeime fort, aber animalisch wird der Thierkeim, tellurisch der Pflanzenkeim befruchtet.»

Von *Ricinus*, *Zea* etc., erhielt er ganze Säcke voll reifer Samen bei verhinderter Befruchtung etc.

6) **Girou de Buzareignes.**

C. Girou de Buzareignes[4]) machte Versuche mit *Cannabis*, *Spinacia*, *Lychnis dioica* und *Cucurbita*, welche Gärtner pag. 466—475 wiedergiebt. Auch diese Versuche sind alle im freien Lande und massenhaft angestellt und haben durchaus keinerlei wissenschaftliche Bedeutung, können daher einfach übergangen werden. Mit *Lychnis dioica* liegen Angaben über Samenbildung ohne Befruchtung nur von Girou und Henschel vor. Beides gleich unzuverlässige Beobachter. Die weiblichen Exemplare dieser Pflanze bilden sehr häufig noch einzelne oder mehrere Antheren aus.

---

[1]) Recherches sur la reproduction des vég. Clerm. 1827.

[2]) Schelver Studien 312. Vorläufige Nachrichten von einigen die Bestäubung der Pflanzen betreffenden Versuchen. Verhandl. des Gartenbauvereins in den Königlich Pr. Staaten. V. 313.

[3]) Henschel u. Schelver, von der Sexualität der Pflanzen. Breslau 1820.

[4]) Sur la génération. Paris 1828. Ann. des sc. nat. 1830. Vol. 19. pag. 297.

7) **F. X. Ramisch** (Geoffroy, Alston, Camerarius, Link).

F. X. Ramisch [1]), veröffentlichte 1837 seine Beobachtungen über *Mercurialis annua*, die er seit 1833 gemacht hatte. Diese Beobachtungen sind von Gärtner (Beiträge zur Kenntniss der Befruchtung, pag. 475) schon wiedergegeben und auch 1857 pag. 211 der Bonplandia von neuem abgedruckt worden. Das Ergebniss derselben war, dass er von weiblichen Pflanzen der *Mercurialis annua* theils taube, theils keimfähige Samen erhielt. Aehnliche Resultate hatten vor ihm schon erhalten:

Rud. Jac. Camerarius (Camerarii opuscula bot. arg., colleg. ed. J. Ch. Mikan. Pragae 1797. pag. 24—27) der an isolirten Pflanzen der *Mercurialis* Samen ohne Embryo erhielt. Geoffroy (Mém. de l'Acad. roy. des sc. nat. 1711. pag. 272) und Alston (Edinb. Neue Versuche u. Bemerkungen I. pag. 234) die reife Samen auf ähnliche Weise erhielten. Lecocq (Recherches sur la reproduction des vég. Clermont 1827) erhielt ihm zweifelhafte Resultate. Link (Grundlehren der Anatomie und Physiologie der Pflanzen. Gött. 1807. pag. 228) beobachtete *Mercurialis elliptica* Lam. im Botanischen Garten zu Rostock. Weibliche isolirte Pflanzen derselben zeigten keine Spur männlicher Blumen und brachten eine Menge von Samen, die jedoch sämmtlich keinen Embryo enthielten.

Ramisch verweist selbst schon auf Schkuhr und Reichenbach, welche an den weiblichen *Mercurialis*-Pflanzen einzelne männliche Blumen entdeckten, und erzählt, dass nachdem er und Maly in den ersten Beobachtungsjahren keine männlichen Blumen gefunden, er in späteren Jahren einzelne derselben an einzelnen weiblichen Pflanzen aufgefunden habe. Dennoch glaubt er, die Befruchtung habe durch diese nicht geschehen können, da sie nur sehr kurze Zeit geöffnet gewesen seien. (!!)

Es stimmen mithin diese Versuche von Ramisch etc. schon mit den meinigen überein und beweisen gerade, dass da wo wirklich keine männlichen Blumen da waren, auch nur Samen ohne Embryo gebildet wurden. In den meisten Fällen waren solche aber vorhanden oder wurden von den Beobachtern übersehen und dann wurden durch Befruchtung keimfähige mit Embryonen versehene Samen erzeugt.

Ramisch machte seine Versuche vier Jahre nach einander und erzog aus den nach seiner Ansicht ohne Befruchtung gereiften Samen sowohl männliche als weibliche Pflanzen.

8) **Fresenius.**

Fresenius [2]) macht seine Beobachtungen an einer *Datisca cannabina* bekannt. Eine weibliche Pflanze derselben setzte im Garten des Senkenbergischen Museums zahlreiche Samen an, ohne durch Pollen befruchtet zu sein.

---

[1]) Beobachtungen über Samenbildung ohne Befruchtung am Bingelkraute in W. R. Weitenweber's Beiträgen zur gesammten Natur- und Heilwissenschaft. Prag. 1837. II. Band. pag. 438.

[2]) Museum Senkenbergianum II. (1837) p. 305.

Diesem ist entgegen zu halten, dass Bernhardi selbst bei verhältnissmässiger Nähe der männlichen Pflanze nie Samen von *Datisca* erhielt. Das gleiche Resultat lieferten die isolirten weiblichen Pflanzen vieler anderer botanischer Gärten, wie sich Referent oft selbst überzeugt hat und wie dies auch speciell aus den Botanischen Gärten zu Upsala und Bonn berichtet wird. Endlich giebt Gärtner an, dass er solche angeblich reife Samen aus dem Botanischen Garten in Giessen erhalten habe, aber dieselben seien sämmtlich leer und ohne Embryo gewesen.

9) **Bernhardi** (Linné, Schreber).

Professor Bernhardi[1]), ein sehr exacter Beobachter, hat ebenfalls 6 Jahre hindurch Versuche mit *Cannabis* angestellt, und spricht die Ueberzeugung aus, dass diese Pflanze keimfähigen Samen ohne Mithülfe von Pollen bilden könne.

Zuerst erwähnt er den von Linné angestellten Versuch, welcher von Hanfpflanzen, die in Töpfe gepflanzt und abgesondert in ein Zimmer gestellt wurden, keinen Samen erhielt. Ebenso, sagt er, erhielt Schreber von ähnlich behandelten Hanfpflanzen keinen Samen. Von Spallanzani's Versuchen sagt auch Bernhardi, dass sie nicht glaubwürdig seien.

Bernhardi selbst machte seine Aussaaten von Hanf jedesmal im April in's freie Land. Die männlichen Pflanzen wurden immer zeitig ausgerottet und von den weiblichen blieben behufs leichterer Controlle stets nur zwei stehen. Alle 2 Tage wurden diese untersucht, ob sich an ihnen keine männlichen Blumen entwickelten. Sechs Jahre wiederholte Bernhardi diesen Versuch und erhielt alle Jahre reifen Samen, aus denen theils weibliche, theils männliche Pflanzen erwuchsen, wie dies überhaupt auch schon bei allen früheren, so wie bei späteren ähnlichen Versuchen stattfand.

Männliche Blumen, so versichert Bernhardi, seien an seinen weiblichen Pflanzen nie gefunden worden, auch bezweifle er, dass solche an einer weiblichen Hanfpflanze überhaupt vorkämen. Thatsache sei es dagegen, dass einzelne monöcische Hanfpflanzen sich zuweilen zwischen den anderen Pflanzen finden. Diese tragen jedoch eben so viele männliche als weibliche Blumen und lassen sich leicht unterscheiden. Einzelne Zwitterblumen habe er ebenfalls nie gefunden und sei es sehr unwahrscheinlich, dass solche beim Hanf überhaupt vorkämen. Eine Befruchtung durch Pollen, der sich an den Versuchspflanzen zufällig erzeugt, könne deshalb nach seiner vollen Ueberzeugung nicht stattgefunden haben.

Dagegen waren Bernhardi's Versuche alle im freien Lande angestellt und die Befruchtung von mit der Luft hergeführten Pollenkörnern mit um so mehr Wahrscheinlichkeit vor sich gegangen, als die Pflanzen gleichzeitig mit denen des freien Feldes blüheten, und Bernhardi keinerlei Vorsichtsmaassregeln dagegen anwendete.

Bernhardi weist nun zwar selbst darauf hin, bezweifelt diese Art der Befruchtung aber überhaupt. Er wisse zwar dass der Pollen oft auf weite Entfernungen hin vom Winde

[1]) Samenbildung ohne Befruchtung in Otto u. Dietrich Allg. Grtztg. Jahrg. 1839. p. 321.

weggeführt werde, dagegen lägen ihm viele Erfahrungen vor, dass dennoch die Befruchtung selten auf diese Weise vollzogen werde. So stand im Botanischen Garten zu Erfurt ein weibliches Exemplar der *Datisca cannabina* einige Jahre hindurch, ungefähr 100 Schritt von einem männlichen entfernt und gleichwohl setzte dasselbe niemals Samen an. Aehnliches habe Treviranus von *Mercurialis perennis* berichtet und Spallanzani bei *M. annua* beobachtet. Bei einer Entfernung von 225 Schritt von einander sei die weibliche Pflanze von *Mercurialis perennis* nicht befruchtet worden, als man die männliche aber auf 15 Schritt genähert, habe die weibliche Samen getragen.

Ebenso glaubt Bernhardi sicher zu sein, dass in keinem Garten der Nachbarschaft Hanf gebaut wurde und in den nächsten Umgebungen Erfurts habe er keine Hanfpflanzungen bemerkt, sondern erst in der Entfernung von einigen Stunden, einzelne Pflanzungen.

Nach unserer Ansicht beweist damit Bernhardi gar nichts. Die Pflanzen müssen sich in dieser Beziehung je nach Natur des Pollens, den Pollenmassen die sie produciren, der Leichtigkeit mit der sie concipiren etc., unter sich sehr verschieden verhalten. Hätte ein Mann wie Bernhardi ähnliche Versuche wie Spallanzani angestellt und doch keimfähigen Samen erhalten, das würde allerdings überzeugend sein. Er ging aber merkwürdiger Weise von der Ansicht aus, dass der Hanf im Topfe keinen Samen tragen könne und erklärt hierdurch die Resultate von Linnés und Schrebers Versuchen.

10) C. F. Gärtner.

C. F. Gärtner[1]) referirt in einem besondern Abschnitt, welcher von der Erzeugung von Früchten mit keimfähigen Samen ohne Pollenbestäubung (pag. 446—558) handelt, zunächst über die bis auf seine Zeit gemachten Versuche. Die letzten 20 Seiten (538—558) besprechen dann die von ihm selbst angestellten Beobachtungen. Er erzählt, dass er Anfangs ähnliche Resultate wie Henschel, d. h. keimfähige Samen, erhalten habe, wenn er die Versuche im Freien angestellt habe. Gegen Befruchtung durch die gleiche Art, habe er sich hinlänglich gesichert gehalten, wenn die Versuchspflanzen 6—800 Schritt von ihresgleichen entfernt waren. Ebenso habe er anfänglich die Castration der Blumen zu spät vorgenommen. Später habe er bei gehöriger Vorsicht ohne Befruchtung keine keimfähigen Samen mehr erzeugen können.

Leider hat Gärtner, ein so exacter und wahrheitsgetreuer Berichterstatter, selbst nur Versuche mit hermaphroditen Pflanzen angestellt. Im höchsten Grade interessant ist es aber diese nachzulesen, da aus ihnen schon genugsam hervorgeht, welche Aufmerksamkeit beobachtet werden muss und wie sehr leicht Selbsttäuschung über die erhaltenen Resultate eintreten kann. Von besonderm Interesse ist in dieser Beziehung sein Versuch mit *Delphinium Consolida*. Nachdem er mehrere Jahre trotz Absperrung von in Töpfen stehenden Pflanzen, trotz frühzeitiger Castration und häufigen Nachsehens der Blumen, dennoch Früchte mit einzelnen keimfähigen Samen erhalten hatte, erhielt er endlich im Jahre

[1]) Beiträge zur Kenntniss der Befruchtung der vollkommenen Gewächse. Stuttgart 1844.

1838, nachdem die Castration noch frühzeitiger vorgenommen, die Blumen täglich mehrere male revidirt und einzelne nachgewachsene Antheren noch rechtzeitig entfernt waren, an 3 Versuchspflanzen keinen Samen mehr[1]). In Folge dieser Versuche spricht er sich im Allgemeinen gegen die *Parthenogenesis* aus.

11) **John Smith.**

Im Jahre 1841 bildete John Smith in den Transactions of the Linnean Society im 18ten Bande tab. 36 pag. 501 die *Coelobogyne ilicifolia* ab und veröffentlichte zugleich seine Beobachtungen über diese so interessante und seitdem so berühmt gewordene Pflanze. Es ist dieses eine *Euphorbiacee* aus dem östlichen Neuholland. Cunningham führte 3 weibliche Exemplare derselben von Moreton-Bay in den Garten zu Kew bei London ein. Schon im Jahre 1839 blüheten dieselben zum ersten Male. Seit jener Zeit, so sagt Smith, überwachte ich diese Pflanze jährlich, aber nie konnte ich an derselben männliche Blumen oder andere Pollen tragende Organe entdecken und dennoch trugen sie alle Jahre Samen, aus denen auch junge Pflanzen erzogen wurden. Diese letzteren waren der Mutterpflanze durchaus ähnlich, so dass also auch die Befruchtung nicht durch eine verwandte Pflanze bewerkstelligt sein konnte.

Dieselbe bildet einen niedrigen immergrünen Strauch, mit mattgrünen, ovalen, nach Art der Stechpalme dornig gezähnten Blättern. Die weiblichen Blumen derselben sitzen auf der Spitze und an der Seite kleiner Aeste zu 5 und mehr in kurzen ährenförmigen Blüthenständen zusammen. Auf der Spitze des dreifächerigen Fruchtknotens, sitzt eine grosse schildförmige dreilappige Narbe. Jede Blume trägt aussen an Kelch und Brakteen grosse warzenförmige Drüsen. Diese letzteren scheiden zur Zeit der Blüthe eine wasserhelle Flüssigkeit aus. Ungefähr 4—5 Monat nach der Blüthe ist die 3-fächrige Kapselfrucht gezeitigt, die 3 Samen enthält, welche elastisch aus der Kapsel herausgeworfen werden.

Smith schon macht darauf aufmerksam, dass die 3-lappige Narbe mit der Kapselfrucht wachse und sich vergrössere und erst kurz vor der Reife abtrockne. Pollenkörner oder Pollenschläuche sah Smith nie, wenn er die in der Entwickelung begriffene Frucht beobachtete. Er spricht daher die Ueberzeugung aus, dass die Befruchtung nicht durch Pollen geschehen könne, vielleicht sagt er, könnte die aus den Drüsen ausschwitzende Feuchtigkeit einen befruchtenden Einfluss haben. Diese letztere Ansicht ist jedoch von keinem der spätern Beobachter adoptirt worden.

12) **Gasparini.**

G. Gasparini[2]) bespricht die Fruchtbildung der kultivirten Feige und sucht zu zei-

[1]) Gärtner ist ein Mann der früher Experimente zu vielen Hunderten gemacht und dennoch täuschte er sich lange Zeit hindurch bei Pflanzen, mit denen viel leichter, als gerade mit Diöcisten zu manipuliren ist.

[2]) Note sur l'origine de l'embryon dans les graines des plantes phanérogames. Annales des sciences naturelles III. Serie. tom. V. p. 306.

gen, dass sich hier Samen ohne Einwirkung von Pollen bildeten. Die kultivirte Feige, sagt er, trägt zweierlei Arten von Fruchtböden (Früchten). Die einen (*fioroni*) erscheinen im Frühling und reiten frühzeitig, die andern erscheinen im Sommer und reifen im Herbste. In den ersteren findet man selten männliche Blumen und diese können nicht zur Befruchtung dienen, denn sie erscheinen erst nachdem schon die Narbe der weiblichen Blumen vertrocknet ist. In diesen frühzeitigen Fruchtböden fand Gasparini noch niemals reifen Samen.

In den im Sommer erscheinenden Fruchtböden fand G. niemals männliche Blumen und dennoch entwickelt sich die grössere Zahl der Fruchtknoten zu keimfähigen Samen.

Es wird, so sagt G. weiter, gemeiniglich angenommen, dass die Fruchtknoten der kultivirten Feige durch das Insekt der wilden Feige befruchtet würden. In den Fruchtböden dieser letzteren finden sich wirklich zahlreiche männliche Blumen und man hat angenommen, dass jenes Insekt, indem es aus den Fruchtböden der wilden Feige ausschlüpfe und durch die Spitzenöffnung in die der kultivirten einschlüpfe, Pollen einführe und so die Befruchtung vollführe. Um sich in dieser Beziehung Sicherheit zu verschaffen, verklebte G. die Oeffnung junger Fruchtböden des kultivirten Baumes mit Gummi oder einer andern klebrigen Masse und erhielt in solchen dennoch eine Menge keimfähiger Samen. Trotz wiederholter Untersuchungen konnte er weder in solchen verklebten, noch in andern der im Laufe des Sommers entstandenen Fruchtböden, weder Antheren, noch ein anderes Organ entdecken, in welchem sich Pollen findet. Hieraus schliesst G. dass die Samen der kultivirten Feige sich ohne Befruchtung entwickeln.

Wir können dieser Beobachtung des Herrn Gasparini keine Beobachtungen entgegen stellen. Dreierlei macht jedoch die Parthenogenesis hier zweifelhaft. Erstens ist es von Alters her eine eingeführte Gewohnheit, dass man wilde Feigen in die Nähe der kultivirten pflanzt, damit deren Insekt die Früchte der kultivirten befruchten könne, eine praktische Gewohnheit, die doch bestimmt ihren Grund hat. Zweitens kann gerade die Feige nicht als Beweismittel gebraucht werden, da hier ja die Befruchtung zur Zeit derselben nicht überwacht werden kann, indem sie im geschlossenen Fruchtboden vor sich gehet und die Früchte, welche Samen entwickelt haben, also auch erst nachträglich auf das Vorhandensein von Antheren untersucht werden können. Endlich kommen nach einzelnen Beobachtern an dem Ovulum der kultivirten Feige eigenthümliche Organe vor, die den Namen *Pollinidien* erhalten haben und deren Bedeutung noch nicht festgestellt ist.

13) **Tenore** (Bocconi).

Tenore bemerkt im Samenkatalog des Botanischen Gartens zu Neapel fürs Jahr 1853, dass die weibliche Pflanze von *Pistacia narbonensis* im dortigen Garten jährlich Samen trage, ohne dass männlicher Blüthenstaub einwirke, und dass diese Samen dennoch vollständig keimfähig seien. In einigen Gegenden Italiens habe Bocconi auch die gleiche Erscheinung an anderen Arten der Gattung *Pistacia* beobachtet. Genauere Nachweise sind nicht gegeben und so hat diese Beobachtung gar keinen Werth.

14) Naudin.

Den grössten Einfluss auf die Ansichten der Naturforscher haben die in neuester Zeit von Naudin[1]) in Paris angestellten Versuche gehabt. Wir wollen daher hier das Wichtigste daraus mittheilen. Derselbe sagt:

«Ich habe seit zwei Jahren die Versuche Spallanzani's und Bernhardi's wieder aufgenommen und bin wie sie zu dem Schluss gekommen, dass der weibliche Hanf Frucht tragen kann, ohne dass männliche Pflanzen irgend einen Einfluss ausüben. Ein weibliches Exemplar, ganz isolirt im Garten des Museums und weit entfernt von einigen männlichen Exemplaren, welche sich in der Ecole de Botanique befanden, lieferte mir eine erste Samenerndte, welche zu den folgenden Experimenten diente. Im April 1855 ausgesäet, lieferten diese kräftige Pflanzen. Zwanzig weibliche Exemplare blieben im freien Lande an einem von hohen Mauern umschlossenen Orte und vom Museum durch die Cuvier-Strasse getrennt. Vier andere wurden vor der Blüthe in kleine Töpfe gepflanzt und in dem Gewächshause eines von allen Seiten von Mauern umschlossenen Gartens, in welchem sich keine andere Hanfpflanze befand, eingeschlossen. Alle diese Pflanzen blüheten und trugen Frucht. Häufig wurden sie nachgesehen und niemals fand ich an denselben eine Spur von männlichen Blumen. Diese letztere Operation war namentlich an den in Töpfe gepflanzten Exemplaren ziemlich leicht auszuführen, da diese schwach blieben und sich nicht verästelten. Die Samen dieser vier letzteren Pflanzen wurden besonders gesammelt und im Jahre 1856 ausgesäet. Ich erhielt davon 40 Exemplare, von denen die männlichen beim Erscheinen ihrer Knospen sofort unterdrückt wurden. Vier von den weiblichen Exemplaren wurden, wie im vergangnen Jahre, in kleine Töpfe gepflanzt und in ein Zimmer in der zweiten Etage des Hauses gestellt, welches Professor Decaisne bewohnt. Sie waren so abgeschlossen (séquestrés), dass es durchaus unmöglich war, dass sie der Pollen der eignen Art, oder der Pollen einer andern Pflanze erreichen konnte[2]). Dennoch trugen auch diese Pflanzen

[1]) Observations relatives à la formation des graines sans le secours du pollen; par M. Ch. Naudin. Commissaires MM. Brongniart, Decaisne, Moquin-Tandon. Comptes rendues des séances de l'Académie des sciences. T. 43. (1856) pag. 538.

[2]) Es kommt hierbei darauf an, ob diese Pflanzen während der ganzen Zeit der Entwickelung ihrer Blumen, vollständig von der äussern Luft abgeschlossen wurden. Ich habe mich bei meinen Experimenten überzeugt, dass eine einzige männliche Hanfpflanze Millionen von Pollenkörnern entwickelt. Bei der leisesten Berührung der Pflanze zur Zeit der Reife der Antheren, verbreitet sich eine eigentliche Staubwolke von Pollenkörnern in der Luft, welche von dem leisesten Windhauch weit fortgetragen werden. Wir erinnern an das Faktum, dass der Pollen von Tannen der deutschen Waldungen über das Meer nach Dänemark getragen wurde und sind überzeugt, dass zur Zeit der Hanfblüthe, in Gegenden wo solcher gebauet wird, die Luft auf weite Strecken hin von dem Pollenkörnern desselben infizirt ist, also nur ein luftdichter Abschluss zu dieser Zeit, ein sicheres Resultat geben kann. Ein Standort in Zimmern und Gewächshäusern, in welche von aussen Luft eindringen kann, schloss nach unserer Ansicht die Befruchtung durch zufällig in der Luft befindlichen Pollen in diesem Falle um so weniger aus, als es nach dem Berichte des Hern Naudin wahrscheinlich bleibt, dass schon in benachbarten Gärten männliche Pflanzen zur Blüthe kamen. Wir wiederholen es, dass schon die Pollenmasse einer einzigen kräftigen männlichen Pflanze des Hanfes, so gross ist, dass sie die Luft auf weite Entfernungen hin infiziren kann.

Ebenso muss nach unserer Ansicht eine zu einem solchen Experimente dienende Pflanze so genau beobachtet werden, dass jede der vielen weiblichen Blumen darauf untersucht werden muss, ob sie keine Antheren enthalte. Das würde bei kleinen weiblichen Pflanzen, täglich mehrere Stunden der Beobachtung erfordern.

Frucht. Die sorgfältigste Untersuchung von mir und von Decaisne konnte keine einzige männliche Blume unter den vielen weiblichen entdecken. Von den letzteren entwickelten nur wenige Samen, welche jetzt reif sind.

Smith's Beobachtung an Coelobogyne leitete mich darauf, isolirte weibliche Exemplare von *Mercurialis* zu beobachten. Junge Exemplare derselben wurden vor Erscheinen der Blumen in Töpfe gepflanzt und die einen in ein Gewächshaus, die andern in dasselbe Zimmer gestellt, von dem ich so eben sprach. Die Bedingungen waren so, dass sie die Voraussetzung nicht zuliessen, dass sie durch Pollen anderer Pflanzen der gleichen Art befruchtet werden konnten.

Diese acht in Töpfe gepflanzten Exemplare entwickelten eine grosse Masse weiblicher Blumen, von denen sich fünfzig zu reifen, mit Embryonen versehenen Samen ausbildeten, die auch in diesem Jahre keimten. Ich kann bestätigen, dass diese Pflanzen nicht eine einzige männliche Blume hervorbrachten [1]).

Zwei Pflanzen von *Ricinus*, dem alle männliche Blumen abgeschnitten wurden, entwickelten keinen Samen. Während also die monöcischen *Euphorbiaceen*, wie es scheint, bei unterdrückter Befruchtung keinen Samen bilden, entwickeln diöcische *Euphorbiaceen* solche ohne Befruchtung [2]).

Im Jahre 1854 beobachtete ich in einem von Mauern und Pallisaden umschlossenen Raum des Museums ein weibliches Exemplar von *Bryonia dioica*. Dasselbe war durchaus isolirt in diesem Raume und entwickelte Tausende von Blumen, von denen sich ein kleiner Theil zu reifen keimfähigen Samen entwickelte. Dieselben keimten im November des gleichen Jahres ausgesäet sämmtlich. 1855 und 1856 entwickelte dasselbe Exemplar im gleichen Verhältnisse Blumen und Früchte. Oft untersuchte ich diese Pflanze, fand aber keine Spur von Antheren. Dennoch konnte die Befruchtung unter Mithülfe von Insekten stattgefunden haben, eine Vermuthung, welche durch die folgende Beobachtung aber nicht bestätigt wurde. Ich pflanzte nämlich eins der jungen 1854 aus Samen erzogenen weiblichen Exemplare im April 1856 in die gleiche Localität. Obgleich dieses nicht so stark wuchs, trug es dennoch tausende von Blumen, welche sämmtlich jetzt reife Früchte entwickelt haben. Von hundert derselben, die ich untersuchte, enthielten 12 gar keinen Samen, 45 nur einen Samen, 29 deren je 2, 11 je 3, 2 je 4 und eine 5 Samen, ein Resultat das ungefähr mit dem übereinstimmt, welches ein weibliches, in der Nähe einer männlichen Pflanze wachsendes Exemplar liefert.

Aus diesem verschiedenen Verhalten dieser beiden Pflanzen könnte man den Schluss ziehen, dass die eine Pflanze mehr als eine andere die Disposition zur Erzeugung von

---

[1]) Unsere Versuche lieferten ein ganz anderes Resultat und machen es wahrscheinlich, dass Naudin nicht genau genug beobachtete. (E. R.)

[2]) Ein verfrühter Schluss. *Ricinus* hat eben grosse leicht zu beobachtende und zu entfernende und wenige Blumen, *Mercurialis* sehr kleine, der Beobachtung leichter entgehende und sehr viele. Daher das genaue Experiment schwieriger. (E. R.)

Samen ohne Befruchtung besitzt, denn wenn Insekten die Befruchtung bewerkstelligten, so hätten sich beide Pflanzen in Bezug auf Fruchtbildung gleichmässig verhalten müssen[1]).

Eine Pflanze von *Ecbalium elaterium*, welche ebenfalls abgeschlossen gepflanzt ward, ward aller männlichen Blumen vor deren Öffnen beraubt und bildete in Folge dessen keine einzige ihrer weiblichen Blumen zur Frucht aus.»

Hr. Naudin wird dadurch in seiner Ansicht bestätigt, dass diöcische Pflanzen mehr zur Samenbildung ohne Befruchtung geneigt sind, als monöcische.

Wir haben schon darauf hingewiesen, dass *Ricinus* grosse und wenige Blumen besitzt und daher leichter durch ein Experiment vor der Befruchtung mit dem eignen Pollen bewahrt werden könne. Der gleiche Fall ist es mit *Ecbalium*.

Wenn wir nun annehmen wollen, dass *Bryonia* zwischen den weiblichen Blumen weder einzelne männliche Blumen entwickele, noch in den vielen weiblichen Blumen derselben einzelne Antheren zur Ausbildung kommen würden (wir selbst haben diese Pflanze nicht beobachtet), so müsste es allerdings auffallen, dass *Ricinus* und *Ecbalium* bei unterdrückter Befruchtung keinen Samen ansetzten, während *Bryonia* Samen trug. Wenn es uns wahrscheinlich ist, dass *Bryonia* durch Insekten oder in der Luft schwebende Pollenkörner befruchtet ward, warum sollte nicht das Gleiche mit *Ecbalium* und *Ricinus* stattfinden?

In dieser Beziehung wirken aber noch eine Masse anderer Umstände mit, welche alle abgewogen werden müssen, bevor man einen Schluss zu machen wagen darf. Als solche Umstände nennen wir, Insekten welche vorzugsweise einzelne Pflanzenarten aufsuchen, die Masse des Pollens, den die meisten zweihäusigen Pflanzen produciren, und endlich die Natur des Pollens ob solcher leicht verstäubt und also von der Luft fortgetragen wird, oder ob er etwas klebrig ist und also den die Blumen besuchenden Insekten mehr oder weniger leicht anklebt.

15. **Radlkofer.**

Radlkofer[2]) nimmt die *Parthenogenesis* bei Thieren und Pflanzen als festgestellte Thatsache an. Zunächst stützt er sich auf *Coeloboyyne ilicifolia*. Es seien, so sagt er, in Europa nur weibliche Exemplare dieser Pflanze, hermaphrodite Blumen könnten nach Bau und Structur zu schliessen, bei ihr gar nicht vorkommen und sollten einzelne männliche Blumen an den weiblichen Exemplaren auftreten, so könnten diese der Beobachtung sich nicht entziehen. Alle Botaniker, welche Gelegenheit hatten, die weibliche *Coeloboyyne* zu untersuchen,

---

[1]) Nach unserer Ansicht beweist dieser Fall gar nichts, sondern ist Naudin's Vermuthung, Insekten könnten die Befruchtung bewerkstelligt haben, wahrscheinlich die richtige. Dass die verschiedenen Individuen von perennirenden Pflanzen sich in Bezug auf Samentragen verschieden verhalten, wenn sie gleichmässig befruchtet werden, das ist eine alte Erfahrung. Je vorherrschender der Wuchs ins Kraut, je weniger tragen perennirende und baumartige Pflanzen Samen. Ebenso macht höheres Alter, fortgesetzte ungeschlechtliche Vermehrung etc., oft zum Samentragen weniger geneigt.

[2]) Radlkofer über wahre Parthenogenesis in Siebold und Kölliker Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. 4 Heft. 1857.

stimmten darin überein, dass männliche Organe an derselben entschieden nicht vorkommen. Ungeachtet dessen trage sie in Kew jährlich reife Samen und sei dort bereits die dritte oder vierte Generation weiblicher Pflanzen erzogen worden[1]).

Radlkofer hat die Fruchtknoten und jungen Früchtchen von *Coelobogyne* in den verschiedenen Stadien deren Entwickelung untersucht. Unter 21 untersuchten Fruchtknoten fand er nur auf einer einzigen Narbe ein Pollenkorn, welches jedoch vertrocknet war und ausserdem keine Spur von Pollenschläuchen im Innern des Fruchtknotens, während solche bei verwandten *Euphorbiaceen* in ähnlichem Entwickelungszustande von Radlkofer nachgewiesen wurden[2]). In den jungen Embryosäcken fand er 3 Keimbläschen, von denen sich bald 1, bald 2, bald alle 3 zu jungen Embryonen entwickelten. Radlkofer schliesst daraus, dass bei *Coelobogyne* sich wirklich das Keimbläschen im Embryosack, ohne befruchtet zu sein, zum wahren Embryo entwickele. Einen Beleg für die Richtigkeit dieser Annahme findet er in dem Verhalten der Narbe von *Coelobogyne*, indem diese, wie schon Smith beobachtet, bis kurz vor der Samenreife frisch bleibe und sogar noch wachse, während sie bei befruchteten Fruchtknoten anderer Pflanzen, bald nach der Befruchtung abtrockne. Radlkofer stellt dies mit den Beobachtungen Naudins an den Hanfpflanzen zusammen. Hier behauptet er, dass diese Versuche zu einer Zeit gemacht worden seien, als die Hanfpflanzen auf dem Felde noch nicht geblühet hätten, also von einer Einwirkung des Pollens anderer Pflanzen des Hanfes nicht habe die Rede sein können, was wir wenigstens in Naudins Bericht nicht lasen. Ebenso sagt er, habe er eine dieser Versuchspflanzen gesehen,

[1]) Radlkofer scheint die *Coelobogyne* selbst nicht beobachtet zu haben und seine Schlüsse nur aus der Beobachtung und Untersuchung der Samen derselben, sowie aus dem was er über die Pflanze gehört, gezogen zu haben. Soviel uns bekannt hat *Coelobogyne* in Europäischen Gärten bis jetzt nur in Kew und Berlin geblühet. Nach Berlin kam die Pflanze zwar von Kew, aber noch bevor sie Smith als *Coelobogyne* beschrieb, als *Sapium*. Auch der Petersburger Garten kultivirt Exemplare derselben, die ebenfalls wahrscheinlich in den 30ger Jahren als *Sapium biberifolium* aus Kew kamen. Vor 2 Jahren endlich erhielten wir noch eine kleine Pflanze aus Kew. Keine dieser Pflanzen hat aber bei uns in Petersburg bis jetzt geblühet. Die *Coelobogyne* scheint, so weit wir sie kennen, eine sehr langsam wachsende Pflanze zu sein. Sehr wahrscheinlich haben ausser den im Berliner Botanischen Garten und in Kew befindlichen Exemplaren, bis jetzt noch keine der Abkömmlinge von den ursprünglich durch Cunningham eingeführten Exemplaren geblühet. Es kann hier also durchaus nicht die Rede von einer dritten oder vierten Generation weiblicher Pflanzen sein, sondern es ist sogar sehr zweifelhaft, ob unter den vielen Exemplaren der ersten Generation, die noch nicht geblühet haben, nicht etwa auch männliche Exemplare sich noch finden werden.

Es ist uns ferner bekannt, dass die *Coelobogyne* schon von vielen namhaften Botanikern beobachtet ward. Beobachtet während der Zeit ihrer Blüthe ward sie aber nur von Smith und A. Braun und ist leider auch noch nicht die Aussicht vorhanden, dass blühende Exemplare in nächster Zukunft der gründlichen Beobachtung anderer zugänglich werden dürften. Dass sie keine deutliche männliche Blumen bis jetzt in Europa entwickelte, das scheint allerdings sicher, ob aber durchaus keine Pollenentwickelung bei derselben stattfinde, scheint uns noch nicht ausgemacht.

[2]) Dieses Verhalten ist allerdings auffallend, aber kein Beweis gegen die Befruchtung. Bei gewöhnlichen der Befruchtung ausgesetzten Pflanzen kommt gemeiniglich eine grosse Menge von Pollenkörnern auf einer Narbe zur Entwicklung, die natürlich leicht aufzufinden. Wenn nun *Coelobogyne* blos durch einzelne Pollenkörner befruchtet wird, so müssen diese natürlich viel schwerer aufzufinden sein und können leicht der Beobachtung entgehen. Wir besitzen in Fischers Herbarium ein Exemplar dieser Pflanze mit Früchten, aber alle sind hohl und ohne Embryo. Auch bei den kultivirten setzen nicht alle an, viele sind hohl etc., so dass dies schon auf mangelhafte Befruchtung hinweisen würde.

(E. R.)

welche gerade daran gewesen sei, ihre Früchte zu reifen, und alle diese reifenden Früchtchen seien noch von den langen federigen Narben, die noch keine Spur von Verwelkung zeigten, gekrönt gewesen und zwar zu einer Zeit, zu welcher der Einwirkung von Pollen ausgesetzt gewesene Fruchtknoten längst ihre Narben verloren hatten. Die gleiche Beobachtung habe er an einem Exemplare von *Mercurialis annua* gemacht, welches Thuret in Cherbourg zur Controlle des Versuches von Naudin unter Ausschluss von Männchen in einem abgeschlossenen Gemache erzogen habe. Auch hier seien die fast reifen Früchtchen noch mit grossen frischen Narben gekrönt gewesen, während sie bei mit männlichen Exemplaren zusammen vegetirenden Pflanzen, schon bald nach der Schwellung des Fruchtknotens verwelkten und abfielen. Dieses abweichende Verhalten der Narben könne keinem andern Umstande zugeschrieben werden, als dem, dass sie der Einwirkung des Pollens nicht ausgesetzt waren und dass ihre Zellen keinen Theil ihres Inhaltes an die aus den Pollenkörnern sich entwickelnden Schläuche abzugeben hatten[1]).

Diese Beobachtung bei *Cannabis* und *Mercurialis*, so fährt Radlkofer fort, ergänzen die oben angeführte Wahrnehmung, über das eigentliche Verhalten der Narben von *Coeloboyyne* in geeigneter Weise, um den Zweifel der dort noch sich regen dürfte, vollständig zu elimi-

---

[1]) Der Eifer hat hier einen so tüchtigen Beobachter wie Radlkofer ist, zu weit hingerissen. Die Narben bleiben bei *Cannabis* stets etwas länger als bei andern Pflanzen frisch. Bei regelmässig befruchteten Fruchtknoten sah ich sie länger frisch bleiben als bei solchen, die nicht befruchtet wurden und die darum nebst dem Fruchtknoten bald abwelkten. Eine Vergleichung mit regelmässig befruchteten Pflanzen von *Cannabis* kann Radlkofer schon deshalb nicht angestellt haben, weil er behauptet, dass Naudins Experiment zu einer andern Zeit vorgenommen worden sei, als die Hanfpflanzen auf dem Felde geblühet hätten. Auch bei *Mercurialis* sah ich die Narben an im Gewächshaus stehenden und durch einzelne männliche Blumen befruchteten Exemplaren, länger frisch bleiben. Eine Vergleichung mit unter andern Verhältnissen vegetirenden Pflanzen konnte ich nicht vornehmen. Klotzsch bemerkt in einem Artikel, dessen wir noch speciell gedenken werden: «Die Annahme dass die Einwirkung des Pollens bei allen Pflanzen ein Welken, Einschrumpfen und zuletzt Ablösung des Griffelapparates zur Folge haben soll, ist eine unrichtige. Wenn das wirklich der Fall wäre, wie könnten denn überhaupt bleibende Griffelapparate im Pflanzenreich vorkommen? Bei den *Euphorbiaceen*, sind dieselben ohne Ausnahme bleibend.» Nees bildet schon die jungen Früchte von *Mercurialis* mit bleibenden Narben ab. Es ist allerdings möglich, dass Narben auf denen viele Pollenkörner zur Schlauchbildung gelangen, früher absterben als solche auf denen nur einzelne oder wenige zur Entwickelung kommen. Dieser letztere Fall findet nun jedenfalls bei solchen *Cannabis*- und *Mercurialis*-Pflanzen statt, die als Beweismittel für die *Parthenogenesis* dienen sollen. Einerseits zeigen die verhältnissmässig wenigen Samen, welche jene Pflanzen trugen, dass eben nur wenige Blumen zufällig befruchtet wurden und jede dieser wahrscheinlich nur von einem einzigen Pollenkorn. Als einen Beweis für die *Parthenogenesis* kann man dieses Verhalten der Narben nicht gebrauchen, denn wenn Radlkofers Ansicht die richtige ist, dass die Narben auf denen viele Pollenkörner zur Schlauchbildung gelangen, durch Stoffabgabe an diese zum frühern Abwelken kommen, so ist damit noch kein Beweis für die *Parthenogenesis* geleistet, sondern nur gezeigt, dass da wo nur einzelne Pollenkörner auf den Narben sich entwickeln, das Absterben der Narben eben nicht so frühzeitig stattfindet. Wir wiederholen es, dass da wo die Befruchtung verhindert wird, das Absterben der Narben nebst dem ganzen Fruchtknoten noch früher stattfindet, als bei befruchteten Pflanzen, da wenigstens bei *Cannabis* etc., nur die Befruchtung das Mittel ist, Fruchtknoten und Narben einer weitern Entwickelung entgegen zu führen. Wir gestehen es allerdings, dass wir in dieser Beziehung eben nur unsere Versuchspflanzen beobachteten. Radlkofer hat aber seinen, auf den ersten Anblick bestechenden Schluss, nur auf eine Anschauung von Naudin's und Thuret's Versuchspflanzen gebauet und wohl noch weniger als wir, Vergleichungen angestellt.

niren [1]). Es ist dieses Verhalten der Narben der sicherste Beweis dafür, dass der Abschluss des Pollens, in den Versuchen bei *Cannabis* und *Mercurialis* und in gleicher Weise bei *Coelobogyne* nicht blos wahrscheinlich, sondern wirklich ein vollkommener war (!?), und wir brauchen uns, um darüber gewiss zu sein, weder auf die Zulänglichkeit des künstlichen Abschlusses, noch auf die Untrüglichkeit unserer Augen zu verlassen. Damit ist aber zugleich die Existenz der Parthenogenesis im Pflanzenreiche erwiesen (!!??).

So Radlkofer, der jedoch jene Samen von *Cannabis* und *Mercurialis*, die ohne Befruchtung gereift sein sollen, mikroskopisch nicht untersuchte.

Radlkofer giebt uns mithin das Frischbleiben der Narben bei unbefruchtet zur Entwicklung kommenden Fruchtknoten, Naudin dagegen die Behauptung, dass nur diöcische Pflanzen, ohne Befruchtung keimfähige Samen entwickeln könnten, als theoretisches Resultat.

16. **A. Braun und Th. Deecke** (Bergsma).

Alex. Braun und Th. Deecke [2]) arbeiteten noch etwas früher als Radlkofer, veröffentlichten aber später ihre wichtige Arbeit über *Parthenogenesis*. Nach einer allgemeinen Einleitung aus der zugleich hervorgeht, dass auch Prof. Bergsma in Utrecht sich dahin ausgesprochen, dass die wirkliche *Parthenogenesis* bei Pflanzen sehr wahrscheinlich sei, werden kurz die wichtigsten Versuche in dieser Beziehung erwähnt und als Pflanzen bei denen eine Samenbildung ohne Befruchtung wirklich stattgefunden zu haben scheine, aufgeführt: *Cannabis sativa*, *Spinacia oleracea*, *Lychnis dioica*, *Mercurialis annua*, *Bryonia dioica*, *Datisca cannabina*, *Pistacia narbonensis*, *Cucurbita Melopepo*, *Cucurbita Citrullus*, *Urtica pilulifera* (nur nach Henschel und daher von uns gar nicht erwähnt) und *Ficus Carica*.

Alex. Braun stimmt insofern mit Gärtner überein, dass er alle diese Versuche nicht für vollständig beweisend ansieht, dass aber das Resultat dieser Versuche ohne vorgefasste Meinung nach der Wahrscheinlichkeit beurtheilt, zu Gunsten der Samenbildung ohne vorausgegangene Befruchtung ausfalle.

Den wirklichen Beweis, dass die *Parthenogenesis* im Pflanzenreich existire, leiste aber die *Coelobogyne ilicifolia*.

Nachdem A. Braun die Geschichte der *Coelobogyne* mitgetheilt, erfahren wir, dass der Berliner Botanische Garten 3 ungefähr 20 Jahre alte weibliche Exemplare dieser Pflanze, von 2—2½ Fuss Höhe kultivirt. Dieselben blühen jährlich reichlich und setzen auch jährlich Frucht an. Männliche Blumen fand weder C. Bouché noch A. Braun selbst, welcher eine Pflanze eine Zeit lang auf seinem Zimmer beobachtete. Aus der Untersuchung der Samen ging hervor, dass viele derselben, die äusserlich vollkommen ausgebildet erschienen, taub waren,

[1]) Gegentheils wenn der Beweis von uns geleistet wird, dass *Cannabis* etc. nur unterm Einfluss von Befruchtung Samen ansetzen, dürfte das gleichmässige Verhalten der Narben dieser Pflanzen darauf hinweisen, dass auch bei *Coelobogyne* wahrscheinlich eine Befruchtung durch einzelne Pollenkörner stattgefunden habe. (E. R.)

[2]) Ueber Parthenogenesis bei Pflanzen von Herrn A. Braun in den Physikalischen Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1856, pag. 311.

d. h. einen vertrockneten eingeschrumpften Eiweisskörper und keinen erkennbaren Embryo enthielten, andere aber vollkommen ausgebildet waren und einen Keimling enthielten. In den Jahren 1852 und 1853 gemachte Aussaaten lieferten zahlreiche Pflanzen, von denen aber noch keine geblühet hat.

Eine wirkliche Befruchtung, sagt A. Braun mit vollem Rechte, ist nur durch Pollen möglich. Dennoch unterwarf er auch die schon erwähnten Drüsen einer genauern Prüfung. Dieselben sind grünlich, halbkugelig, oben abgeflacht und in der Mitte tragen sie eine kreisrunde glänzende Scheibe, welche zu Zeiten einen klebrigen Saft absondert. Die Scheibe besteht aus einer Lage stäbchenförmiger, senkrechter, dicht gedrängter Zellen, welche von einer dicken *Cuticula* bedeckt sind; das andere Gewebe der Drüse besteht dagegen aus grossen, dünnwandigen, polygonalen Zellen mit deutlichem Kerne. Sie stimmen in ihrem Baue mit denen gänzlich überein, die bei *Ricinus* am obern Ende oder andern Theilen des Blattstiels sitzen. Bei den meisten *Malpighiaceen* kommen an der Aussenseite des Kelches ähnliche Drüsen vor. Auch an den Blüthenhüllen und Brakteen anderer *Euphorbiaceen* finden sich häufig Drüsen, so bei *Euphorbia* an der krugförmigen Hülle; bei *Sapium*, *Microstachys*, *Excoecaria*, *Adenopeltis*, *Hippomane* an den Brakteen, bei *Conceveiba* an Kelch und Brakteen. In allen diesen Fällen stehen die Drüsen in keinem Verhältniss zur Befruchtung und bei *Coelobogyne* dürfte es sich unzweifelhaft ebenso verhalten.

Ueber Bildung des Keimlings im vollkommenen Samen stellte Herr Th. Deecke umfassende Untersuchungen an.

Das Ei ist wie bei andern *Euphorbiaceen* hängend, gegenläufig und besteht aus 2 Eihüllen, von denen die äussere die innere überragt und gegen den Eimund hin wulstig verdickt ist. Der Eikern ist nach oben etwas gespitzt und umschliesst einen engen langgestreckten Embryosack, der den grössten Theil der Länge des Kernes einnimmt. Im obern Theil desselben bilden sich zwei Keimbläschen. Im übrigen Theil des Embryos bemerkt man Anfänge zur freien Zellbildung, die mit Bildung des *Endosperms* endigt. Etwas später theilt sich eins der Keimbläschen durch eine horizontale Wand in 2 Zellen. Die obere dieser beiden Zellen wächst nicht weiter, sondern bleibt unverändert nach oben dem Embryosack angeheftet, als kurzer Embryoträger. Aus der untern Zelle, die auch einen deutlichen Kern zeigt, bildet sich dagegen durch wiederholte wechselnde Quer- und Längstheilung zunächst die Embryokugel, die dann in gewöhnlicher Weise nach den entgegengesetzten Seiten die Anfänge der Keimblätter treibt.

Somit verhält sich nach Deeckes Darstellung die Bildung des Keimlings selbst ganz so wie solche Radlkofer beschreibt, und übrigens analog andern *Euphorbiaceen*. Nur in sofern weichen beide Beobachter von einander ab, dass Radlkofer 3 Keimbläschen fand, und von diesen bald eins, bald 2 oder 3 zu jungen Embryonen sich entwickeln sah. Es ist zu vermuthen, dass bei Radlkofers Darstellung eine Verwechselung sich eingeschlichen hat, indem er wahrscheinlich die Entwickelung von 1—3 Eiern in jedem Fruchtknoten zum Samen andeuten wollte. Einmal und zwar bei einer der ersten von ihm untersuchten Blüthen,

fand Deecke auch einen Pollenschlauch, der sich etwas seitwärts vom Keimbläschen angesetzt hatte[1]). Da es ihm aber später nicht wieder gelang einen solchen Pollenschlauch zu finden, er ferner auch auf keiner der Narben ein Pollenkorn finden konnte, so nimmt Braun an, dass dieser Pollenschlauch von einem zufällig auf die Narbe gefallenen fremden Pollenkorne hergerührt habe. Freilich gesteht er selbst, dass ihm ausser den Fällen der Bastardbildungen, keine Fälle bekannt seien, wo fremde Pollenkörner auf den Narben anderer Pflanzen Schläuche bildeten.

A. Braun zeigt nun, dass von *Coelobogyne* im Vaterlande auch die männliche Pflanze vorkomme, welche ihre Blumen in Kätzchen trage. Es sei mithin dieselbe eine diöcische Pflanze und in Europas Gärten nur die weibliche Pflanze eingeführt[2]).

Es folgt nun eine genaue Beschreibung der Pflanze, sowie von den männlichen und weiblichen Blumentheilen derselben.

Als ein ferneres Beispiel für die Parthenogenesis führt A. Braun *Chara crinita* an, von der an den meisten Standorten bis jetzt ausschliesslich weibliche Exemplare aufgefunden worden seien, die aber dennoch jährlich Sporenfrüchte tragen und aus denselben keimen. Diese Darstellung von unserem berühmtesten Kenner der *Charen* ist ungemein interessant. Wie es sich damit verhalten möge, wollen wir später zu erklären versuchen, hier nur soviel, dass wir die *Charen* und die meisten andern *Cryptogamen* nicht in eine Linie mit den *Phanerogamen* setzen können.

A. Braun stellt nun zum Schluss noch allgemeine Betrachtungen über die Bedeutung der Organe und den ersten Anfang des künftigen Individuums in der Pflanzenwelt an. Er zeigt dass die *Coniferen* die Brücke zu den *Cryptogamen* bilden, dass der mit Zellengewebe gefüllte Embryosack der *Conifere* dem *Prothallium* der Gefässcryptogamen analog sei.

Mit Mohl nimmt auch A. Braun an, dass für die *Cryptogamen* die Spore, für die *Phanerogamen* der Embryosack als analoge Bildungen hinzustellen seien. Ferner demonstrirt er, dass Radlkofer's Annahme, der das Prothallium der Farren als eine analoge Bildung mit den Blüthenbildungen der *Phanerogamen* betrachte, durchaus unlogisch sei, sobald man zugebe, dass der mit Zellgewebe erfüllte Embryosack der *Coniferen* dem *Prothallium* der Gefässcryptogamen analog sei.

Es wird nun diese Ansicht mit der dem Verfasser eigenen Klarheit durchgeführt. Zunächst zeigt er, dass Spore und Embryosack stets analoge Bildungen seien, dass ferner der Embryoträger der *Phanerogamen*, der aus der obern Zelle des schon vor der Befruchtung entstandenen Keimbläschens hervorgeht, und der meist mehrzellig, bei einzelnen Familien, aber wie gerade bei den *Euphorbiaceen* jedoch einzellig bleibt, dem Vorkeim oder *Prothallium*,

---

[1]) Auf einer besondern Tafel ist die Entwickelung des Embryos dargestellt und auch eine Abbildung dieses Präparates gegeben.

[2]) Wahrscheinlich dürften sich unter den zahlreichen Exemplaren die noch nicht blüheten, auch männliche finden. Der weit verbreitete Irrthum mehrerer Generationen nur weiblicher Pflanzen, ist auch in dieser Abhandlung wiederholt.

als Vorkeim zweiter Ordnung, zu vergleichen sei. Die Spitzenzelle desselben entwickelt sich dann direct zum Keimling des blattbildenden Stockes.

Bei den *Gymnospermen* sei der ganze mit Endosperm gefüllte Embryosack ein thallusartiger Vorkeim. Die in demselben entstehenden *Corpuscula* sind die Mutterzellen zahlreicher Keimbläschen, die erst nach der Befruchtung einen zusammengesetzten Vorkeim zweiter Ordnung bilden.

Es wird nun diese Ansicht auch für den Theil der *Cryptogamen* durchgeführt, deren Befruchtungsgeschichte schon bekannt. Wir werden auf diese wichtige Auseinandersetzung am Schlusse noch einmal zurückkommen, finden aber durch sie die Möglichkeit einer Bildung des Embryos ohne Befruchtung eben nicht wahrscheinlicher gemacht. Embryosack und Samenhüllen, wie die Spore können sich ohne Befruchtung bis auf einen gewissen Grad entwickeln, immer aber bleiben es einzelne, entweder direkt im Embryosack gebildete Zellen (Keimbläschen) oder innerhalb von Organen (*Archegonien*) entstandene Zellen, die sich an dem aus der Spore hervorgegangenen Vorkeime gebildet haben, durch deren Befruchtung erst die Entwickelung der laubbildenden Achse oder der zur Erzeugung der Sporen bestimmten Gebilde geweckt werden muss.

A. Braun sucht durch diese Verhältnisse die Möglichkeit der Parthenogenesis im Pflanzenreiche in der folgenden Weise zu erklären. Er stellt zunächst die Ansicht auf, dass der Embryosack, die Spore der Farren etc. die Anfangsbildung des zukünftigen Individuums seien, und dieses also schon auf ungeschlechtlichem Wege von der Pflanze, unabhängig von der Befruchtung, vorgebildet werde. Es hänge mithin die erste Entstehung des Keimes nicht von der Befruchtung ab, sondern durch die Befruchtung werde nur die Entwicklung des Keimes geweckt. Bei parthenogenetisch sich entwickelnden Keimen, falle nur einfach der Moment der Befruchtung aus, und der ausgebildete Keim, entwickele sich auf ungeschlechtlichem Wege. Somit stimmten geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung in so fern mit einander überein, dass Keime neuer Individuen unabhängig vom andern Geschlechte angelegt werden.

Verhält es sich so, so sagt er (pag. 353. l. c.), so kann allerdings von einer Geschichte des Individuums vor der Befruchtung die Rede sein, die beim Thiere zwar nur die Bildungsgeschichte des Eies umfasst, im Pflanzenreiche aber eine weit grössere Ausdehnung gewinnt. Es kommt bei Behandlung dieses Gegenstandes vor allem darauf an, dass der richtige Ausganspunkt gefunden werde, dass die Betrachtung auch wirklich mit dem Anfange anfange.» — Wir haben hierauf Folgendes zu entgegnen.

Wenn wir uns mit der Deutung des Embryosackes und der Farrenspore als analoger Bildungen, vollständig einverstanden erklären konnten, so scheint uns A. Braun nicht den richtigen Standpunkt einzunehmen, wenn er die Behauptung aufstellt, dass der Embryosack der *Phanerogamen* in gleicher Weise die Anfangsbildung zum neuen Individuum sei, wie die Spore der Farren etc.

Die Spore der Farren, wenn sie getrennt vom Mutter-Individuum ihre selbstständige

Entwickelung eingeht bis zum Vorkeim, welcher die Geschlechtsorgane trägt, stellt allerdings ein selbstständiges, anfangs auf ungeschlechtlichem Wege sich entwickelndes Individuum dar. Es ist das aber ein Individuum, welches zunächst nur die Bestimmung hat die Geschlechtsorgane zu produciren. Das Keimbläschen in der Basalzelle im Archegonium der Farren dagegen ist die Anfangsbildung einer neuen Bildungsreihe, da sich in Folge der Befruchtung aus demselben erst die laubbildende Achse entwickelt, ganz wie aus dem Keimbläschen der *Phaneroyamen* in Folge der Befruchtung der Embryo entsteht. Bei den *Mono-* und *Dicotyledonen*, da entsteht das Keimbläschen direkt im Embryosack, bei den *Gymnospermen* bildet sich der Embryosack mit der Pflanze verbunden zum Vorkeim um, und entwickelt dann später in seinem Innern die mit Keimbläschen gefüllten Corpuscula. Durch die Befruchtung gehen aus einigen dieser Keimbläschen Embryonen hervor. Bei den *Rhizocarpeen* und Farren geht die Entwickelung der Spore (Embryosackes) getrennt von der Pflanze, schon als individualisirtes Gebilde, vor sich und bei den Moosen wird die Vegetationsreihe bis zur Entwickelung der Keimbläschen noch weiter hinausgerückt. Auch die Sporen der Moose und Lebermoose sind allerdings ungeschlechtliche, dem Embryosack analoge Gebilde. Sie bilden zunächst einen confervenartigen oder thallusartigen Vorkeim, dieser entwickelt ohne Befruchtung die Knöspchen, aus denen die beblätterte Achse hervorgeht. Diese letztere trägt die Geschlechtsorgane. Aus der Befruchtung des Keimbläschens in der Basalzelle des Archegoniums entsteht die Sporenfrucht, in deren Innern die Bildung der Sporen (Embryosäcke) stattfindet.

Die Sporen der Moose und Lebermoose wären also in gleicher Weise das ungeschlechtliche Produkt eines durch die Befruchtung entstandenen blattlosen Gebildes, wie die Sporen der Farren von den Wedeln derselben in besonderen Capselfrüchten erzeugt werden. Der Cyclus der Achsen und Laubbildung findet bei den Farren nur nach der Befruchtung statt, bei den Moosen und Lebermoosen ist er dagegen vor diese gerückt. Den Beweis, dass diese von A. Braun aufgestellte Ansicht die richtige, liefern unter andern auch jene Fälle, wo einzelne sich trennende Knospenzellen dieser Pflanzen den ganz gleichen Entwickelungsgang zeigen.

Wir haben hier also 2 Bildungsreihen. Die eine beginnt mit dem Embryosack oder der Spore und endet mit der Bildung des Keimbläschens, die andere beginnt mit der Befruchtung des Keimbläschens und endet mit der Bildung des Embryosackes oder der Spore. Die letztere können wir die geschlechtliche, die andere die ungeschlechtliche Bildungsreihe nennen, die bei der Erzeugung der Geschlechts-Individuen thätig ist.

Bei den *Mono-* und *Dicotyledonen* fällt die ungeschlechtliche Bildungsreihe mit der geschlechtlichen fast zusammen. Von den *Gymnospermen* an tritt die ungeschlechtliche Bildungsreihe nach den *Cryptoyamen* hin als immer mehr an Umfang zunehmendes Glied, neben der geschlechtlichen Bildungsreihe auf, bis zuletzt die geschlechtliche Bildungsreihe mit der ungeschlechtlichen fast oder ganz zusammen fällt.

Wir können aber weder den Embryosack noch das Keimbläschen als die

stetige Anfangsbildung des Individuums ansehen, beides sind nur die Anfangsbildungen zu 2 bestimmten Cyclen in der normalen Hervorbildung der zur Fortpflanzung der Art (nicht des Individuums) bestimmten Keime (Geschlechts-Individuen) und beides können die Anfangs- oder auch die Ausgangsbildungen des neuen Individuums sein. Bei den *Phanerogamen* ist das Keimbläschen, bei den *Cryptogamen* die Spore, die Anfangsbildung des neuen Individuums, ohne dass beide deshalb gleichwerthige Gebilde sind. Zwischen der Spore der *Cryptogamen* und dem Embryosack der *Phanerogamen*, besteht ungefähr der gleiche Unterschied, wie zwischen der Knospe die sich am Baume zum Zweige entwickelt und der andern die sich trennt und als eigenes Individuum sich entwickelt.

Wir halten dabei an dem Begriff vom Individuum fest, wie wir solchen pag. 107 die Pflanze und ihr Leben etc. gaben, dass nämlich nur das als Individuum betrachtet werden kann, was mit keiner Mutterpflanze mehr in Verbindung steht, was anatomisch und physiologisch zu einem Ganzen verbunden und zu einer durchaus selbständigen Entwickelung befähigt ist und können bei dieser Gelegenheit auf den alten und neuen Streit über das was als Individuum zu betrachten ist, nicht eintreten.

17. Klotzsch.

Klotzsch erhebt[1]) gegen die *Parthenogenesis* bei *Coelobogyne* im Jahre 1857 einen wichtigen Einwurf. Nachdem er darauf hingewiesen, wie gerade alles Wunderbare, Räthselhafte mit besonderer Aufmerksamkeit aufgefasst werde und dass hierzu auch die von Siebold wieder angeregte Frage über *Parthenogenesis* gehöre, wirft er einen kurzen Blick auf *Coelobogyne* und auf das was über dieselbe von Smith, Radlkofer und Deecke gesagt worden. Er nimmt mit Smith, Radlkofer, Deecke an, dass von einer Befruchtung bei *Coelobogyne* wirklich keine Rede sein könne, dagegen findet nach seinen Untersuchungen bei den zur Entwickelung gelangenden Samen auch keine Embryobildung, sondern nur eine Knospenbildung statt.

Die *Euphorbiaceen*, so sagt er, besitzen ohne Ausnahme umgewendete (anatrope) Samenknospen. Durchschneidet man die reifen Samen derselben, der Länge und der Fläche der *Cotyledonen* nach, so findet man inmitten eines fleischigen ölhaltigen Eiweisses, einen sehr entwickelten geraden Embryo, dessen kräftige *Radicula* nach oben gerichtet, dem Keimhüllenmunde zugewendet ist, während die grossen, flachen, mit den Oberflächen an einander gelegten Cotyledonen, welche die Plumula einschliessen, der Chalaza zuneigen. Durchschneidet man dagegen in der gleichen Weise, die zur Entwickelung gelangten Samen der *Coelobogyne ilicifolia*, so ist von einem frei entwickelten Embryo nichts wahrzunehmen. Ebenso ist von einem Würzelchen, das dem Keimhüllenmunde zugewendet sein müsste und

[1]) Die sogenannte Parthenogenesis von *Coelobogyne ilicifolia*, Bonplandia 1857 pag. 209. Zur Zeit als Klotzsch die Bonplandia interimistisch redigirte, ohne Unterschrift veröffentlicht.

von den beiden der Chalaza zugewendeten Samenlappen, auch nicht eine Spur aufzufinden. Statt dessen findet man inmitten einer fleischigen Umgebung, die nicht als Eiweisskörper betrachtet werden kann, weil sie keine concreten Stoffe innerhalb ihrer Zellen abgelagert enthält, einen elliptischen Körper, der aus einem Convolut von blattartigen Ansätzen besteht und mittelst eines scheibenförmigen Fusses von dichterer Consistenz, als alles übrige Zellgewebe, innerhalb der Samenhäute mit der Chalaza fest verwachsen ist.

Klotzsch deutet daher den Keim in den Samen von *Coelobogyne* als eine Sprossbildung (Knospenbildung) im Innern der Samenhülle, die mit der Entwickelung eines freien Embryo's gar nicht verglichen werden könne und hat, wenn sich die Bildung verhält, wie solche von ihm beschrieben wird, auch sicherlich recht. Radlkofer, A. Braun und Deecke halten dagegen auch jetzt noch an ihrer Ansicht fest, dass es ein wahrer Embryo sei, der sich durchaus analog anderen Embryonen bilde.

Schliesslich giebt Klotzsch seine von uns schon angezogene Ansicht, über das Verhalten der Griffel.

18. F. J. Ruprecht.

F. J. Ruprecht[1]) weist in einer kurzen Einleitung auf die neuesten Beobachtungen über *Coelobogyne* hin. Die Ansicht welche Klotzsch, der Deeckes Arbeit schon kannte, über den vermeintlichen Embryo ausspricht, würde die richtige sein, wenn jene Lage des Keims und des Würzelchens, wie solche Klotzsch angiebt, vorhanden ist. Es fehlt aber bis jetzt Beschreibung und Abbildung des ausgebildeten Samens. Weder Smith, noch Braun, noch Klotzsch geben eine Abbildung und diese müsste entscheidend sein. Allerdings hat A. Braun auf der Naturforscher-Versammlung zu Bonn keimende Pflanzen vorgezeigt, die deutlich *Radicula* und 2 Cotyledonen zeigten. Dies aber genügt nicht, denn auch ein Knospengebilde könnte eine ähnliche Art des Wachsthums zeigen.

Nachdem von Ruprecht dies mit vollem Rechte hervorgehoben ward, stellt derselbe die gleiche Frage für die Samen von *Cannabis* etc., die ohne Befruchtung entstanden sein sollen, ob diese nicht vielleicht auch anstatt des Embryo's eine Knospe ausgebildet hätten. Es ist die gleiche Frage auch früher von Bernhardi und dem Referenten gestellt worden.

Keiner der Autoren, so sagt Ruprecht, gebe eine vollständige Beschreibung der so gezeitigten Samen. Nur Gasparini spreche deutlicher vom Embryo der Feige. Es sei dies aber ein zweifelhafter Fall, da die Bedeutung der Pollinidien die hier am Ovulum vorkommen, noch nicht gehörig erforscht sei.

Interessant ist ein von C. A. Meyer im Jahre 1852 der Akademie mitgetheilter Fall von Samenbildung, der jedoch nicht veröffentlicht ward. Das Manuscript welches C. A. Meyer darüber hinterlassen hat, führt den Titel: «Einige Bemerkungen über *Sorocea* und die Untergattung *Botryurus*.

[1]) Ein Beitrag zur Frage über die Parthenogenesis bei Pflanzen im Bulletin de l'Acad. Imp. de S. Pétersbourg 1858 pag. 274. N° 378.

C. A. M. bespricht hier eine im K. Bot. Garten befindliche *Sorocea*, welche durchaus diöcisch ist und von der im Jahre 52 ein weibliches Exemplar vollkommen ausgebildete Frucht brachte, obgleich es weit entfernt von einem männlichen Exemplare im Gewächshause stand [1]). Der eigentliche Embryo, mit 2 ungleich grossen Samenlappen, war in allen Samen vollständig entwickelt.

Ruprecht spricht sich im übrigen weder für noch gegen die Parthenogenesis aus.

19) Radlkofer's neueste Schrift.

Nachdem wir das Vorhergehende schon niedergeschrieben, ging uns Radlkofer's neueste Arbeit über das Verhältniss der *Parthenogenesis* zu den andern Fortpflanzungsarten, Leipzig bei W. Engelmann 1858, zu.

Es ist diese Schrift vornehmlich gegen A. Braun's Erklärung der *Parthenogenesis* gerichtet.

Zunächst spricht der Verfasser über A. Braun's Ansicht, dass der Keim zum neuen Individuum schon vor der Befruchtung von der Pflanze vorgebildet sei, eine Ansicht, die wir mit A. Braun theilen, soweit unter Keim das unbefruchtete Keimbläschen oder die Sporenzelle verstanden ist, und die wir von unserm Standpunkte aus beleuchtet und besprochen haben. Radlkofer liest jedoch aus Braun's Darstellung heraus, dass derselbe damit nicht nur den uralten Streit über die *Praeexistenz*, dass nämlich die organischen Wesen schon vor der Zeugung existirten, wieder herauf beschworen habe, sondern auch selbst genau genommen diese Ansicht vertrete. Er reihet hieran moralische Betrachtungen, die jedenfalls besser weggeblieben wären, um so mehr als ja Braun nur von der Vorbildung des Keimes spricht, dessen Leben erst durch die Befruchtung im gewöhnlichen Falle geweckt werden müsse, wenn gleich er als Vertreter der Parthenogenesis annimmt, dass dieser Keim in einzelnen Fällen sich auch ohne die Befruchtung zum Individuum ausbilde.

A. Braun hat allerdings den Unterschied zwischen der geschlechtlichen und ungeschlechtlichen Bildungsreihe nicht scharf genug hervorgehoben, was von seiner wohl irrthümlichen Ansicht, dass der Embryosack und die analoge Spore, als die stete Anfangsbildung des Geschlechts-Individuums zu betrachten sei, bedingt wird; — er hat diesen Unterschied aber deutlich genug angedeutet, indem er ausdrücklich sagt, dass «geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung darin übereinstimmten, dass die Keime neuer Individuen unabhängig von dem andern Geschlechte angelegt würden».

Radlkofer zeigt nun zunächst, dass die Parthenogenesis eine ungeschlechtliche Zeugung sei, was, wenn der endgültige Beweis für solche geliefert werden sollte, aus der

[1]) Befruchtung durch Insekten oder irgend ein anderer Zufall dürfte hier wahrscheinlich sein, da während der Blüthe nicht beobachtet ward. Wie weit die Exemplare von einander standen, scheint C. A. M. nicht bemerkt zu haben. (E. R.)

Sache selbst allerdings hervorgeht. Wir übergehen die Reflexionen die er hieran knüpft, da wir die Parthenogenesis, in der Weise, wie sie von Radlkofer und A. Braun aufgefasst wird, noch keineswegs als ausgemachte Thatsache hinnehmen.

S. 24 sagt Radlkofer, für mich ist trotz der Parthenogenesis das unbefruchtete Ei, wofür es zuvor gehalten wurde, — nicht ein Keim, sondern nur eine keimfähige Anlage. Wohl aber ist mir die der ungeschlechtlichen Vermehrung als Substrat dienende Zelle ein wirklicher Keim, entsprechend dem befruchteten Eie».

Liegt hierin nicht ein innerer Widerspruch? Das unbefruchtete Ei im Pflanzenreiche ist das Keimbläschen, dieses ist vor der Befruchtung und auch in solchen Embryosäcken die nicht befruchtet werden vorhanden. Es ist also die ungeschlechtlich vorgebildete keimfähige Anlage. Nehmen wir die Parthenogenesis aber als erwiesen an, so geht aus dem Keimbläschen auch ohne Befruchtung ein normaler Embryo hervor, in diesem Falle wäre es also ein wirklicher Keim, entsprechend dem befruchteten Eie. Dieser hier von dem Verfechter der Parthenogenesis selbst so klar hingestellte Widerspruch, dass die Anlage eines Keimes, die sich nach allseitigen Erfahrungen nur unterm Einfluss der Befruchtung entwickeln kann, in den Fällen der Parthenogenesis auch ohne Befruchtung auf ganz die gleiche Weise entwickelungsfähig sein soll, das ist gerade der Grund, weshalb wir nie an eine Parthenogenesis, wie sie Radlkofer und Braun darstellen, geglaubt haben und weswegen solche höchst wahrscheinlich auch in Wahrheit in dieser Weise nicht stattfinden wird. Jeder Vertreter der Parthenogenesis, und wenn seine Ansichten noch so geistreich begründet sind, wird bei scharfer Auffassung hier in Widerspruch mit sich selbst gerathen müssen, anstatt Erklärung des behaupteten Faktums zu geben.

Im zweiten Theil der Schrift stimmt nun Radlkofer mit voller Ueberzeugung, der nach morphologischen Anhaltspunkten gemachten Zusammenstellung, über Analogie des Embryosackes und der Spore der höhern *Cryptogamen* bei. Dagegen sucht er darzuthun, dass man die morphologische und physiologische Auffassung vollständig getrennt zu halten habe, und vertheidigt aus physiologischen Gründen seine frühere Auffassung der Analogie vom Vorkeim der Farren mit den Blumen der höhern Pflanzen. Als durchaus nicht zur Frage über Parthenogenesis gehörig, können wir diese Auseinandersetzungen, die theilweis auf ein schon bei Besprechung der Braun'schen Schrift kurz beleuchtetes Gebiet eintreten, hier übergehen. Um wahr zu sein, müssen wir aber gestehen, dass man allerdings wohl berechtigt ist, den verschiedenen Gebilden und Organen in den verschiedenen Classen des Gewächsreiches, vom morphologischen Standpunkte aus eine andere Analogie, als vom physiologischen zu unterbreiten. Individuum, Spore, Pollenkorn, Antheridien, Embryosack und Zelle des Archegoniums, liefern dazu manches Beispiel. Für die vergleichende Betrachtung der Familien des Pflanzenreichs untereinander, erscheint uns jedoch der morphologische Standpunkt der wichtigere und darum vielleicht auch der richtigere.

II. Darstellung und Besprechung meiner eigenen Erfahrungen und Versuche, nebst kurzer Würdigung der bis zur neuesten Zeit von andern Beobachtern für die Parthenogenesis gegebenen Beispiele.

1. Allgemeine Erfahrungen.

Nachdem wir im Vorhergehenden sahen, dass seitdem Spallanzani seine Beobachtungen machte, die Frage über die Parthenogenesis im Pflanzenreiche von Zeit zu Zeit wiederum auftauchte, und dass gerade jetzt sehr wichtige Autoritäten auf die Seite derer getreten sind, die die Parthenogenesis für's Pflanzenreich als erwiesen ansehen, so dürfte es fast gewagt erscheinen, auch jetzt noch für die gute alte Annahme kämpfen zu wollen, dass ein Embryo nur durch Befruchtung entstehen kann. Der Referent stand jedoch von jeher auf der Seite derer, die an eine Parthenogenesis im Pflanzenreiche nicht glaubten und gesteht es offen, dass er auch durch die neuerdings gemachten Beobachtungen, von der Möglichkeit einer Samenbildung ohne vorausgegangene Befruchtung nicht überzeugt worden ist. Derselbe sprach sich schon früher in diesem Sinne in der Gartenflora und in seinem Allgemeinen Gartenbuch (I Theil, die Pflanze und ihr Leben pag. 418) aus. Später als die neueren Beobachtungen Radlkofer's, Naudin's etc., die Ansicht der meisten Naturforscher umzustimmen begann, mahnte er zunächst zur Vorsicht in einem in der Bonplandia (1857 pag. 302) und in zwei andern in der Gartenflora (Jahrg. 57 pag. 322 und Jahrgang 58 pag. 100) veröffentlichten Artikeln, in welchen Beispiele von getrennt geschlechtlichen Pflanzen, die mittelst zufälliger Bildung von Antheren Samen bilden (*Chamaerops humilis*) und andere die bei verhinderter Befruchtung, anscheinend vollkommene Samen ohne Embryo ausbildeten (*Encephalartos longifolius* Lehm.), gegeben wurden. Endlich trat er in einem 1858 in No. 41 der Botanischen Zeitung von Mohl und Schlechtendahl abgedruckten Artikel, direkt gegen die Lehre von der Parthenogenis auf.

Das wichtigste aus diesen Artikeln wollen wir nebst unsern ferneren Versuchen im Nachfolgenden rekapituliren.

Zunächst dürfte es nicht überflüssig erscheinen, einige Worte über Anstellung und Ausführung von solchen Versuchen zu sagen, wenn diese auch in einer Frage von solcher Wichtigkeit beweiskräftig sein sollen.

Ueberblicken wir alle jene Versuche, welche mit Ausnahme von *Coelobogyne*, die wir noch besonders besprechen werden, in frühern Zeiten, wie jetzt angestellt wurden, um die Möglichkeit einer Samenbildung ohne Befruchtung zu erweisen, so müssen wir gestehen,

dass mit Ausnahme der von Spallanzani angestellten Versuche, kaum einer der spätern in einer Art und Weise ausgeführt wurde, dass er Beweiskraft besitzen könnte. Wenn es mir gelingen würde, auf die Weise wie Spallanzani beim Hanf und bei der Wassermelone zu Werke ging, keimfähige Samen zu erziehen, so würde auch ich die Parthenogenesis fürs Pflanzenreich als erwiesene Thatsache annehmen. Aus den Urtheilen seiner Zeitgenossen scheint es aber hervorzugehen, dass er entweder nicht umsichtig alles so beobachtete wie er doch selbst angiebt, oder nicht wahrheitsgetreu erzählte, wie das auch von uns schon bei Besprechung seiner Versuche angedeutet ward.

Bei Anstellung solcher Versuche verlangen wir, dass die Möglichkeit jeder Selbstbefruchtung, wie auch jeder zufälligen Befruchtung vollständig ausgeschlossen werde.

Um sicher zu sein, dass keine Selbstbefruchtung vorkommen kann, muss jede der einzelnen Versuchspflanzen stets von der Entwickelung der ersten Blumen an, so genau beobachtet werden, dass man sicher ist, dass sich keine einzige Blume an der Pflanze geöffnet hat, die nicht einer sorgfältigen Prüfung unterworfen ward. Ueberblicken wir die ganze Reihe der zur Erweisung der Parthenogenesis gemachten Versuche, dann muss jeder Unbefangene zugeben, dass kein derartiger Versuch vorliegt, die *Coelobogyne* mit inbegriffen, wo dies der Fall gewesen und doch Samen ohne Befruchtung erhalten wurden.

Bei Pflanzen mit Zwitterblumen, da lieferten schon Spallanzani's Versuche das Ergebniss, dass wenn deren Blumen frühzeitig künstlich geöffnet und ihrer Antheren beraubt wurden, diese keine keimfähigen Samen bildeten. Dass Spallanzani in solchem anscheinend vollkommen ausgebildeten Samen, der aber nicht keimte, dennoch einen vollkommen ausgebildeten Embryo gefunden haben will, das kann nur auf Selbsttäuschung oder wissentlicher Fälschung des Ergebnisses beruhen.

Ich selbst habe gerade mit Zwitterblumen tragenden Pflanzen, Hunderte von Versuchen der Art gemacht, zwar nicht um die Parthenogenesis zu erweisen, an deren Existenz ich nie glaubte, sondern um Pflanzen-Bastarde zu erziehen.

Wer mit Sicherheit darauf rechnen will einen Bastard zu erziehen, der muss vorerst den Einfluss des eignen Pollens der Pflanze unmöglich machen. Die zu solchen Versuchen bestimmten Pflanzen wurden daher an einen Ort im Gewächshause gestellt, wo sie von ihresgleichen nicht befruchtet werden konnten, es wurden ferner alle die Blumen, welche zur Entwickelung kommen sollten, einige Tage vor der Blüthe künstlich geöffnet und deren Antheren ausgeschnitten und endlich alle andere Blumen vor dem Oeffnen nebst den überflüssigen Zweigen weggeschnitten, um hierdurch den ganzen Bildungstrieb der Pflanze auf die Entwickelung der Samen zu lenken. Zur Zeit wenn die Narbe des Pistills die Zeichen der vollständigen Zeitigung hatte, wurde der fremde Pollen aufgetragen.

Wie leicht ein noch ungeübter Beobachter oder Versuchsansteller bei solchen Versuchen sich täuschen kann, davon erhielt ich bei diesen Versuchen vielfach den Beleg, indem es mir anfangs so erging, wie dies auch von Spallanzani und Gärtner erwähnt wird. Ich erhielt nämlich bei meinen ersten derartigen Versuchen häufig reife Samen, welche

jedoch keinen Bastard, sondern die gleiche Art darstellten, so dass entweder dennoch Selbstbefruchtung, oder parthenogenetische Samenbildung stattgefunden haben musste.

Später als ich mehr Uebung erhielt und ich mehr Beobachtungen der Art gemacht, fand ich, dass die Antheren vieler Pflanzen, schon geraume Zeit vor dem Oeffnen der Blumen vollkommen ausgebildet sind und auch schon vollkommenen Blumenstaub enthalten. Schneidet man daher diese erst im Moment des Oeffnens, oder kurze Zeit vor- oder nachher aus, dann wird man niemals ein reines Resultat erhalten können, sondern man erhält ohne es zu ahnen, sehr häufig durch Selbstbefruchtung Samen.

Dieses berücksichtigend und zu solchen Versuchen daher die Blumen schon geraume Zeit vor ihrem Oeffnen der Antheren beraubend, erhielt ich bei spätern Versuchen, entweder nur Samen aus denen ein Bastard hervorging, oder gar keinen Samen, oder auch anscheinend vollkommen ausgebildete Samen, die aber nicht keimten. Da bei diesen Versuchen stets dahin gestrebt ward, den Bildungstrieb der Pflanze, vornehmlich der Ausbildung einzelner Früchte zuzulenken, so zeigte das Resultat derselben, dass wohl in Folge dessen die Hüllen des Samens zuweilen einer weitern Fortbildung und scheinbaren Samenreife entgegen geführt werden konnten, dass aber da, wo die Befruchtung mit dem fremden Pollen nicht angenommen hatte, auch die Bildung eines Embryo unterblieb.

Leichter verhältnissmässig, scheint es Versuche mit Pflanzen anzustellen, die getrennten Geschlechts sind, sei es monoecisch oder diöcisch, indem man ja bei diesen nichts weiter zu thun hat, als die Einwirkung des Pollens der gleichen Art unmöglich zu machen und im Uebrigen bei den Monöcisten nur die männlichen Blumen zeitig weg zu schneiden. Es sind daher auch gerade grossentheils solche Pflanzen gewesen, die als Grundlage zu Versuchen der Art gedient haben. Trotzdem sind es aber gerade diese Pflanzen, welche am leichtesten ein trügerisches Resultat geben, da man einestheils bei ihnen nicht nothwendig zu haben glaubt, jede einzelne Blume einem strengen Examen zu unterwerfen und überhaupt nur solche Blumen zur Blüthe kommen zu lassen, die streng untersucht wurden, — und da es ferner bei vielen derselben viel schwieriger ist, sie vor der Einwirkung des eignen Pollens sicher zu stellen.

Monöcisten, in besonders hohem Grade aber Diöcisten, entwickeln durchschnittlich viel mehr Blüthenstaub und ganz besonders häufig einen solchen der weit von der Luft und dem Winde fortgetragen wird, da er beim leisesten Schütteln der Pflanze, oft einer dunstförmigen Wolke gleich, sich in der Luft verbreitet und von dieser auf weite Entfernungen fortgetragen wird.

Es muss daher bei Versuchen mit solchen Pflanzen zunächst das letztere Verhältniss auf das sorgfältigste berücksichtiget werden und Pflanzen, die nicht nur massenhaft Pollen entwickeln, sondern deren Pollen auch leicht verstäubt und von der Luft fortgetragen wird, — oder andere die vorzugsweise von bestimmten Arten von Insekten während der Blüthe besucht werden, ganz besonders sorgfältig vor jeder möglichen Befruchtung durch in der Luft schwebenden oder den Insekten anhängenden Pollen beschützt werden. Der Hanf,

mit dem so vielfach experimentirt ward, gehört gerade zur Kategorie derjenigen Pflanzen, deren Befruchtung durch in der Luft schwebenden Pollen sehr leicht möglich, da er nicht nur massenhaft leicht verstäubenden Pollen produzirt, sondern auch als Kulturpflanze massenhaft angebaut wird. Vollständige Vorsichtsmassregeln zur Verhinderung hat in dieser Beziehung nur Spallanzani bei seinen Versuchen getroffen, schade dass er nicht zuverlässig ist.

Ein genaues Examen jeder Blume, die zur Entwickelung kommt und Wegschneiden aller andern vor der Entwickelung derselben, ist nach unserer Ansicht, bei *Monöcisten* wie *Diöcisten*, bei derartigen Versuchen besonders nothwendig, da es Thatsache ist, dass in den gewöhnlich nur weiblichen Blumen, dennoch zuweilen Antheren mit fruchtbarem Pollen sich entwickeln und anderseits bei Pflanzen die zu den *Diöcisten* gezählt werden, an den weiblichen Pflanzen sich zwischen den weiblichen Blumen, auch einzelne männliche Blumen finden. Gerade von *Cucurbita*, *Lychnis dioica*, *Spinacia*, *Mercurialis* etc. sind solche Verhältnisse bekannt.

Da alle diese Vorsichtsmassregeln noch von keinem zuverlässigen Beobachter, der keimfähigen Samen ohne Befruchtung erhielt, in Anwendung gebracht wurden, und da ferner alle Beobachtungen, die ich selbst bis auf die neueste Zeit machte, stets den einzig möglichen, nämlich den indirekten Gegenbeweis lieferten, dass bei wirklich verhinderter Befruchtung auch keine Samenbildung stattfinde, so halte ich es für sicher, dass nur unterm Einfluss der Befruchtung die Bildung eines wahren Embryo's stattfinden könne.

Zu einigen von mir speciell in Hinblick auf die Parthenogenesis im Pflanzenreiche gemachten Erfahrungen und Beobachtungen übergehend, will ich zuvörderst auf einige allgemeine Beobachtungen hinweisen. Zu diesen gehören in erster Linie die Wahrnehmungen, dass weibliche Exemplare von *Diöcisten*, wenn sie ganz vereinzelt stehen und nicht befruchtet werden können, eben keine keimfähigen Samen ausbilden, oder dass bis jetzt in allen Fällen wo dennoch Bildung keimfähiger Samen stattfand, wenn wir von *Coelobogyne* noch abstrahiren, auch die Möglichkeit der Befruchtung nachgewiesen werden konnte.

Die ältesten Beispiele der Art sind die Dattel und Feige. Ein interessantes andres Beispiel, das seiner Zeit dazu diente um gerade die Lehre der Befruchtung zu erweisen, liefert *Chamerops humilis* L. Das Experiment, welches Gleditsch machte, indem er die weibliche Pflanze im Berliner Botanischen Garten, mit dem Pollen einer männlichen Pflanze, die gleichzeitig im Botanischen Garten zu Leipzig blühte, befruchtete und dadurch zum Ansetzen von Samen veranlasste, ist bekannt genug geworden. Dennoch ist gerade dieses Beispiel ein unlauteres. Im hiesigen Botanischen Garten sollten nämlich, so ward mir vor 3 Jahren versichert, einige weibliche Exemplare, zuweilen auch ohne jede künstliche Befruchtung einzelne keimfähige Samen ausbilden. Nicht weit von diesen Exemplaren standen allerdings auch einzelne männliche Exemplare, durch die eine zufällige Befruchtung einzelner Blumen recht wohl hätte vermittelt werden können. Als ich jedoch die Blumen

der fraglichen Pflanzen einer nähern Prüfung unterwarf, fand ich in jeder derselben, ausser dem Pistill auch die Rudimente der Staubfäden, welche nicht selten ausgebildete Antheren mit vollkommenem Pollen trugen, wodurch die oben erwähnte Erscheinung sich sehr leicht erklärt. Auch in den Blumen der männlichen Exemplare der gleichen Pflanze, ist das Rudiment des Fruchtknotens stets vorhanden. Zuweilen bildet sich dieses mehr aus und dann findet man, dass auch die männlichen Blüthenrispen einzelne vollkommene Früchte mit Samen ausbilden.

Aehnliche Verhältnisse dürften auch das Samentragen weiblicher Pflanzen der Rohrpalme (*Chamaedorea*) erklären, welches zuweilen ohne dass diese künstlich befruchtet wurde, in den Gewächshäusern beobachtet ward.

Wenn so einzelne Beispiele, wo weibliche Exemplare von *Diöcisten* scheinbar ohne Befruchtung reife Samen bildeten, sich auf dennoch stattgefundene Befruchtung zurück führen lassen, so sind anderseits Beispiele massenhaft vorhanden, dass weibliche Exemplare von vielen anderen Palmen, wie namentlich von *Phoenix dactylifera* und *silvestris* und anderen ohne Befruchtung nie Frucht ansetzen. So blühete im letzten Sommer in dem hiesigen Garten auch eins der mächtigen, an 60 Fuss hohen Exemplare von *Arenga saccharifera*. Trotz der ausnehmend üppigen Entwickelung der weiblichen Blüthenrispe, fielen dennoch alle Blumen bald nach der Blüthe ohne Samen anzusetzen ab.

2. Das Verhalten der Cycadeen.

Das Verhalten der Familie der *Cycadeen* ist von hohem Interesse, in Bezug auf die Ausbildung von anscheinend vollkommenem Samen ohne Befruchtung. Die Blumen entwickeln sich hier auf der Spitze des Stammes in der Mitte des Blatttriebes, in Form von zapfenförmigen Blüthenständen, und zwar vollständig diöcisch; Antheren kommen in den weiblichen Zapfen jedenfalls nicht vor. Der Bildungstrieb der Pflanze ist theils in Folge der gipfelständigen Stellung der Blüthenzapfen, theils aber auch in Folge deren Erscheinen an der Stelle eines neuen Blatttriebes, in sehr hohem Grade der Entwickelung der Fruchtzapfen zugelenkt. Erhöht wird dieses noch dadurch, dass vom Erscheinen der Blüthenzapfen bis zur Reife der Frucht, gemeiniglich kein neuer Blatttrieb sich entwickelt, so dass der Ausbildung der Früchte die ganze Vegetationskraft ausschliesslich zugewendet ist.

Wenn es Parthenogenesis im Pflanzenreiche geben würde, dann wären bei den *Cycadeen* alle Bedingungen im reichlichen Maasse vorhanden, um solche zu veranlassen.

Die weiblichen Fruchtzapfen, die ich an kräftigen Exemplaren dieser Pflanze bis jetzt beobachten konnte, sie zeigten wirklich in Folge der eben geschilderten Stellungs- und Wachsthums-Verhältnisse, auch ohne dass eine Befruchtung stattgefunden haben konnte, nach dem Aufblühen ein auffallend starkes ferneres Wachsthum. Aehnlich wie bei den verwandten *Coniferen* dauerte dieses ein Jahr lang fort und nach Verlauf dieser Zeit waren

anscheinend vollkommene grosse nussartige Samen in denselben ausgebildet. Beim Oeffnen zeigte aber keiner derselben auch nur die Anfangsbildung eines Embryos.

Im Jahrgange 1857 der Bonplandia pag. 322 und Jahrgang 1858 pag. 100 der Gartenflora machte ich einen solchen Fall von *Encephalartos longifolius* Lehm. bekannt. Seitdem habe ich von verschiedenen Gärten gehört, in denen weibliche Exemplare von *Cycadeen* ebenfalls Samen ohne Keime bildeten. Tab. I Fig. 10 giebt den Durchschnitt in natürlicher Grösse, durch einen solchen Samen von *E. longifolius*. Die Fruchthülle umschliesst hier einen grossen ganz mit Eiweiss gefüllten Samen. Auf der dem Eimund zugewendeten Seite finden sich 2 kleine von Endosperm nicht ausgefüllte hohle Körperchen. Ich begnügte mich damals einfach zu sagen, dass sich diese da finden, wo der Embryo liegen sollte, da man von der Entwickelungsgeschichte des Embryosackes und Keimes der *Cycadeen* bis jetzt noch nichts kannte.

Wirft man einen Blick auf die Vorgänge, wie solche in der verwandten Familie der *Coniferen* stattfinden, dann ergiebt sich, dass bei diesen der Pollenschlauch zur Zeit der Befruchtung nur in die Kernwarze eindringt und nun ein Jahr lang ohne jedes fernere Wachsthum ruht. Inzwischen wächst der Embryosack, nach und nach die Kernwarze grossentheils erfüllend, zum Vorkeim aus. Im folgenden Frühlinge bilden sich in der dem Eimund zugewendeten Spitze desselben die Corpuscula und füllen sich mit einem losen Zellgewebe (Keimbläschen). Nun erst beginnt der Pollenschlauch weiter zu wachsen, dringt sogar in den Embryosack selbst ein und legt sich an dem Corpusculum an. Durch die Befruchtung entwickeln sich nun einige der gerade auf dem entgegengesetzten Ende des Corpusculums liegenden Keimbläschen zu den eigenthümlichen Vorkeimen zweiter Ordnung, die auf ihrer Spitzenzelle den Embryo entwickeln.

Die Ausbildung des Embryosackes zum Vorkeim und die Heranbildung der Corpuscula, scheint also hier ganz unabhängig vom Einflusse der Befruchtung vor sich zu gehen und selbst die Befruchtung geht nicht in Folge des direkten Anlegens des Pollenschlauches an das Keimbläschen vor sich.

Wenden wir diese Vorgänge auf die *Cycadeen* an, so wäre hier der eigentliche Same (Fig. 10) von dem mit Eiweiss gefüllten Embryosacke gänzlich ausgefüllt, und die beiden hohlen Körperchen in der Spitze desselben könnten als Corpuscula gedeutet werden.

Damals konnte ich nach dem, was mir vorlag, diese Deutung noch nicht wagen, jetzt aber hat mir das weibliche Exemplar einer *Ceratozamia robusta Mig.* das vollständige Material und den Beweis für die Richtigkeit dieser Ansicht geliefert. Dieselbe entwickelte im Winter von 1857 auf 1858 ihren Blüthenzapfen. Tab. I Fig. 11 giebt die Schuppe dieses Zapfens zur Zeit wo derselbe noch befruchtungsfähig war, in natürlicher Grösse. Am Grunde derselben erblickt man die beiden nackten Eier, deren Eimund in der nach innen und unten liegenden Spitze liegt. Tab. I Fig. 12 stellt die schwache Vergrösserung eines solchen Eies von aussen gesehen dar. Mit Ausnahme der Spitze ist dasselbe mit eigenthümlichen Haaren dicht besetzt. Tab. I. Fig. 14 giebt eine Darstellung dieser Haare bei 200-

facher Vergrösserung. Jedes derselben besteht aus zwei kleineren Basalzellen und einer grossen drüsenartigen keulenförmigen, ovalen oder fast kugeligen Spitzenzelle, die eine klebrige Feuchtigkeit aussondert. Da die Zapfenschuppen der weiblichen *Cycadeen* oberhalb des Ansatzes der Eier zu allen Zeiten aber sehr dicht schliessen, so kann das Pollenkorn schwerlich direkt auf das Ei fallen. Dagegen sind auch die Zapfenschuppen dicht mit langen einfachen Haaren besetzt, wie ich solche Tab 223 *g.* der Gartenflora und Tab. III. Fig. 5, des Bülletins der K. Naturf. Ges. zu Moskau abbildete. Sehr wahrscheinlich sendet daher das Pollenkorn, durch diese, eine klebrige Feuchtigkeit absondernden, Haare ernährt, seinen Schlauch zwischen ihnen, wie zwischen dem leitenden Zellgewebe hindurch und gelangt so bis zum Eimund. Tab. I Fig. 13 ist der etwas stärker vergrösserte Durchschnitt der durch den Eimund (*a*) und die Achse des Eies hindurch gehet. In der Kernwarze (*b*) hat sich schon ein grosser Embryosack (*d*) ausgebildet. Die Kernwarze ist von einer einfachen Eihülle (*d. d*) bedeckt, die nach oben eine Oeffnung, den Eimund (*a*) zeigt. Nach aussen ist die Eihülle von den bereits besprochenen Haaren bekleidet [1]).

Jetzt, 9 Monate später, habe ich den gleichen Zapfen behufs der Untersuchung abgeschnitten. Fig. 15 stellt eine Schuppe desselben in natürlicher Grösse dar, an deren Grunde je 2 junge nussartige Samen befestigt sind. Tab. II Fig. 16 ist der schwach vergrösserte senkrechte Durchschnitt, durch Eimund (*a*) und die Achse des Eies. Derselbe zeigt, dass sich inzwischen der Embryosack (*b*) stets vergrössert hat und jetzt schon die Kernwarze bis auf die Spitze derselben (*g*), die in Form eines Höckers in den Eimund hineinragt, und deren Rest die Samenschaale bildet, ausfüllt. Auch die einfache Eihülle (*d. d*) ist seitdem ziemlich gewachsen und hat sich namentlich oberhalb des Eimundes stark verdickt. Sie ist es, die jetzt die Fruchthülle bildet. In der Spitze des Embryosackes, unmittelbar unterhalb des Eimunds (bei *c*) sieht man 2 ovale Körperchen liegen, die fast an die Membran des Embryosackes anstossen. Es sind dies 2 durchschnittene *Corpuscula*, deren ich auf dem Querschnitt bis 4 in der Spitze des Embryosackes liegen fand. Tab. II Fig. 23, ist die Parthie des gleichen Durchschnittes bei 60facher Vergrösserung in welcher die *Corpuscula* liegen. Oben (bei *a*) liegt die Spitze der Kernwarze, die sich unmittelbar in die den Embryosack ringsum umschliessende Samenschaale fortsetzt. Die *Corpuscula* selbst sind von dem lockern, bald regelmässigen, bald unregelmässigen Zellgewebe des Endosperms umgeben. Da wo dieses letztere sich an die Wandung der *Corpuscula* anlegt, ist es regelmässiger (vergleiche den Querschnitt durch ein *Corpusculum* Taf. I Fig. 22 bei *b. b.* und den Längsschnitt durch ein anderes Taf. II Fig. 26 bei *b. b.* beide bei 170facher Vergrösserung), nach der Mitte des Embryosackes hin, wird es dagegen grösser und unregelmässi-

[1]) In einer besondern Abhandlung über einige *Cycadeen* des Petersburger Gartens, die im Jahre 1857 im Bulletin der Moskauer Gesellschaft erschien, besprach ich schon die Bildung des Eies dieser Pflanzen. Damals stand mir nur ein weiblicher Zapfen der *Zamia Fischeri* zu Gebote. Der Durchschnitt, den ich Tab. III, Fig. 14 damals gab, zeigt ein Ei mit eingetrockneter Kernwarze. Aehnliche Zustände fanden sich auch bei den später untersuchten Zapfen viele.

ger. (Vergleiche Tab. II Fig. 25 gleichfalls bei 170facher Vergrösserung.) Dieses Endosperm enthält noch einen wasserhellen dünnflüssigen Zellsaft, und in jeder der Zellen findet man gemeiniglich ein kleines Kernkörperchen. Stärkekörner, welche im Zustande der Reife sich in reichlicher Menge hier ablagern, sind noch gar nicht vorhanden. Die *Corpuscula* (Tab. II Fig. 23. *b. b.*) dagegen sind mit einem viel kleineren Zellgewebe gefüllt. Dasselbe ist nach der Wandung zu kleinmaschiger und regelmässiger, (siehe die Figuren 26 bei *a* und 22 bei *a*) nach dem Centrum hin wird es lockerer, etwas unregelmässiger und theilweis rundlicher. (Tab. II Fig. 24 bei 170facher Vergrösserung). Jede der Zellen des Corpusculum enthält einen ausserordentlich grossen Kern mit deutlicher Umhüllung und trübem körnigem Inhalt. Einige Zellen zeigen auch 2 Kerne. Wahrscheinlich haben diese Corpuscula eine ähnliche Entstehungsweise wie die der *Coniferen*, sind anfangs mit freien kugligen Zellen gefüllt, welche dann später durch lebhafte Theilungen von den Wandungen des Corpusculums aus zu regelmässigem Zellgewebe werden. Ob der Zustand wie er uns vorlag ein ganz normaler, oder ob schon in Folge unterbliebener Befruchtung eine stärkere Vermehrung der Zellen wie im normalen Falle eingetreten, können nur zukünftige Beobachtungen entscheiden.

Wir hätten hier also das Beispiel, dass unter Einfluss der auf die Ausbildung der weiblichen Blüthenzapfen concentrirten Vegetationskraft, der Embryosack der *Cycadeen*, auch ohne Befruchtung den ungeschlechtlichen Theil seiner Entwickelung zum Vorkeim durchmacht, dass selbst die *Corpuscula* mit den Keimbläschen sich vorbilden, — dann aber durch Wegbleiben des anregenden Einflusses der Befruchtung, auch die weitere Ausbildung eines der Keimbläschen der *Corpuscula* zu einem Embryo unterbleibt [1]).

Dieses Beispiel zeigt einestheils nach meiner Ansicht, dass ohne den Einfluss des Pollenschlauches keine Embryobildung stattfinden kann und dass andrerseits das Wachsthum des Embryosackes und Füllung desselben mit Endosperm, sowie endlich die

[1]) Da wir die Familie der *Cycadeen* zu wiederholten malen zum Gegenstand der Beobachtung machen konnten, in Folge des reichhaltigen Materials, welches der hiesige Botanische Garten besitzt, so sei es uns erlaubt bei dieser Gelegenheit darauf hinzuweisen, dass von den noch durch Karwinsky importirten Exemplaren des *Dioon edule* Lindl., dieses Jahr mehrere Exemplare blüheten. Leider zeigten sie alle aber nur männliche Blumen und unsere Hoffnung einmal mittelst Befruchtung Samen zu erziehen, um auch die Entwickelung des Embryos zu verfolgen ward vereitelt. Auch die männlichen Blüthenzapfen von *Dioon* sind noch wenig bekannt. Dieselben sind länglich - oval, ungefähr 3 Zoll lang und von verhältnissmässig kleinen ziegeldachförmig übereinander liegenden Schuppen gebildet. Diese Schuppen bestehen aus einem unteren gleichbreiten Stück, das auf seiner unteren Seite die zahlreichen sitzenden Antheren trägt und an der sterilen Spitze, die aufwärts gebogen, fast rhomboidisch und an dem vorderen Rande gezähnelt ist. Tab. I, Fig. 18 zeigt solch eine Schuppe von unten mit den Antheren in natürlicher Grösse, Fig. 19 von der Seite und Fig. 18^{b} giebt die Ansicht von vorn mit dem sterilen Vorderstück. Fig. 10 ist eine sitzende Antherengruppe von 4 verwachsenen Antheren, 10fach vergrössert und Fig. 17 zeigt zwei junge Antheren bei 25facher Vergrösserung. Auch diese Antheren tragen auf ihrer Oberfläche lange einfache Haare, wie ich sie früher bei *Ceratozamia* (Mosk. Bull. l. c. Tab. III, Fig. 8—11 und später bei *Encephalartos* (Grtfl. Tab. 223 Fig. f.) nachgewiesen habe. Es scheint dies mithin eine unter den *Cycadeen* durchgehende Bildung zu sein. Die Pollenkörner, von denen Fig. 21 a—e Darstellung bei 200facher Vergrösserung giebt, zeigen auch hier die eigenthümliche halbkugelige Form, wie ich solche früher bei *Ceratozamia* fand.

Bildung der Corpuscula bei den *Gymnospermen*, unabhängig von der Befruchtung stattfinden kann.

Diesen speciellen Fällen könnten noch die massenhaften ähnlichen Beobachtungen, wo die Samenbildung bei verhinderter Befruchtung stets unterblieb, hinzugefügt werden. In unsern Augen hat aber gerade das gegebene Beispiel der *Cycadeen* den entschiedensten Werth, indem es zeigt, dass die Fortbildung im Innern des Embryosackes stets nur bis zu dem Punkte gehen kann, wo durch die Befruchtung der Stimulus zur Anfangsbildung des Embryos gegeben werden muss, und dass wo dieser fehlt, auch im Innern des kräftig wachsenden Samens, das Keimbläschen keine fernere Entwicklung zeigt.

Wir gehen damit zu denjenigen Beispielen über, die theils seit Spallanzanis Experimenten, theils erst in neuester Zeit als Beispiel für die Parthenogenesis im Pflanzenreich aufgeführt werden.

3. Die für die Parthenogenesis auch jetzt noch aufgestellten Beispiele und meine eigenen Versuche.

a. Pflanzen mit hermaphroditen Blumen.

Von diesen liegt kein Beispiel vor, welches jetzt noch als Beleg für die Parthenogenesis aufgeführt wird.

b. Monöcische Pflanzen.

Die Arten der Gattung *Cucurbita*, besonders aber Gurken, Melonen und Wassermelonen sind es, die namentlich von Gärtnern häufig als Pflanzen genannt werden, die auch, wenn keine männliche Blumen vorhanden seien, dennoch Frucht ansetzten. Spallanzani's Versuche mit der Wassermelone würden sogar direkt für die Parthenogenesis beweisend sein, wenn deren Wahrhaftigkeit nachgewiesen wäre.

Schon Marti (l. c.) wies als Zeitgenosse Spallanzanis das häufige Vorkommen von Antheren in den weiblichen Blumen der Wassermelone nach und erhielt bei ähnlichen Versuchen negative Resultate. Lecocqs und Henschels Versuche sind ohne Werth. Gärtner und Naudin endlich erhielten bei ähnlichen Versuchen mit monöcischen *Cucurbitaceen*, stets negative Resultate.

So dürfte auch *Cucurbita* aus der Reihe der Pflanzen zu streichen sein, die als Beleg für die Parthenogenesis genannt werden. Das Geschäft der Befruchtung scheint in der Familie der *Cucurbitaceen* vornehmlich Insekten übertragen zu sein. Bei Wiederholung von Versuchen mit der Wassermelone etc., muss daher nicht blos jede weibliche Blume auf das Vorhandensein von Antheren geprüft, sondern es müssen auch noch Vorkehrungen getroffen werden, dass weder durch Insekten noch durch andere Zufälligkeiten die Befruchtung vollzogen werden kann, wenn der Versuch irgend einen Werth haben soll.

Als zweite Pflanze aus der Gruppe der Monöcisten, wird von Gasparinni die kultivirte Feige genannt. Wir haben schon bei Besprechung jenes Falles unsere Bedenken dagegen ausgesprochen: direkte Erfahrungen liegen uns nicht vor.

c. Diöcische Pflanzen.

Mercurialis annua. Wir haben die Versuche von Ramisch und Naudin mit *Mercurialis* schon erwähnt. Nach Naudin hat auch Thuret in Cherbourg die gleichen Versuche wiederholt und will ebenfalls Samen ohne Befruchtung erhalten haben.

Dass gerade diese Pflanze bis auf die neueste Zeit, noch unter den Belegen für die Parthenogenesis genannt wird, ist uns vollständig unbegreiflich. Schon Spallanzani hatte nur mittelst Befruchtung Samen von derselben erhalten. Ramisch, der die am längsten fortgesetzten Versuche mit derselben gemacht hatte, gesteht selbst, dass er zuweilen männliche Blumen an den weiblichen Pflanzen gefunden habe, sehr naiv glaubt er aber, — solche einzelne männliche Blumen, die nur kurze Zeit blühten, könnten die Befruchtung nicht bewirken, — während doch eine einzige männliche Blume soviel Pollen producirt, um noch viel mehr weibliche Blumen zu befruchten, als bei diesen Versuchen gemeiniglich Samen erhalten wurden.

Reichenbach und Schkuhr hatten ebenfalls schon männliche Blumen an den weiblichen Pflanzen beobachtet. Camerarius hatte von isolirten Pflanzen nur taube Samen erhalten. Lecocq erhielt zweifelhafte Resultate. Link erhielt von isolirten weiblichen Pflanzen der *M. elliptica* nur taube Samen.

Naudin und Thuret erhielten reife Samen von isolirten weiblichen Pflanzen, ohne männliche Blumen an denselben zu beobachten.

Von mir selbst wurden im Sommer 1858 diese Versuche wiederholt. Die Pflanzen wurden in Töpfe gesetzt, die männlichen Pflanzen vernichtet bevor sie Pollen zur Entwickelung brachten und überhaupt waren im Garten keine andere blühende Pflanzen von *Mercurialis annua* vorhanden. Von 3 weiblichen Pflanzen wurden nun 2 abgeschlossen in einem Kalthause und eine andere in einem andern Kalthause aufgestellt. Die letztere ward nicht beschnitten, die 2 ersteren wurden so zusammen geschnitten, dass sich nur eine kleinere Zahl der gedrängten achselständigen Haufen weiblicher Blumen an derselben entwickeln konnten. Diese beiden Pflanzen wurden täglich genau beobachtet. Zwischen den wenigen Haufen weiblicher Blumen entwickelten sich immer wieder von Neuem einzelne vollkommene männliche Blumen, welche ich zu wiederholten malen den Herren Körnicke, Rach und Maximowicz zeigte. Oft bemerkte ich solche ehe sie sich öffneten und nahm sie dann vorher weg. Oefters aber hatten sie sich eben schon geöffnet und konnten dann erst entfernt werden. Von jeder dieser beiden Versuchsflanzen wurden während der Dauer des Versuchs mehr als 20 solcher männlicher Blumen entfernt. Diese Pflanzen setzten gar keine Früchte an. Auch an der andern unbeschnittenen Pflanze entwickelten sich fast täglich einzelne männliche Blumen, welche nicht entfernt wurden. Diese Pflanze reifte zahlreiche Samen. Ich fand mithin an allen weiblichen Pflanzen männliche eingestreute Blumen und es ist klar, dass überall da wo Samenbildung an genügend abgeschlossen gestellten weiblichen Pflanzen von *Mercurialis annua* beobachtet ward, diese lediglich auf Rechnung dieser männlichen,

von den Beobachtern übersehenen Blumen zu setzen ist. Könnten solche weibliche Blumen ohne Befruchtung Samen ansetzen, so hätte dies bei meinen beiden beschnittenen Versuchspflanzen um so eher der Fall sein müssen, als hier die ganze Triebkraft der Pflanzen, der Entwickelung und ferneren Ausbildung weniger Blumen zugelenkt wurde, ein Verfahren das ich, wie oben gesagt, früher stets benutzte, um die Samenbildung bei künstlichen Bestäubungen behufs der Erzeugung von Bastarden bei solchen Pflanzen zu befördern, die an und für sich schon schwierig Samen ansetzen.

Da Radlkofer ein so bedeutendes Gewicht auf die lange Erhaltung der Narben legt und darin einen Grund mehr für nicht erfolgte Befruchtung sieht, geben wir Fig. 8 die Abbildung einer weiblichen Blume mit ihren grossen Narben. Fig. 9 giebt eine sechsmal schwächere Vergrösserung der jungen Frucht nach Nees. Man sieht, dass auch auf dieser nicht nur die Narben sich erhalten haben, sondern später sogar noch gewachsen sind, ein Fall, der wie auch Klotzsch versichert bei den *Euphorbiaceen* häufig vorkommt. Es hat also dieses Verhalten der Narben keinerlei Wichtigkeit oder Beweiskraft.

Lychnis dioica wie *Datisca cannabina* unterwerfen wir gar keiner weiteren Besprechung, da über diese Pflanzen, wie die geschichtliche Darstellung zeigt, nur unzuverlässige Beobachtungen für parthenogenetische Samenbildung, dagegen aber zuverlässige Beobachtungen für das Gegentheil vorliegen. Auch die neuesten Beobachtungen stützen sich nicht auf diese Pflanzen.

Pistacia narbonensis und andere Pistacien nach Tenore und Bocconi. Es fehlen hier zuverlässige Beobachtungen gänzlich und daher nicht zu berücksichtigen. Dagegen ist nachgewiesen, dass in Paris eine weibliche *Pistacie* die früher nie Frucht angesetzt hatte, solche bildete, als in einem benachbarten Garten eine männliche Pflanze blühte.

Bryonia dioica. Nur Naudin's Beobachtungen an Pflanzen des freien Landes liegen vor. Wir haben dieselben schon besprochen. Sie haben weder in Beziehung auf genaue Beobachtung aller zur Entwickelung gekommenen Blumen Werth, noch waren die Pflanzen vor Befruchtung von Insekten geschützt, welche Art der Befruchtung hier wahrscheinlich stattfindet und von Naudin selbst für möglich gehalten ward. Wir haben ausserdem diesen Versuch schon im geschichtlichen Theil besprochen.

Spinacia oleracea. Spallanzani, Girou de Buzareignes und Lecocq sind hier Vertreter der Parthenogenesis. Schon Spallanzani sah zuweilen männliche Blumen an den weiblichen Pflanzen. Ausserdem ist *Spinacia* schon lange als polygamisch bekannt, und es ist wunderbar, wie mit solch einer Pflanze stets wieder von Neuem exemplirt werden kann.

Im Sommer 1858 machte ich selbst Versuche mit dieser Pflanze und erhielt die folgenden Resultate. Der Versuch ward ähnlich, wie der mit *Mercurialis* angestellte, nämlich die Pflanzen in Töpfe gesetzt, die männlichen Pflanzen vor der Entwickelung der Blumen vernichtet und die weiblichen in einem Kalthause aufgestellt. Die eigentlichen Versuchspflanzen wurden sämmtlich zusammen geschnitten, so dass nur wenige Blüthenhaufen an denselben zur Entwickelung kamen. Die Beobachtung war jedoch anfangs nicht täglich und so kam

es, dass ich an diesen Pflanzen eines Morgens mehrere ausgebildete Antheren fand, die auf einzelnen Staubfäden über die weiblichen Blumen emportraten. Dieselben hatten sich in einzelnen zwischengestreueten männlichen Blumen entwickelt. Ich entfernte diese zwar, hielt aber das Resultat des Versuches dennoch für getrübt, stellte daher alle Pflanzen, mit Ausnahme einer einzigen, an der sich die ersten weiblichen Blumen erst zu entwickeln begannen, in ein anderes Haus. An dieser einen liess ich im Ganzen nur 10 achselständige Blüthenhaufen zur Entwickelung kommen, welche aber täglich mit Hülfe des Vergrösserungsglases genau beobachtet wurden. Alle nun sich entwickelnden Seitenästchen wurden täglich ausgebrochen. Zunächst beobachtete ich 2 männliche eingestreuete Blumen, von denen jede nur einen Staubfaden mit ausgebildeter Anthere und vollkommenen Pollen enthielt. Der fortgesetzten genauen Beobachtung fielen bald darauf einzelne drüsenartig sitzende Körper auf, die ich anfangs für missgestaltete Hüllblättchen gehalten hatte. Dieselben wurden herausgenommen und liessen sich nun als ungestielte Antheren erkennen, die sich in verkümmerten männlichen Blumen entwickelt hatten. Fig. 1 ist eine vergrösserte vollkommene männliche Blume von *Spinacia* mit 4 Blumenblättchen, Fig. 7 eine solche mit 5 Blumenblättchen. Fig. 2 giebt die stärkere Vergrösserung einer weiblichen Blume. An der Seite derselben hat sich eine verkrüppelte männliche Blume entwickelt, mit sitzenden, unter den umgebenden Hüllblättchen durchschimmernden Antheren. Fig. 3 ist eine grössere, jedoch ebenfalls verkümmerte männliche Blume, die vergrössert dargestellt ist und einen Staubfaden mit Träger ausgebildet hat. Bei *b* der gleichen Figur sieht man eine jüngere weibliche Blume, und bei *c* dazwischen die blosgelegten sitzenden Antheren einer verkümmerten männlichen Blume. Fig. 4 ist ein einzelner vollkommner Staubfaden. Auch die sitzenden Antheren enthielten, wie ich mich mehrfach mit Hülfe des Mikroskops überzeugte, vollständig ausgebildete, dem normalen Pollen durchaus analog gebildete Pollenkörner, wie solche Fig. 5 und 6 darstellen. Selten sieht man die Antheren der verkümmerten männlichen Blumen vollständig, sondern diese sind fast immer von den Blüthenhüllblättchen der verkümmerten Blume verdeckt, wie dies auf Fig. 2 bei *a* der Fall ist, so dass sie sehr leicht übersehen werden oder für umgebildete Blüthenhüllblättchen genommen werden können. Jede dieser einzelnen eingestreueten männlichen Blumen enthält entweder mehrere solcher sitzenden Antheren, oder man findet neben mehreren verkümmerten, nur eine sitzende Anthere mit vollkommenem Pollen.

Während anfangs sich nur wenige solcher männlichen Blumen entwickelten, wurde die Erzeugung derselben in den gleichen Blüthenhaufen immer häufiger, ja zuletzt überwog die Menge der männlichen Blumen fast die der weiblichen. Die Vergleichung mit nicht zusammen geschnittenen Pflanzen zeigte, dass auch bei diesen ähnliche männliche Blumen vorkommen, jedoch in viel geringerer Menge. Bei der einen Versuchspflanze war diese massige Entwickelung männlicher Blumen offenbar dadurch erzeugt worden, dass deren ganze fernere Vegetation auf die wenigen Blüthenhaufen beschränkt wurde. Da diese nun in Folge der unterdrückten Befruchtung auch nicht einmal Samen ausbilden konnten, so

kam der axilläre unbegränzte Blüthenstand mehr als in gewöhnlichen Fällen zur Ausbildung und entwickelte zuletzt mehr männliche Blumen als anfangs. Aehnliche Verhältnisse finden sich oft, wenn männliche und weibliche Blumen im gleichen Blüthenstand vorkommen. So sind z. B. bei den Begonien die ersten zur Entwickelung kommenden Blumen jedes Blüthenstandes, vorwiegend männliche, — und die letzten vorwiegend weibliche Blumen.

Die eine Versuchspflanze, aus deren Blüthenhaufen ich täglich die von Neuem erscheinenden männlichen Blumen unter der Lupe herauspräparirte, hat wirklich auch keinen Samen angesetzt, obgleich ich selbst es für wahrscheinlich hielt, dass dies trotz aller Vorsicht dennoch stattfinden könne, da es kaum möglich ist, diese Operation so zu machen, ohne dass man die Antheren nicht zuweilen verletzt, so dass also Pollen verstreut werden könnte. Von den andern anfänglich in ein anderes Haus gestellten und weniger sorgfältig behandelten weiblichen Pflanzen, erhielt ich dagegen etwas reifen ausgebildeten Samen.

Es zeigt dieser Versuch deutlich, das *Spinacia* eine polygamische Pflanze ist, die bei wirklich verhinderter Befruchtung auch keinen Samen ansetzt. Diese aber zu verhindern ist eine so schwierige Angabe, dass ich es für unmöglich halte, das Ausschneiden der männlichen Blumen stets so zeitig und so vorsichtig vornehmen zu können, um sicher zu sein, dass nicht dennoch eine Befruchtung vorkomme. Mit anderen Worten, es giebt kaum ein schlechter gewähltes Beispiel zur Erweisung der Parthenogenesis. Nur die Kleinheit der Blumen und ungenaue Beobachtung können der Grund sein, dass diese Pflanze wiederholt als Beispiel in dieser Beziehung aufgeführt ward.

Cannabis sativa. Seit Spallanzanis Versuchen ist dies die Pflanze geblieben, mit der am meisten operirt ward. Wir haben schon im geschichtlichen Theile dieser Arbeit darauf hingewiesen, das nur Spallanzani's Versuche beweisend sein würden, könnte es nachgewiesen werden, dass sie wirklich so, wie es Spallanzani selbst beschrieben, ausgeführt wurden.

Schon Linné, Marti, Volta hatten an weiblichen abgesonderten Hanfpflanzen keinen Samen erhalten. Linné hatte seinen Versuch mit Pflanzen in Töpfen gemacht, die er ebenfalls in abgesonderte Zimmer stellte. Henschel, Lecocq, Girou de Buzareignes als unzuverlässig übergehend, war es Bernhardi, ein sonst exakter Beobachter, der ebenfalls keimfähige Samen ohne Befruchtung von dieser Pflanze zog. Die Versuche desselben, als im Freien angestellt, beweisen nichts, wie wir dies auch schon beim Referat über seinen Versuch aussprachen.

Naudin's neueste Beobachtungen sind allerdings zum Theil mit in Töpfen gezogenen Exemplaren angestellt. Auch hier ward durch den Versuch die Möglichkeit der Befruchtung durch Pollenkörner, die von weiter her durch die Luft fortgetragen wurden, durchaus nicht ausgeschlossen. Ausserdem können Naudin ebensowohl zufällig eingestreuete männliche Blumen entgangen sein, wie ihm solche bei *Mercurialis* entgangen zu sein scheinen. Es sind daher Naudin's Versuche in unsern Augen noch durchaus nicht beweisend.

Der von uns selbst im Sommer und Herbste 1858 angestellte Versuch lieferte ausserdem ein ganz anderes Resultat. Es wurden junge Hanfpflanzen einzeln in ziemlich grosse Töpfe von 6 — 7 Zoll Höhe gepflanzt, um recht kräftige Exemplare zu erziehen. Sobald man das Geschlecht derselben erkennen konnte, wurden die männlichen Pflanzen vernichtet, doch ward durch abermalige Aussaat dafür gesorgt, solche von späterer Entwickelung, zu einem spätern Versuche zu erhalten. Ausserdem fanden sich weder im Botanischen Garten, noch, so viel uns bekannt, in anderen Gärten oder in der Umgegend blühende Hanfpflanzen, da ich den Hanf nirgends angebauet sah und der hier und da zur Zierde angepflanzte Riesenhanf selten zur Blüthe gelangt. Von diesen weiblichen Pflanzen nahm ich gegen Ende August 2 Exemplare in mein Zimmer und beschnitt diese so weit, dass ich die Menge der sich täglich entwickelnden Blumen, mittelst der Lupe genau prüfen konnte. Die Pflanzen standen während des Monats September vor dem geöffneten Fenster, wurden täglich von mir selbst besorgt und zeigten ein stets kräftiges Gedeihen. Ich prüfte nicht nur die an den Pflanzen befindlichen Blumen täglich genau mittelst der Lupe, sondern nahm auch verschiedentlich von den weggeschnittenen Zweigen die Blüthenstände unter die Stehlupe. Hier zergliederte ich solche bis auf das letzte Hüllblättchen, aber niemals fand ich auch nur eine Spur einer Anthere. Die grossen gestielten drüsentragenden Haare, die sich an allen Blüthentheilen finden, scheinen von einzelnen Beobachtern für Pollinidien genommen worden zu sein, haben aber jedenfalls keine geschlechtliche Bedeutung, welche ich anfänglich denselben ebenfalls zu geben geneigt war.

Trotz dem die ganze Vegetationskraft der Pflanze auf wenige Zweige beschränkt war, setzte kein Fruchtknoten Samen an, sondern alle trockneten ab. C. Nägeli, der sich um diese Zeit einige Wochen bei mir aufhielt, untersuchte die Fruchtknoten der weiblichen Blumen wiederholt. Embryosack und Keimbläschen hatten sich normal entwickelt, in Folge des Mangels der Befruchtung vertrockneten und verdarben aber beide bald nach der Blüthe und etwas später vertrocknete auch der Fruchtknoten.

Es war inzwischen Oktober geworden, die Fenster des Zimmers, in welchem die Versuchspflanzen standen, wurden nun nicht mehr geöffnet und das Zimmer geheizt. Die Versuchspflanzen waren im letzten Stadium ihrer Vegetation. Auf den Spitzen der kleinen achselständigen Blüthenzweige waren nur noch einzelne weibliche Blumen mit frischen Narben. Jetzt war es Zeit den Versuch der Befruchtung zu machen, sonst hätte meinem Versuch in doppelter Beziehung die Beweisfähigkeit abgesprochen werden können.

Entweder hätte man annehmen können, dass gerade das Zusammenschneiden der Versuchspflanzen einen krankhaften Zustand erzeugt habe und in Folge dessen die Samenbildung unterblieben sei. (Bernhardi's Ansicht, dass im Topfe gezogene Exemplare des Hanfs überhaupt keinen Samen bilden könnten, war schon durch Naudin's Versuch wiederlegt.) Zweitens hätte die ungünstige Jahreszeit, in welche der letzte Theil des Versuches fiel, als Grund betrachtet werden können, dass keine Samenbildung habe stattfinden können. Ich nahm daher von den nachgezogenen Pflanzen in der ersten Hälfte Oktobers noch eine

weibliche und eine männliche Pflanze ins Zimmer, welche im ersten Drittheil des Monats ihre Blumen zu entwickeln begannen. Beide Pflanzen wurden gar nicht beschnitten. Als die ersten männlichen Blumen sich öffneten, wurden die paar letzten frischen Blumen der weiblichen beschnittenen Versuchspflanzen befruchtet, und alle diese setzten, trotzdem inzwischen die Culturbedingungen so ungünstig geworden waren, nicht blos noch Samen an, sondern reiften denselben auch noch bis Mitte November im geschlossenen Zimmer. Gleichzeitig ward auch die unbeschnittene weibliche Pflanze täglich befruchtet, die jetzt gerade in die Periode eintrat, in der die ersten Blumen befruchtungsfähig wurden, aber es setzte dieselbe keinen Samen mehr an.

Rekapituliren wir, so haben wir 2 zusammengeschnittene Versuchspflanzen, bei denen der ganze Bildungstrieb der Ausbildung der Samen zugelenkt ist. Unter den günstigsten Verhältnissen, bei kräftiger Vegetation und täglichem Luftzutritt setzen dieselben, so lange keine Befruchtung stattfindet, auch keinen Samen an. Unter ungünstigen Verhältnissen, im geschlossenen geheizten Zimmer, bei kürzern Tagen setzen dieselben noch Samen an und reifen ihn auch, sobald sie befruchtet werden. Eine unbeschnittene Pflanze setzt, unter den letzteren Verhältnissen befruchtet, keinen Samen mehr an.

Hieraus geht klar hervor, dass bei unseren Versuchspflanzen wirklich der Bildungstrieb der Ausbildung der Samen vorzugsweise zugelenkt ward. Wenn nun die gleichen Pflanzen unter viel günstigeren Verhältnissen bei Ausschluss der Befruchtung keinen Samen bildeten, solchen dagegen unter viel ungünstigeren Verhältnissen unter Einwirkung des Pollens bildeten, so liegt hier wohl für jeden Unbefangenen der vollständige Beweis vor, dass auch *Cannabis* nur unter Einwirkung des Pollens einen keimfähigen Samen bilden kann. Schliesslich noch einige Worte über das Verhalten der weiblichen *Cannabis*-Pflanzen. Wir fanden an den von uns genau geprüften Exemplaren keine männliche Blumen. Bernhardi beobachtete einzelne Exemplare, die ebenso viel männliche wie weibliche Blumen trugen, dagegen fand er an dem grössten Theil der weiblichen Pflanzen, durchaus keine männliche Blumen. Wenn aber monöcische Pflanzen beobachtet sind, so ist damit die Möglichkeit, dass auch einzelne eingestreuete männliche Blumen vorkommen können, gegeben und jeder derartige Versuch hat diese Möglichkeit ins Auge zu fassen. Bei der Kleinheit der Blumen und der grossen Menge derselben, die eine einzige Hanfpflanze producirt, ist die genaue Revision einer ganzen unbeschnittenen Pflanze, selbst der angestrengten Aufmerksankeit kaum möglich. Zwitterblumen sind an den weiblichen Hanfpflanzen mit Sicherheit noch nicht nachgewiesen. Ferner gehört der Hanf zu jenen Diöcisten, die eine ungeheuere Menge von Pollen bilden, welcher leicht verstäubt und auf sehr weite Entfernungen hinwirken kann. Dieser Umstand macht Versuche in Gegenden wo Hanf gebauet wird, stets sehr zweifelhaft und wird jeden derartigen Versuch in solchen Gegenden auch für die

Folge zweifelhaft machen, wenn man nicht ähnliche Vorsichtsmassregeln trifft, wie Spallanzani angiebt, getroffen zu haben. In unsern Augen ist nun zwar die Sache entschieden, indem wir glauben den Beweis geliefert zu haben, dass die Hanfpflanze ohne Befruchtung keinen Samen ansetzt. So sehr wir aber in solchen Sachen nach eignen Versuchen uns unser Urtheil zu bilden gewohnt sind, so natürlich finden wir es, wenn auch andere ähnlich denken. Es sind aus diesem Gesichtspunkte zahlreiche fernere genaue Versuche sehr wünschbar, ja sogar nothwendig, wenn diese seit einem Jahrhundert brennende Frage endlich einmal definitiv gelöst werden soll.

Coelobogyne ilicifolia endlich konnte ich noch nicht beobachten, kann also auch kein bestimmtes Urtheil über solche fällen.

Uebersehen wir aber das, was bis jetzt über dieselbe, von Männern die soche selbst beobachten konnten, publicirt ist, so geht daraus klar hervor, dass über diese Pflanze bis jetzt noch nicht abgeschlossen ist.

Das lange Wachsthum der Narben hat in unsern Augen keinerlei beweisende Kraft, worüber wir uns mehrfach aussprachen. Männliche Blumen oder einzelne Antheren sind bis jetzt von keinem Beobachter an der weiblichen Pflanze gefunden worden. Dagegen ist diese Pflanze aber auch noch von keinem Beobachter von Anfang ihrer Blüthe bis zu deren Ausgang, was den ganzen Sommer hindurch dauern soll, beobachtet worden. Männliche normal gebildete Blumen trägt dieselbe sicher nicht, dafür bürgen die Männer, die sie beobachteten, genugsam. Dagegen ist es immerhin möglich, dass fortgesetzte Beobachtung vielleicht einzelne sitzende Antheren zwischen den Brakteen oder neben den Drüsen, nachweisen könnte. Unmöglich endlich ist es auch nicht, dass im Innern des Fruchtknotens einzelne Pollenkörner ausgebildet werden könnten. Der einzelne Pollenschlauch den Deecke bis zum Embryosack der *Coelobogyne* vorgedrungen fand, ohne dass es ihm oder Radlkofer gelang Pollenkörner auf der Narbe nachzuweisen, könnte solch ein Verhältniss andeuten. Thatsache ist es, dass fremde Pollenkörner solche Schlauchbildungen sonst nicht zeigen, was A. Braun selbst zugiebt.

Im Uebrigen verhielten sich die beobachteten *Coelobogyne*-Pflanzen, ganz so wie sich durch nur wenige Pollenkörner zufällig befruchtete weibliche Pflanzen überhaupt zu verhalten pflegen. Neben Blumen, die nicht ansetzen, einzelne Früchte mit tauben Samen und andere die nur 1, 2 oder seltner 3 vollkommne Samen enthalten. Dass es weder Radlkofer noch Deecke gelang bei den andern in Entwickelung begriffenen Keimbläschen Pollenschläuche aufzufinden, das kann kein Beweis für die Parthenogenesis sein, denn wo nur einzelne solcher in die Narbe eindringen, können sie jedenfalls nur schwer aufgefunden werden. Dazu ist die Zahl der untersuchten Fruchtknoten, in denen die Keimbläschen sich entwickelten, jedenfalls gering. Hierzu kommt (wenn dies nicht Schreibfehler ist), dass Radlkofer 1—3 Keimbläschen im Embryosack gefunden haben will, von denen sich 1 — 3 zu Embryonen entwickelten, (*Polyembryonie*) während Deecke deren nur 2 fand, von denen sich immer nur eins zum Embryo entwickelte. Wenn so, für den Fall der normalen Embryobildung,

noch manches unklar oder noch nicht genügend beobachtet ist, so dass eine Entwickelung mittelst Befruchtung immer noch zulässig ist, so stehen allerdings Klotzsch's Beobachtungen, die gegen die Entwickelung eines normalen Embryo's sprachen, noch ganz vereinzelt da. Dagegen ist auch von der andern Seite, weder die Beschreibung, noch die Abbildung des ausgebildeten Embryo's gegeben worden, sondern wir haben bis jetzt nur Darstellungen der ersten Entwickelungsstadien des Keimbläschens erhalten. Auch dies ist eine noch wesentliche Lücke und so kann auch, so lange nicht jene Differenzen in den Darstellungen Radlkofer's, Braun's und Klotzsch's ausgeglichen sind, so lange diese merkwürdige Pflanze ferner nicht während ihrer ganzen Blüthezeit streng geprüft ward, auch sie noch nicht als vollgültiger Beweis für die Parthenogenesis im Pflanzenreiche hingestellt werden.

III. Allgemeine Beobachtungen über geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung im Pflanzenreiche.

Der Streit, der zwischen den 2 gewichtigsten Vertretern der Parthenogenesis im Pflanzenreiche, A. Braun und Radlkofer, über Erklärung und Bedeutung derselben entstanden ist, hat nach unserer Ansicht auch diese Frage ihrer endlichen Lösung einen gewaltigen Schritt näher geführt.

Obgleich wir in den beiden vorhergehenden Abschnitten gezeigt zu haben glauben, dass ein allgemein gültiger Beweis für die Parthenogenesis im Pflanzenreich noch gar nicht geleistet ist, so wollen wir dennoch auch noch einen Blick auf das werfen, was man eigentlich im Pflanzenreich unter Parthenogenesis zu verstehen hätte.

Wir unterscheiden zwischen 2 Arten der Fortpflanzung, zwischen geschlechtlicher (*digenetischer*) und ungeschlechtlicher (*monogenetischer*) Fortpflanzung.

Die geschlechtliche Fortpflanzung ruft ein Geschlechts-Individuum (Embryo oder die als letztes Produkt der Befruchtung entstandenen Sporen) mittelst Zusammenwirkung zweier Organe ins Dasein, durch welches die Pflanzenart fortgepflanzt wird. Die durch die geschlechtliche Fortpflanzung erzeugten neuen Individuen, werden insofern unabhängiger aus dem Verband des Mutter-Individuums ausgeschieden, als sie zwar durch eine Idee zusammengehalten werden, d. h. eine Reihe bestimmter Charaktere, mit einander gemein haben, sich aber dennoch in dem ganzen Formenkreis bewegen können, welcher der Pflanzenart eigen ist. Sind, wie bei der Erzeugung von Bastarden, zwei verschiedene

Pflanzenarten bei der Bildung des Keimlings thätig, dann vererben sich Eigenschaften von beiden Arten auf das so entstandene neue Individuum, die jedoch nur individuell und nicht typisch sind. Unsere Experimente die wir in dieser Beziehung angestellt haben, haben nämlich gezeigt, dass es unfruchtbare und fruchtbare Bastarde giebt. Die letzteren können durch Selbstbefruchtung wieder neue Keimlinge erzeugen, welche bald den Typus des Bastardes einhalten, bald mehr oder weniger zum Formenkreis einer der älterlichen Arten zurückkehren. Der Pflanzenbastard erhält mithin durch geschlechtliche Fortpflanzung seine typische Form nicht. (Vergl. Bonplandia 1857 und Gartenflora 1858. pag. 26.)

Mittelst der ungeschlechtlichen Vermehrung trennt sich ein Knospen-Individuum (die aus der Knospe oder Knospenzellen hervorgehenden Individuen) aus dem Verband der Mutterpflanze, welches alle Eigenthümlichkeiten der Mutterpflanze besitzt, also speciell das Individuum nicht die Art fortpflanzt, ja das, wenn die verschiedenen Theile der Achse eine besondere abweichende Bildung zeigen, wie einzelne Coniferen, oft nur den Achsentheil von dem es stammt, fortpflanzt. Wo von Pflanzen mit getrennten Geschlechtern durch ungeschlechtliche Fortpflanzung neue Individuen erzeugt werden, repräsentiren diese auch nur das Geschlecht der Mutterpflanze. Die *Parthenogenesis* würde, wie dies Radlkofer in seiner neuesten Arbeit durchaus richtig hervorhebt, eine durchaus ungeschlechtliche Fortpflanzung sein. Sie würde sich in so fern von den andern ungeschlechtlichen Fortpflanzungsarten unterscheiden, als die Zelle, (Keimbläschen, Sporenzelle) deren Weiterentwickelung in den uns bekannten Fällen, nur mittelst der Befruchtung vor sich geht und so die Anfangsbildung zur Entwickelungreihe des Geschlechtsindividuum wird, nun auch ohne Befruchtung sich zum Knospen-Individuum entwickeln könnte.

Ziehen wir hieraus die Consequenzen, so würden durch die Parthenogenesis Knospenindividuen gebildet, die auch deren Eigenthümlichkeiten haben müssten und also nur das Individuum fortpflanzen würden. Es würden mithin weibliche Pflanzen auch nur weibliche Pflanzen auf diesem Wege reproduciren können. Dass dies bei allen, mit Ausnahme von *Coelobogyne*, für die *Parthenogenesis* im Pflanzenreiche aufgestellten Beispielen nicht der Fall ist, ist hinlänglich bekannt, und wird hierdurch ein neuer Beweis geliefert, dass diese Pflanzen nur unterm Einfluss der Befruchtung ihre Samen reifen konnten. Es ist dies ein Beweis, der sich auf die allgemein anerkannten Eigenthümlichkeiten des Knospen-Individuums stützt und nicht wie das Verhalten der Narben, welches nach Radlkofer das Gegentheil beweisen soll, nur von einem einzigen Falle abgeleitet ist, von dem man überhaupt nicht wissen kann, ob er nicht vielleicht gar auch bei der regelmässig befruchteten Pflanze der normale ist. *Coelobogyne* hat bis jetzt nur weibliche Pflanzen, aus den in Kew erzeugten Samen geliefert, das ist faktisch und würde für parthenogenetische Erzeugung der Samen derselben sprechen. Faktisch aber ist auch, dass bis jetzt nur einige wenige, von den auf diesem Wege von den Mutterindividuen dieser Pflanze in Kew erhaltenen

jungen Pflanzen, Blumen entwickelt haben und dass es mithin sehr leicht möglich ist, dass sich unter der viel grössern Zahl derer, die noch nicht geblühet haben, männliche Exemplare noch finden können. Ferner haben bis jetzt sicherlich nur Individuen der ersten Generation geblühet und ausser den in Kew und Berlin befindlichen Pflanzen, scheint diese Pflanze in europäischen Gärten überhaupt noch nicht geblühet zu haben. Endlich sind die Versuche mit dieser Pflanze früher überhaupt nicht controllirt worden und es ist sogar möglich, dass die wenigen Exemplare, die bis jetzt blüheten, nicht aus Samen, sondern aus Stecklingen erzogen wurden. Jedenfalls fehlt uns in dieser Beziehung bis jetzt ein genauer Nachweis.

Eine zweite Betrachtung, die sich an die ohne Befruchtung vor sich gehende Ausbildung des Keimbläschens der Phanerogamen zum Knospen-Individuum knüpft, bildet dessen Entwickelung zum Keime.

Alle sich aus dem Gewebe der Pflanze trennenden und ohne künstliche Mithülfe zum eignen Individuum werdenden Knospen-Individuen, gehen allerdings ebenfalls ursprünglich aus einer einzelnen Zelle hervor. Ihre weitere Entwickelung schliesst sich aber in ihrer Weise dem Wachsthum des beblätterten Stammes an, wie dies die verschiedenen Formen der Zwiebel und Knolle zeigen, wo die Blattorgane an einer sehr verkürzten Achse mehr oder weniger gehäuft sind und die gleiche Stellung wie an den Knospengebilden der Mutterpflanze beibehalten. Da wo an Blattorganen einzelne Zellen sich zum selbstständigen Individuum ausbilden, da zeigt sogar das sich individualisirende Gebilde eine noch auffallendere Aehnlichkeit in seiner ersten Entwickelung mit der Mutterpflanze. (Vergleiche: Regel, die Pflanze und ihr Leben in ihrer Beziehung zum praktischen Gartenbau, pag. 320—324. Zürich 1855 bei Fr. Schulthess.)

Würde es daher wirklich möglich sein, dass auf ungeschlechtlichem Wege sich aus dem Keimbläschen ein Knospen-Individuum entwickeln könnte, so müsste dieses auch den Gesetzen der Entwickelung der Knospen-Individuen folgen, oder wenigstens in seiner weiteren Ausbildung sich zu denselben hinneigen, und könnte nicht die durchaus gleiche Entwickelung und Ausbildung, wie der normale, mittelst der Befruchtung entstehende Embryo zeigen. Dass bei dem Keimling von *Coeloboyne* hier noch eine Lücke ist, die noch ausgefüllt werden muss, haben wir gezeigt. Wäre die Bildung des ausgebildeten Keimlings ähnlich wie ihn Klotzsch beschreibt, so würde damit auch alles aufgeklärt sein.

Zu den *Cryptogamen* übergehend, so sahen wir, wie die *Gymnospermen* die Brücke nach diesen bilden. Wir sahen bei *Cycas* Endosperm und Corpuscula ohne Befruchtung sich ausbilden. Erst die Bildung des Embryo's aus einem der vielen Keimbläschen unterblieb in Folge des Mangels der Befruchtung.

Mit den Farren und Rhizocarpeen beginnt die Reihe jener Bildungen, (s. unsere Schlussbemerkungen zu A. Braun's Schrift pag. 20 — 22), wo erst die letzten Produkte der geschlechtlichen Entwickelungsreihe, (die dem Embryosack analogen Sporen) die Anfangsbildung zum neuen Individuum darstellen, oder wo, wenn wir an die *Gymnospermen* an-

schliessen, der Embryosack (die Spore) sich von der Mutterpflanze getrennt zum Vorkeim, Lager oder der laubbildenden Achse entwickelt; letztere tragen die Geschlechtsorgane, durch deren gegenseitige Befruchtung die geschlechtliche Entwickelungsreihe in's Leben gerufen wird. Diese letztere wird nach den niedrigern Zellen-Cryptogamen hin an Bildungsmomenten immer ärmer, bis sie bei den einfachsten Pflanzen mit der ungeschlechtlichen Entwickelungsreihe fast oder ganz zusammenfällt. Da wo eine freie Zelle (Sporenzelle) durch Befruchtung zur befruchteten Spore wird, haben wir den ähnlichen Fall wie bei den Thieren, wo das Ei sich mittelst der Befruchtung zum Geschlechtsindividuum unmittelbar entwickelt.

Je weniger Momente die geschlechtliche Entwickelungsreihe bei den niedrigern Pflanzen von dem Momente der Befruchtung, bis zur Bildung der Sporen zeigt, eine um so grössere Selbstständigkeit zeigt bei diesen Gewächsen auch die einzelne Zelle und kann, von der Mutterpflanze sich lösend, (Keimzellen) in ähnlicher Weise diese Gewächse in ungeschlechtlicher Form fortpflanzen, wie dies die Knospengebilde der höhern Pflanzen thun.

Sporenzellen die von solchen Pflanzen sich vor der Befruchtung trennen, können daher dennoch keimfähig sein und Knospen-Individuen darstellen.

Auf diese Weise erklärt sich auch das von A. Braun gegebene höchst interessante Beispiel von *Chara crinita*. Die Befruchtungsgeschichte von *Chara* ist zwar überhaupt noch nicht bekannt. Sehr wahrscheinlich wird aber die nackte Terminalzelle (Sporenzelle) der sogenannten weiblichen Blumen direkt befruchtet. Aber auch unbefruchtet abfallend keimt sie, stellt aber nur Knospen-Individuen dar. Dass eben an den meisten Lokalitäten nur weibliche Exemplare gefunden werden und dass männliche oder monöcische Pflanzen bis jetzt nur selten und nur an einzelnen Lokalitäten gefunden wurden, spricht hier für eine ungeschlechtliche Fortpflanzung, auf die viele der niedrigsten Cryptogamen wohl einzig angewiesen sind, ganz deutlich.

Diese überhaupt grössere Selbstständigkeit der sich aus dem Verband der Mutterpflanze trennenden Zellen, erklärt es ferner, dass manche Moose, Lebermoose, Flechten, auf vielen Lokalitäten gar keine Früchte, oder höchst selten Früchte bilden und sich lediglich aus Keimzellen ungeschlechtlich vermehren. Bei den Moosen und Lebermoosen etc., wo die Spore nicht das direkte Erzeugniss der Befruchtung, sondern nur das letzte Produkt in der geschlechtlichen Entwickelungsreihe ist, kommt es vor, dass Keimzellen dieser Pflanzen ganz den gleichen Entwickelungsgang bis zum Eintritt der Befruchtung zeigen, wie die Sporen derselben.

Parthenogenesis können wir solche Erscheinungen bei diesen Pflanzen jedoch nicht nennen. *Parthenogenesis* der Moose und Lebermoose würde vielmehr der Vorgang genannt werden müssen, wenn ohne Befruchtung aus den Archegonien derselben sich Sporenfrüchte mit normalen Sporen hervorbilden würden, da hier die Sporenfrucht das Resultat der Befruchtung ist, wie bei den Farren die laubbildende Achse, bei den Phanerogamen der Embryo.

Bei *Chara* ist die von Braun aufgeführte Thatsache ähnlich zu erklären, indem die aus der unbefruchteten Sporenzelle sich fortpflanzende Chara crinita, eine gewöhnliche Form der ungeschlechtlichen Fortpflanzung ist, die sich durch die selbstständigere Natur der sich bei niedrigeren Pflanzen ablösenden Zellen erklärt. Wie die Keimzellen der Moose, zeigen diese Sporenzellen den gleichen Entwickelungsgang der ungeschlechtlichen Entwickelungsreihe, wie die mittelst Befruchtung entstandenen Sporen. ***Parthenogenesis*** würde es dann sein, wenn für diesen Fall nachgewiesen würde, dass die in Folge von Befruchtung entstehenden Sporenfrüchte, die durchaus gleiche Bildung, wie die hier ohne Befruchtung keimenden besitzen würden, oder dass mit anderen Worten, die hier wahrscheinlich sehr kurze geschlechtliche Entwickelungsreihe, den gleichen Verlauf, wie die ungeschlechtlich zur Entwickelung kommende Spore zeigen würde.

Parthenogenesis bei den Phanerogamen endlich würden wir nur dann jene ungeschlechtliche weitere Entwickelung des Keimbläschens nennen, von der es nachgewiesen werden könnte, dass solche bis zur Entwickelung des ausgebildeten Keimes, den gleichen Verlauf, wie der normale Embryo habe. Von der wirklichen geschlechtlichen Fortpflanzung würden derartig parthenogenetisch gebildete Keime sich nur dadurch unterscheiden, dass sie als ungeschlechtlich gebildet, auch nur das Individuum, nicht die Art fortpflanzen würden. Die Umbildung des Keimbläschens zu einem Knospenorgane, würde einfach eine Form der ungeschlechtlichen Fortpflanzung sein. Keiner dieser beiden Fälle ist aber bis jetzt erwiesen. Der erstere Fall trägt im höchsten Grade den Charakter der inneren Unwahrscheinlichkeit an sich. Von beiden Modalitäten könnte man sagen, dass, was beim Keimbläschen der einen Pflanze unter gewissen Bedingungen möglich, auch von dem Keimbläschen aller Pflanzen möglich sein müsste. Dagegen spricht die Masse der direkten Erfahrungen, dafür eine einzige Pflanze, bei der noch vieles aufzuklären ist.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1 — 7. **Spinacia oleracea. L.**

Fig. 1. Vollkommene männliche Blumen, mit 4 Blüthenblättchen vergrössert.
» 2. Vergrösserte weibliche Blume. Seitlich bei *a* sieht man 2 verkümmerte männliche Blumen mit sitzenden Antheren, die von den Blüthenblättchen noch verdeckt sind.
» 3. Vergrösserte männliche verkrüppelte Blume. Bei *a* eine solche, welche einen einzigen mit Träger versehenen Staubfaden entwickelt hat. Bei *b* eine junge weibliche Blume. Bei *c* blosgelegte Antheren von einer verkrüppelten männlichen Blume mit sitzenden Antheren.
» 4. Ein einzelner normaler Staubfaden mit vollkommener, eben sich öffnender Anthere, etwas stärker vergrössert.
» 5, u. 6. Zwei Pollenkörner, aus einer der sitzenden Antheren, stark vergrössert.
» 7. Vollkommene männliche Blume mit 5 Blättchen, vergrössert.

Fig. 8 — 9. **Mercurialis annua L.**

Fig. 8. Vergrösserte weibliche Blume, sammt den Blüthenhüllen.
» 9. Schwächer vergrösserte, durch regelmässige Befruchtung entstandene Frucht, gekrönt von den Narben.

Fig. 10. **Encephalartos longifolius Lehm.**

» 10. Durchschnitt durch den ohne Befruchtung gereiften Samen von *Encephalartos longifolius Lehm;* in natürlicher Grösse. Der dicht mit Endosperm ausgefüllte Embryosack hat die Kernwarze fast ganz ausgefüllt. An der dem Knospenmund zugekehrten Spitze des Embryosackes, sieht man zwei kleine ovale von Endosperm nicht ausgefüllte, jetzt hohle Körperchen neben einander liegen. Es sind dies 2 vertrocknete *Corpuscula*, welche keinen Embryo entwickelt haben.

Fig. 11 — 16. **Ceratozamia robusta Miq.**

Fig. 11. Die Schuppe eines weiblichen Blüthenzapfens in natürlicher Grösse. Dieselbe trägt am Grunde wo sie abgeschnitten ist, auf jeder Seite ein nacktes Ei.
» 12. Ein Ei vergrössert. Dasselbe ist bis unter seiner Spitze von Haaren bedeckt. An der Spitze erblickt man den Einmund.
» 13. Durchschnitt durch eins der Eier bei 25facher Vergrösserung. Der Schnitt geht durch den Eimund und die Kernwarze. Bei *a* liegt der Einmund, *b* ist die Kernwarze in deren

Innern sich eine Zelle zum Embryosack bei *d* bereits ausgebildet hat. Eine einfache Eihülle *c. t.* deckt die Kernwarze. Aussen ist die Eihülle mit eigenthümlichen Haaren besetzt.

Fig. 14. Solche Haare bei 200facher Vergrösserung.

» 15. Die Schuppe des gleichen Zapfens nach 9 Monat. Die beiden Eier haben sich zu Samen entwickelt. Natürliche Grösse.

» 16. Ein Durchschnitt durch den Samen, schwach vergrössert. Derselbe geht durch den Eimund und senkrecht durch die Achse des Eies. Bei *a* der Eimund. Der Embryosack *b* hat die Kernwarze fast ganz erfüllt. Bei *g* sieht man noch die Spitze der Kernwarze als kleinen Höcker. Der Rest derselben umgiebt den Embryosack als Samenschaale. Bei *c* liegen zwei *Corpuscula*, *d. d* ist die einfache Eihülle, die sich zur Samenschaale umzubilden beginnt.

N° 17 — 21. **Dioon edule Lindl.**

Fig. 17. Zwei junge Antheren bei 25facher Vergrösserung

» 18. 19. 18 *b*. Schuppe des männlichen Zapfens mit den Antheren. 18 von unten 19 von der Seite. 18 *b* von vorn. Natürliche Grösse.

» 20. Eine ausgewachsene Antherengruppe bei 10facher Vergrösserung.

» 21. *a* — *e* Pollenkörner bei 200maliger Vergrösserung.

N° 22. **Ceratozamia robusta Miq.**

Fig. 22. Querdurchschnitt durch ein Corpusculum und das angrenzende Endosperm bei 170facher Vergrösserung. Nach unten bei *a* liegen die an die Wandung angrenzenden Zellen des *Corpusculum*, nach oben bei *b. b* die Zellen des umgebenden, den Embryosack erfüllenden Endosperms.

Tafel II.

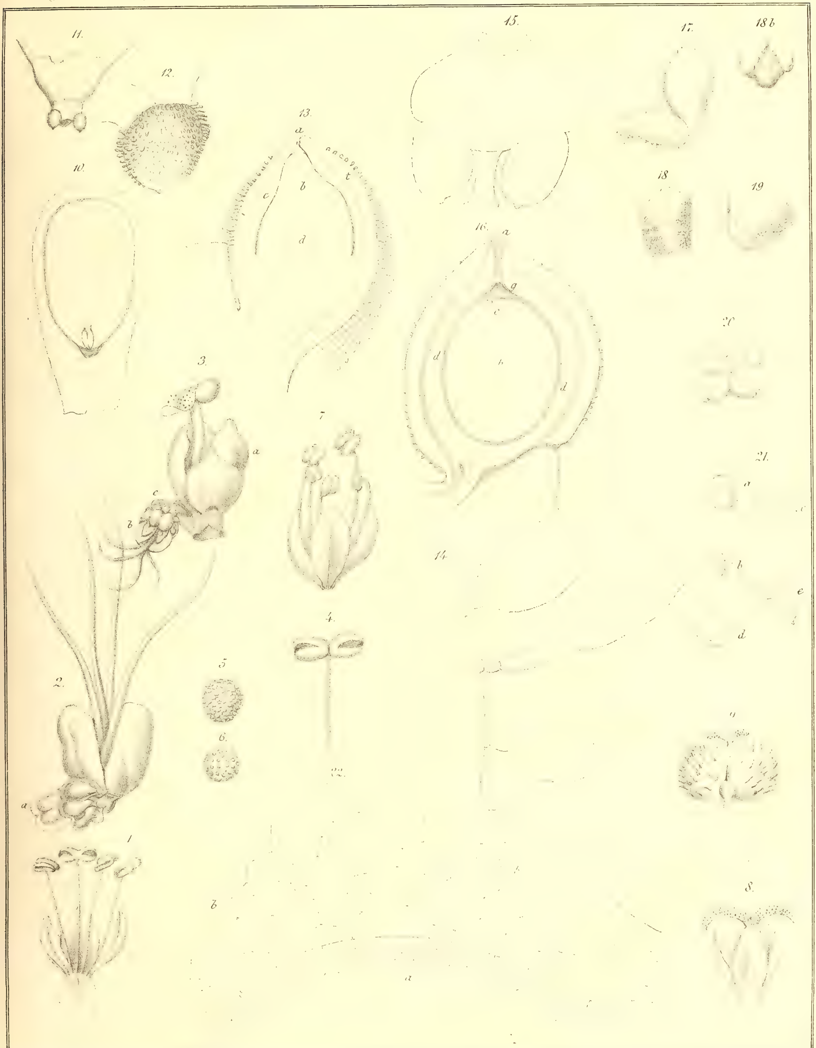
N° 23 — 26. **Ceratozamia robusta Miq.**

Fig 23. Der Durchschnitt durch die Längsachse ven 2 Corpusculen bei 60facher Vergrösserung. Bei *a* die Spitze der ursprünglichen Kernwarze, die als Samenschaale den Embryosack umschliesst. *b. b* die beiden *Corpuscula*, das eine theils mit Zellgewebe erfüllt. Rings um dieselben das Emdosperm des Embryosackes.

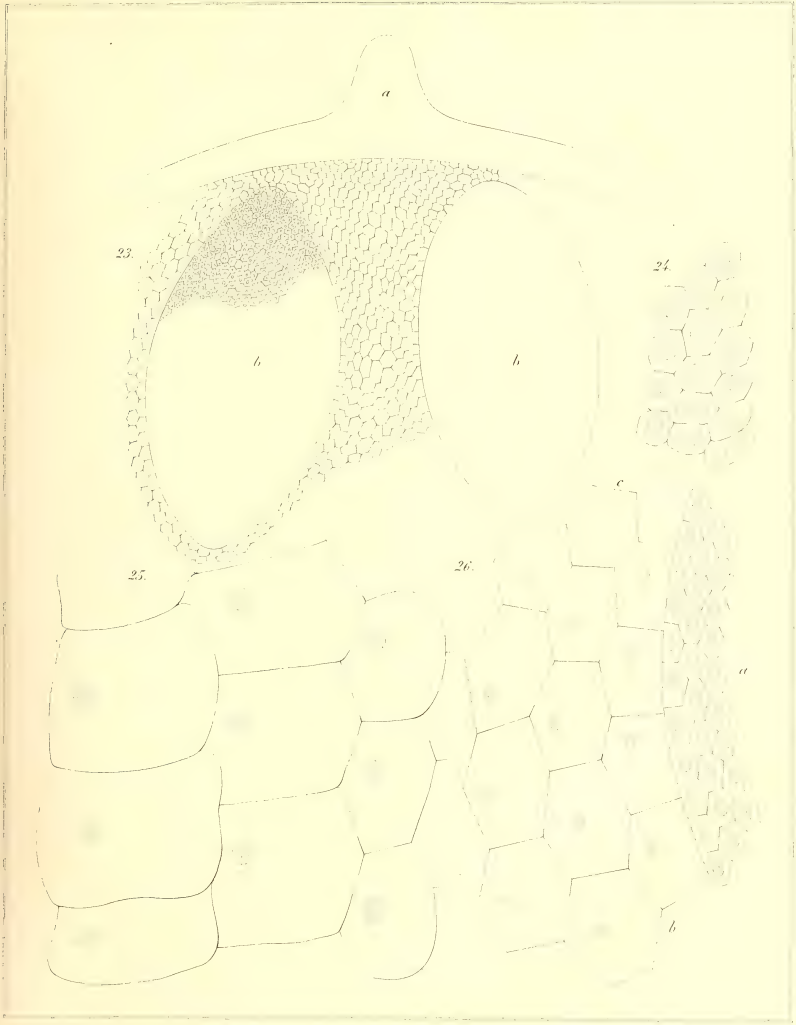
» 24. Zellen aus dem Centrum eines *Corpusculum* bei 170facher Vergrösserung.

» 25. Zellen aus der Mitte des Embryosackes bei 170facher Vergrösserung.

» 26. Längsschnitt durch ein *Corpusculum* und das umgebende Endosperm bei 170facher Vergrösserung. Bei *a* die Zellen des Corpusculum, bei *b* die des Endosperms.



R. Hundrieser lith.


a
23.
b
b
24.
c
25.
26.
a
b

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 3.

BEITRÄGE ZUR ANATOMIE
DES
KEILBEINES UND SCHLÄFENBEINES.

VON
Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.**

(Mit 1 Tafel.)

Der Akademie vorgelegt am 4. Februar 1859.

St. PETERSBURG, 1859.
Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:
EGGERS UND COMP. in St. Petersburg, LEOPOLD VOSS in Leipzig.

Preis 25 Kop. = 8 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

K. Vesselovsky, beständiger Secretair.

Im März 1859.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

BEITRÄGE ZUR ANATOMIE

DES

KEILBEINES UND SCHLÄFENBEINES.

(Mit 1 Tafel.)

Von Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.**

Die Anatomen haben am Keilbeine den *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior* und an der Pyramidenspitze des Schläfenbeines den *Processus sphenoidalis posterior* bis jetzt unberücksichtigt gelassen, obgleich ersterer dem wohlberücksichtigten *Processus clinoideus medius* an Häufigkeit des Vorkommens wenig nachsteht, letzterer aber diesen darin bedeutend übertrifft. Auch haben die Anatomen einen kurzen Kanal oder ein Loch, *Foramen petro-sphenoideum s. spheno-petrosum osseum anomalum*, übersehen, welches in Folge des Ueberbrückens des Endes des *Sulcus petrosus inferior* durch jene Fortsätze bei ihrer Vereinigung, oder doch Annäherung bis auf eine geringe Distanz, vollständig oder unvollständig zu Stande kommt, und im Menschenschädel eine Bildung ausnahmsweise repräsentirt, wie sie bei gewissen Thieren *constant* zu finden ist.

Die Fortsätze verdienen theils wegen der Häufigkeit ihres Vorkommens, theils wegen ihrer Entwickelung bis zur Schliessung des oberen Endes des *Sulcus petrosus inferior* zu einem kurzen Kanale oder Loche, nebst diesem eben so unsere Aufmerksamkeit, wie der *Processus clinoideus medius* und das durch dessen Annäherung, Anlagerung oder Verwachsung mit dem *Processus clinoideus anterior* oder *Processus clinoideus posterior superior* gebildete *Foramen interclinoideum anterius s. carotico-clinoideum osseum* und das *Foramen interclinoideum posterius osseum*. Die Anatomen haben ausserdem an und neben dem Keilbeinsattel zwei Paare Bänder, die *Ligamenta interclinoidea et petro-sphenoidea s. sphenopetrosa posteriora* unberücksichtigt gelassen, die durch Ueberbrücken des Keilbeinsattels und des *Sulcus petrosus inferior constant Foramina interclinoidea et petro-sphenoidea osteo-fibrosa* schliessen. Diese Fortsätze, Bänder und Löcher sind Gegenstände vorliegender Abhandlung:

A. Zur Osteologie.

Processus petrosi ossis sphenoidei.

An den Rändern des hinteren Umfanges des Körpers des *Sphenoideum* Erwachsener und zwar am seitlichen Rande der Sattellehne, am seitlichen Rande seiner hinteren Fläche und an dem hinteren Ende seiner kleinen flügelförmigen Seitenfortsätze[1]), an die sich die *Alae majores* früher anlagern, später damit verwachsen, sind jederseits vier Fortsätze zu bemerken. Zwei davon gehören der Sattellehne, einer dem eigentlichen Körper, und einer dem kleinen flügelförmigen Seitenfortsatze des letzteren.

Von den zwei der Sattellehne sitzt der obere an der Ecke zwischen deren oberem und seitlichem Rande, der untere über dem unteren Ende des Seitenrandes derselben. Der des Körpers entwickelt sich über der oberen Ecke seiner hinteren Fläche und der des kleinen flügelförmigen Seitenfortsatzes kömmt vom Seitenrande seines hinteren Endes.

Von diesen vier Fortsätzen gehen drei, d. i. der untere der Sattellehne, der des Körpers und der des kleinen flügelförmigen Fortsatzes entweder constant, oder öfters, oder bisweilen eine Verbindung mit den drei Fortsätzen des massiven Theiles der Pyramidenspitze des *Temporale* ein, wesshalb ich sie Schläfenpyramidenfortsätze, *Processus petrosi*, nenne.

Ich bezeichne die genannten Fortsätze mit nachstehenden Namen: *Processus clinoideus posterior superior* (*Processus clinoideus posterior auct.*); *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior; Processus petrosus medius* (*Processus basilaris — Sue —, Processus occipitalis — Loder —* Plättchen des Fusses der Sattellehne *— Henle —*) und *Processus petrosus anterior* (*Lingula sphenoidalis s. carotica auct.*)

Der *Processus clinoideus posterior superior* ist vom *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus inferior* durch eine Ausbuchtung oder einen Ausschnitt; der letztere vom *Processus petrosus medius* durch den *Sulcus* für den *Sinus petrosus inferior;* dieser vom *Processus petrosus anterior* durch den aufsteigenden Theil des *Sulcus caroticus* geschieden.

Da von diesen Fortsätzen nur drei beschrieben sind; der *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior* aber, meines Wissens, von den Anatomen noch nicht berücksichtigt wurde, so wird dieser hier beschrieben werden. H. Cloquet[2]), Ph. Fr. Blandin[3]), Ph. C. Sappey[4]) erwähnen allerdings am Seitenrande der Sattellehne eines Ausschnittes für den *Nervus abducens* und *J. Cruveilhier*[5]) eines oder bisweilen eines doppelten Ausschnittes für den *Nervus trochlearis* (unrichtig) und den *Nervus abducens;* doch nicht des Fortsatzes.

[1]) Diese Seitenfortsätze, die M. J. Weber — Vollst. Handb. d. Anat. d. m. K. Bd. I. Bonn. 1839 pag. 110 — beschrieben, sind wohl von den *Alae minores, majores* und *palatinae* (*processus pterygoidei*) zu unterscheiden.

[2]) Traité d'anat. descr. 6. ed. Tom. I. Paris 1836 p. 66.

[3]) Nouv. élém. d'anat. descr. Tom. I. Paris 1838 p. 89. Not. 1.

[4]) Manuel d'anat. descr. Tom. I. Paris 1850 p. 35.

[5]) Traité d'anat. descr. 3. ed. Tom. I. Paris 1851 pag. 121. Not. 1.

Der *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior* (Fig. I, II, b.; III, d.) ist in $^{11}/_{32}$ also in mehr als $^1/_3$ d. F. und dabei häufiger beiderseitig, als einseitig zugegen. Ueberwiegend häufig kommt er einfach, selten und zwar in $^1/_{32}$ d. F. an einer und derselben Seite doppelt (Fig. I, II, b') und in $^1/_{80}$ d. F. doppelzackig vor. Die zwei *Processus* oder zwei Zacken liegen bald über, bald neben einander. Doppelte *Processus* können zugleich mit doppelten *Processus sphenoidales posteriores* der Schläfenpyramidenspitze (Fig. I, II, c') auftreten und denselben gegenüber stehen. Er sitzt immer am unteren Ende, oder doch unter der Mitte der Höhe des Seitenrandes der Sattellehne knapp über und an dem *Sulcus*, durch den der für den *Sinus petrosus inferior* über den *Processus petrosus medius* des Keilbeinkörpers in die Hypophysengrube übergeht, oder in eine breite Furche der Seitenfläche des Keilbeinkörpers sich fortsetzt. Dabei ist er mehr als in der Hälfte d. F. quer nach aus- und rückwärts, sonst nach ab-, rück- und auswärts über genannter Furche gegen den *Processus sphenoidalis posterior* der Schläfenpyramidenspitze gerichtet; und zum *Processus petrosus medius*, von diesem in $^2/_3$ d. F. durch eine Ausbuchtung in $^1/_3$ d. F. durch einen winkligen Ausschnitt geschieden, so gestellt, dass er etwa in $^2/_3$ d. F. über ihm und in $^1/_{25}$ d. F. fast nur hinter ihm hervorsteht. Meistens ($^2/_3$ d. F.) erscheint er in Gestalt einer dreieckigen Platte oder einer dreiseitig pyramidalen Zacke; übrigens entweder als dreiseitig pyramidaler Stachel und länglich dreieckiger plattartiger Fortsatz ($^1/_5$ d. F.), oder als länglich viereckige Platte, länglich vierseitiger Fortsatz, spatelförmiger Fortsatz oder abgerundeter oben und unten abgesetzter Kamm ($^1/_6$ d. F.). Meistens ist er von vorn nach hinten *comprimirt* und bisweilen hakenförmig gekrümmt. Er ist 1—7 mm. lang, 1—4 mm. breit und bis 2 mm., von vorn nach hinten, dick. In $^1/_{50}$ d. F. nähert er sich dem *Processus sphenoidalis posterior* der Schläfenpyramidenspitze auf $1^1/_2$—2 mm.; in $^1/_{50}$—$^1/_{80}$ d. F. nach Schädel-Zahl und in $^1/_{100}$—$^1/_{160}$ nach Seitenzahl verbindet sich aber ersterer mit letzterem. Bisweilen sitzt zwischen *Processus clinoideus posterior superior* und *inferior* noch ein Zäckchen, welches ohne alle Bedeutung ist.

Processus sphenoidales apicis partis petrosae ossis temporalis.

An der Spitze des massiven Theiles der *Pars petrosa* des *Temporale* sind drei Nebenspitzen, *Processus sphenoidales apicis partis petrosae ossis temporalis*, eine vordere, mittlere, und hintere zu unterscheiden, welche durch zwei Zwischen-Ränder, einen vorderen und einen hinteren, von einander separirt sind und eben so vielen Fortsätzen am Körper des *Sphenoideum* gegenüber stehen.

Die vordere Nebenspitze fehlt selten ($^1/_{10}$ d. F.), die mittlere ist immer oder fast immer zugegen, die hintere oft (beinahe $^1/_2$ d. F.) vorhanden. Der vordere Zwischenrand fehlt sehr selten ($^1/_{33}$ d. F.), der hintere öfters (unter 7 Fällen 3 Mal).

Die vordere Nebenspitze, *Processus sphenoidalis anterior*, ist eine Ecke zwischen dem vorderen Zwischenrande und dem hinteren Rande des mit der eigentlichen Ausmündung des *Canalis caroticus* zusammengeflossenen *Defectes* seiner oberen Wand. Sie kommt

abgerundet, abgestutzt, ausgeschnitten oder auch zackig vor. Meistens ($^1/_2$ d. F.) erscheint sie rechtwinklig oder stumpfwinklig, selten ($^1/_{10}$ d. F.) spitzwinklig und dann bisweilen zugleich als dreieckige Zacke oder dreiseitig pyramidales Fortsätzchen ausgezogen. Dieselbe steht dem *Processus petrosus anterior s. Lingula sphenoidalis* gegenüber, mit dessen Ende sie sich aber selten durch Harmonie vereinigt und im vorgerückten Alter selten mit ihm verwächst, obgleich in $^3/_8$—$^1/_3$ d. F. Berührung oder fast Berührung vorzukommen scheint, was aber nicht der Fall ist, weil immer das *Periosteum* (tiefes Blatt der *Dura mater*) dazwischen geschoben ist, wie ich durch vielfache Untersuchungen mich zu überzeugen Gelegenheit hatte.

Die mittlere Nebenspitze, *Processus sphenoidalis medius*, ist hohl und enthält das Ende der Furche der unteren Fläche des Felsenbeines neben dessen unterem und hinterem Rande. Sie ist meistens ($^2/_3$ d. F.) einzackig, oft ($^1/_2$ d. F.) aber durch eine bis 6 mm. tiefe und verschieden weite Ausbuchtung oder einen dreieckig selten viereckig winkligen Ausschnitt zweizackig; oder sogar ausnahmsweise ($^1/_{50}$ d. F.) durch zwei Ausbuchtungen oder Ausschnitte dreizackig. Sie vereiniget sich fast immer mit dem Körper des *Sphenoideum*, und zwar entweder unmittelbar mit dessen mittlerem Schläfenpyramidenfortsatze, *Processus petrosus medius*, oder mittelbar durch einen Nahtknochen am oberen Ende der *Sutura petro-spheno-basilaris* (*Fiss. petro-basilaris auct.*)

Die hintere Nebenspitze, *Processus sphenoidalis posterior*, (Fig. I, II, c.; III, e.) ist die mehr entwickelte Ecke, welche durch Zusammenstossen des oberen Randes der Schläfenpyramide mit dem oberen hinteren Rande des *Semisulcus petrosus inferior* entsteht. Mehr als in $^1/_2$ d. F. erscheint sie als stumpfer Vorsprung, Kamm des Endes des Randes des *Semisulcus petrosus inferior*, oder verschiedenartige Zacke; beinahe in $^1/_2$ d. F. als dreiseitig- oder vierseitig pyramidaler, vierseitig abgerundeter, spatelförmiger und bisweilen hakenförmig gekrümmter Fortsatz. Ausnahmsweise ist sie doppelt. Dieselbe überbrückt das Ende des *Semisulcus petrosus inferior* von hinten und falls sie sich über die Spitze der Schläfenpyramide erhebt, was bisweilen und bei einem Abstande von 2—3 mm. geschehen kann, auch von oben her. Sie steht dem unteren Ende des Randes der Sattellehne oder einem von derselben entgegenkommenden Vorsprunge, Fortsatze, *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior*, gegenüber, um sich mehr oder weniger und in $^1/_{50}$ d. F. bis auf $1^1/_2$—2 mm. Abstand, in $^1/_{100}$—$^1/_{160}$ d. F. aber sogar ganz und bis zur Verbindung zu nähern.

Der vordere Rand, zwischen vorderer und mittlerer Nebenspitze, ist in $^4/_5$ d. F. ausgebuchtet, in $^1/_8$ d. F. gerade, übrigens ausnahmsweise zwei Mal ausgebuchtet, oder *S* förmig, oder theils gerade, theils ausgebuchtet, oder winklig ausgeschnitten. Im Ganzen ist er weiter und seichter als der hintere, bis 9 mm. weit und bis 2 mm. tief. Er hilft das *Orificium internum canalis carot. (sens. lat.) s. foramen caroticum internum* begrenzen und zwar $^1/_{12}$ bis nahe $^1/_3$ seines Umkreises.

Der hintere Rand, zwischen mittlerer und hinterer Spitze, ist in $^2/_3$ d. F. ausgebuchtet, in $^1/_6$ d. F. winklig ausgeschnitten, in $^1/_{12}$ d. F. halbrund, sonst theilweise aus-

gebuchtet, theilweise winklig, doppelt ausgebuchtet oder gerade. Die Weite der Ausbuchtung variirt von 2—5 mm. die Tiefe von $1^1/_2$—$4^1/_2$ mm. Er begrenzt das obere Ende des *Semisulcus petrosus inferior*.

Foramen petro-sphenoideum s. spheno-petrosum osseum anomalum.

Nähern sich der *Processus petrosus anterior s. Lingula* des Keilbeinkörpers und der *Processus sphenoidalis anterior* der Schläfenpyramidenspitze bis auf eine geringe Distanz, oder lagern sie sich an einander, so wird das *Orificium internum canal. carot.* (*sens. lat.*) auch nach aussen abgeschlossen und dadurch vom *For. lac. ant. int.* geschieden. Dasselbe wird daher vorn und innen vom Seitentheile des Keilbeinkörpers, aussen von dessen *Processus petrosus anterior s. Lingula*, hinten von dessen *Processus petrosus medius*, dem *Processus sphenoidalis medius* und dem Rande, zwischen dicsem und dem *Processus sphenoidalis anterior* der Schläfenpyramidenspitze, begrenzt. Es ist in $^2/_3$ d. F. oval, in $^1/_6$ d. F. rund, und in $^1/_6$ d. F. abgerundet dreieckig, abgerundet viereckig oder birnförmig. Die Weite von vorn nach hinten beträgt 6—$9^1/_2$ mm., die von einer Seite zur andern 6—13 mm., nur in $^1/_6$ d. F. gleichen sich die Durchmesser der Weite in beiden Richtungen.

Nähern sich der *Processus petrosus posterior* des *Sphenoideum* und der *Processus sphenoidalis posterior* der Schläfenpyramidenspitze bis auf eine geringe Distanz, oder vereinigen sie sich sogar, oder legt sich letzterer bei Mangel des ersteren an die Sattellehne; so wölbt sich über das Ende des *Sulcus petrosus inferior* und namentlich auch über den *Sulcus* des Keilbeinkörpers, wodurch jener *Sulcus* mit der Hypophysengrube zusammenhängt oder zur Seitenfläche des Keilbeines sich fortsetzt, eine Knochenbrücke, wodurch, zwischen dem Keilbeinkörper und der Schläfenpyramidenspitze hinter dem *Foramen caroticum internum*, in ungewöhnlichen Fällen zur Aufnahme des *Nervus abducens* und des Ueberganges des *Sinus petrosus inferior* in den *Sinus cavernosus* ein kurzer Kanal oder ein Loch, *Foramen petro-sphenoideum anomalum*, entsteht. (Fig. I, II, d'.)

Dasselbe ist quer elliptisch, selten circulär, kehrt die eine Apertur in die mittlere Schädelgrube die andere in die hintere Schädelgrube. — Der Ausschnitt zwischen dem *Processus petrosus medius et posterior* des *Sphenoideum* (innen), der Ausschnitt zwischen dem *Processus sphenoidalis medius et posterior* der Schläfenpyramidenspitze (aussen), der *Processus petrosus medius* des Keilbeinkörpers und *Processus sphenoidalis medius* der Schläfenpyramidenspitze oder zugleich ein Nahtknochen (vorn und unten), endlich der *Processus petrosus posterior* des Keilbeinkörpers und der *Processus sphenoidalis posterior* der Schläfenpyramidenspitze (hinten und oben) begrenzen dasselbe. Der *Processus petrosus medius* des Keilbeinkörpers und der *Processus sphenoidalis medius* der Schläfenpyramidenspitze scheiden aber das *Foramen caroticum internum* vom *Foramen petro-sphenoideum*. Die Weite in querer Richtung variirt von 3—6 mm. die in der anderen aber von 3—4 mm.

Dieses meines Wissens von den Anatomen noch nicht beschriebene Loch ist aber keineswegs ein nichts sagendes *Curiosum*, sondern, in sofern es im Menschenschädel zuweilen eine Bildung repräsentirt wie sie constant bei gewissen Thieren auftritt, ein interessantes Vorkommen.

Berechtigung zur Aufstellung der neuen Processus.

Da unter 100 Schädeln der *Processus clinoideus medius* als Knötchen, Leistchen, dreieckige oder viereckige Platte und pyramidale Spitze an 19 beiderseits, an 7 rechterseits und an 6 linkerseits; als langer Fortsatz aber an 7 beiderseits an 4 rechterseits; also überhaupt an 26 beiderseits, an 11 rechterseits und 6 linkenseits, d. i. nach Seiten-Zahl an 69 vorkam; so verhielt sich sein Vorkommen zum Mangel wie 69: 131=1 : 1,89855; das Vorkommen als Fortsatz zum übrigen Vorkommen wie 18 : 51=1 : 2,833. Hält man dieses Verhältniss des Vorkommens zum Mangel dem aus Untersuchungen von 80 Schädeln gewonnenen beim *Processus clinoideus posterior inferior*, das lautet 55 : 105=1 : 1,909 und dem aus Untersuchungen von 50 Schädeln gewonnenen beim *Processus sphenoidalis posterior* der Pyramidenspitze, das heisst 55 : 45=1, 222 : 1, ferner das des Vorkommens als Fortsatz zum übrigen Vorkommen dem beim *Processus clinoideus posterior inferior*, welches lautet: 13 : 42=1 : 3,2307, und dem *Processus sphenoidalis posterior* der Pyramidenspitze, welches lautet: 25 : 30=1 : 1,1 entgegen: so leuchtet ein, dass mit demselben Rechte, mit dem man allgemein einen *Processus clinoideus medius* unterscheidet, auch ein *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior oss. sphenoidei* und ein *Processus sphenoidalis posterior* der Pyramidenspitze unterschieden werden müsse.

Freilich vereiniget sich der *Processus clinoideus medius* mit dem *anterior*, oder mit diesem und dem *posterior superior* häufiger zur Bildung des *Foramen interclinoideum anterius s. carotico-clinoideum* und *interclinoideum posterius*, als der *Processus sphenoidalis posterior* der Schläfenpyramide mit dem *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior* des Keilbeines zur Bildung des *Foramen petro-sphenoideum*. Unter jenen 11 Schädeln nemlich, an welchen bei 7 beiderseits, bei 4 rechterseits der *Processus clinoideus medius* als langer Fortsatz zugegen war, geschah jedesmal Vereinigung, sei es nun durch Verwachsung oder durch Anlagerung. An 3 war beiderseits der *Medius* mit dem *Anterior* verwachsen. An 1 war beiderseits dasselbe, aber zugleich Vereinigung durch Harmonie des *Anterior* mit dem *Posterior superior* rechts zu sehen. An 1 war beiderseits wieder dasselbe, aber zugleich Verwachsung des *Anterior* mit dem *Posterior superior* zugegen. An 3 war Verwachsung des *Medius* mit dem *Anterior* nur rechterseits vorhanden. An 1 rechterseits dasselbe, aber zugleich Vereinigung durch Harmonie des *Medius* mit dem *Posterior superior* rechts durch einen Fortsatz des ersteren. An 1 existirte beiderseits zwischen dem *Medius* und *Anterior* und zugleich beiderseits zwischen dem *Anterior* mit dem *Posterior superior* Vereinigung durch Harmonie. An 1 endlich war beiderseits der *Medius*

mit dem *Posterior superior* verwachsen; der *Anterior* jedoch mit der Brücke nur durch Harmonie vereiniget. Es war somit in $^1/_9$ d. F. nach Schädelzahl und in $^1/_{18}$—$^1/_{19}$ d. F. nach Seiten-Zahl das *Foramen interclinoideum anterius*, und zwar entweder allein (3 Mal beiderseits, 5 Mal einerseits = 11), oder zugleich mit dem *Foramen interclinoideum posterius* (2 Mal beiderseits, 3 Mal einerseits) zugegen; während das *Foramen petro-sphenoideum* erst in $^1/_{50}$—$^1/_{80}$ d. F. nach Schädel-Zahl und $^1/_{100}$—$^1/_{160}$ d. F. nach Seiten-Zahl zu vermuthen ist. Bei Mangel oder gewöhnlicher Entwickelung des *Processus clinoideus medius*, kam Vereinigung des *Anterior* mit dem *Posterior superior*, und dadurch das *Foramen interclinoideum commune*, an 3 (1 Mal beiderseits, 2 Mal linkerseits), und zwar 3 Mal links durch Anlagerung, 1 Mal rechts durch Verwachsung zu Stande.

Bedeutung des Foramen interclinoideum commune und petro-sphenoideum osseum.

Beiderlei beim Menschen nur ausnahmsweise ganz von Knochen gebildete *Foramina* sind *Analoga* der bei gewissen Thieren constant oder doch überwiegend häufig knöchern gefundenen — also Thierbildungen.

Dass das *Foramen interclinoideum commune osseum* beim Menschen eine Bildung sei, wie sie bei *Simia satyrus constant* vorkommt, beweisen nachstehende Beobachtungen: Unter 13 Schädeln mit nicht verletztem Türkensattel von diesem Thiere sah ich nemlich die Ecke zwischen dem oberen und seitlichen Rande der Sattellehne, oder den *Processus clinoideus posterior* (*superior*), mit der äusseren Wurzel des Orbitalflügels des Keilbeines an 12 beiderseits durch eine Knochenbrücke vereiniget. An 1 Schädel, von einem ganz jungen Thiere, fehlte die Brücke allerdings linkerseits, aber sie war doch rechterseits zugegen. Man kann somit annehmen, dass das Vorkommen jener Brücke beim *Orang-Utang* constant sei. Dieser constanten Knochenbrücke beim *Orang-Utang* gleicht die zuweilen vorkommende Knochenbrücke zwischen dem *Processus clinoideus anterior* und *Processus clinoideus posterior superior* beim Menschen; folglich ist diese anomale Knochenbrücke so wie das von derselben geschlossene *Foramen interclinoideum commune osseum anomalum* beim Menschen wenigstens eine *Orang-Utang*-Bildung. Ob bei diesem Thiere auch eine Knochenbrücke vorkomme, die der beim Menschen zwischen *Processus clinoideus anterior* und *medius*, oder zwischen letzterem und einer Knochenbrücke von *Processus clinoideus posterior superior* zum *anterior* vorkommendeu *analog* sei, oder nicht vorkomme; kann ich mit Bestimmtheit nicht sagen, weil ich darauf nur zwei Schädel, die eine solche nicht besassen, untersuchen konnte.

Dass das *Foramen petro-sphenoideum osseum anomalum* beim Menschen ebenfalls eine Bildung sei, wie sie bei den Affen und wohl auch noch bei anderen Thieren wenigstens als Regel vorkommt, beweisen folgende Funde:

Bei *Simia satyrus* ist das Vorkommen des knöchernen *Foramen petro-sphenoideum* die Regel, der Mangel die Ausnahme. Ich sah dasselbe nämlich unter 13 Schädeln an 12,

vermisste es aber an 1. Die obere hintere Begrenzung bildete aber nur der *Processus* von der Pyramidenspitze des *Temporale*, nicht auch der *Processus clinoideus posterior inferior* des *Sphenoideum*, den ich bei diesem Thiere überhaupt nur 2 Mal als Zacke angedeutet bemerkte. Der *Processus* stiess aber meistens an das untere Ende des Randes der Sattellehne über dem *Sulcus petrosus inferior* oder doch noch unterhalb dem *Processus clinoideus posterior*, 1 Mal nur an diesen, 1—2 Mal längs der ganzen Höhe der Sattellehne an deren Seitenrand. 2 Mal bei alten Thieren war er mit der Sattellehne verwachsen, 7 Mal mit ihr durch Harmonie vereinigt, 2 Mal stand er von dieser noch eine kleinere Strecke ab. 1 Mal bei einem ganz jungen Thiere war rechterseits das Loch vollständig, linkerseits nicht vollständig geschlossen. In diesem Falle setzte sich der das Loch schliessende *Processus* des *Temporale* der rechten Seite anomaler Weise als Knochenbrücke zwischen der Sattellehne und dem Orbitalflügel des Keilbeines fort. Die das Loch schliessende Brücke des *Temporale* hatte in diesen Fällen eine Höhe von 2—6‴(4½—13½ mm.). Das Loch sah ich aber auch bei noch anderen Affen, wie: bei *Cercocebus aethiops;* bei *Inuus sylvanus*; bei *Cynocephalus sphinx* an 4 Exemplaren, wovon in 1 dasselbe oben nicht nur von dem *Processus sphenoidalis* des *Temporale*, sondern auch von dem *Processus clinoideus posterior inferior* gebildet war; bei *Lagothrix sp.?*, wobei der *Processus clinoideus posterior inferior* als Zacke zugegen war, von dem der *Processus sphenoidalis* von *Temporale* noch etwas absteht; bei *Cebus falvellus;* bei *Cebus capucinus*, wobei die genannten zwei Fortsätze das Loch schlossen und davon der *Processus clinoideus posterior inferior* der grössere war; bei *Cebus apella* mit Anlagerung des *Processus sphenoidalis* des *Temporale* in einen Ausschnitt des Randes der Sattellehne unter dem *Processus clinoideus posterior* (*superior*); bei *Callithrix sciurea* an 2 Exemplaren; bei *Pithecia sp.?*, endlich bei *Lemur tardigradus* in einem Falle an der rechten Seite. Bei *Hylobates* ist das Vorkommen des Loches die Ausnahme, da ich unter 3 Schädeln von 3 verschiedenen Species nur in einem Falle von *H. lar* und nur rechterseits das Loch gesehen habe, welches auch oben durch den *Processus clinoideus posterior inferior* allein geschlossen wurde. — Bei *Cercopithecus nasicus*, *Cercopithecus fuliginosus; Inuus nemestrinus*, *Inuus silenus*; *Cynocephalus maimon*, *Mycetes sp.?*, *Jacchus vulgaris*, *Lemur catta* sah ich nur bald tiefere bald seichtere Ausschnitte. Von noch anderen Thieren, die zur Seite der Sattellehne ein Loch besitzen, das dieselbe Bedeutung haben mag, erwähne ich *Meles vulgaris* (in 1 Falle), *Mustela foina* und unter dem *Genus Canis* die *Sp. Canis karagan*, *lagopus*, *melanotus;* während ein solches *C. familiaris*, *C. lupus* mangelt.

B. Zur Syndesmologie.

Die starke fibröse und von der tiefen Schicht der *Dura mater* und dem *Periosteum* des *Canalis caroticus osseus* gebildete *Membran*, welche das *Foramen lacerum anterius internum* ausfüllt, den *Processus petrosus anterior ossis sphenoidei s. lingula sphenoidalis* einhüllt, oder diesen, bei seinem theilweisen oder gänzlichen Mangel, substituirt, hilft die untere Wand

der *Vagina trigemini* bilden, die obere Wand des *Canalis caroticus* (*sens. lat.*) ergänzen und die innere Oeffnung dieses Kanales, *Foramen caroticum internum*, abrunden. Ihre den Defect der oberen Wand des *Canalis caroticus osseus* brückenförmig überspringende Fasern verlaufen von der Wurzel der *Lingula* und dem angrenzenden Rande des Temporalflügels des Keilbeines in schiefer Richtung nach rück- und auswärts zum *Processus sphenoidalis anterior* der Spitze des massiven Theiles der *Pars petrosa* des *Temporale*, zum Rande zwischen diesem *Processus* und dem *Processus sphenoidalis medius*, so wie zu dem das *Foramen lacerum* hinten begrenzenden Rande. Davon ist die der *Lingula* entsprechende Portion besonders stark. Man könnte sie *Membrana obturatoria for. lac. ant. int.* oder *Ligamentum petro-sphenoideum s. spheno-petrosum anterius* nennen.

Ausser dieser von den Anatomen berücksichtigten, wenn auch nicht besonders hervorgehobenen *Membran* kommen in der mittleren Schädelgrube an und neben dem Keilbeinsattel noch zwei Paare Keilbeinsattelbänder, *Ligamenta sellae turcicae*, in der Regel vor, welche die Anatomen noch nicht beschrieben haben. Das eine dem Keilbeinsattel allein angehörige Paar nenne ich *Ligamenta interclinoidea*; das andere dem Keilbeinsattel und der Schläfenpyramide gemeinschaftlich zukommende heisse ich *Ligamenta petro-sphenoidea s. spheno-petrosa posteriora.*

Das *Ligamentum interclinoideum* (Fig. III. g.) ist ein bald ⊤ (Ταυ) förmiges, bald Γ förmiges Band, welches seitlich an dem Keilbeinsattel ausgespannt liegt, und daselbst von drei Stellen, d. i. von dem *Processus clinoideus anterior, medius* und *posterior superior* entspringt, oder an diese sich inserirt. Dasselbe besteht aus einem wagerecht liegenden Schenkel und aus einem schief aufsteigenden. Der wagerecht liegende Schenkel (α) entspringt von dem vorderen Umfange des einspitzigen oder dem vorderen Nebenfortsätzchen des zwei- bis dreispitzigen *Processus clinoideus posterior superior*, verläuft straff gespannt und etwas um seine Achse gedreht schief vor- und auswärts und inserirt sich an die Spitze, vorzüglich aber an die untere Seite des *Processus clinoideus anterior*. Derselbe stellt meistens einen länglich vierseitigen Streifen, der hinten die eine Fläche nach oben, die andere nach unten, den einen Rand nach aussen, den anderen nach innen kehrt, vorn die obere Fläche zugleich nach innen und den inneren Rand zugleich nach unten gerichtet hat; selten ein rundliches Bündel dar. Seine Länge ist = dem Abstande des *Processus clinoideus anterior* vom *posterior superior* d. i. $1^1/_2$—11 mm.; seine Breite steigt bis auf 2 mm. Der aufsteigende Schenkel (β) entspringt von dem *Processus clinoideus medius* oder von der Sattelstelle, wo dieser sonst sitzt, steigt schief nach auf-, aus- und rückwärts, aber weniger straff gespannt, zum wagerechtliegenden Schenkel, um mit dessen unterem Rande an verschiedenen Stellen der vorderen $^2/_5$ seiner Länge oder doch mit demselben an seiner Insertion zu verschmelzen, woraus im ersteren Falle die ⊤ förmige Gestalt, im letzteren die Γ förmige des *Ligamentes* resultirt. Derselbe stellt bald einen länglich vierseitigen Streifen, der gewöhnlich in der Mitte schmäler ist, als an seinen Enden, der die eine Fläche nach vorn und etwas nach innen, die andere nach hinten und etwas nach aussen,

den einen Rand nach innen, den anderen nach aussen kehrt; bald ein schmales Bälkchen dar. Derselbe ist meist 4—5 mm. lang; wie ein Faden schmal, aber auch $^1/_2$—$1^1/_3$ mm., ausnahmsweise 2 mm. breit. Jeder dieser Schenkel kann für sich allein vorkommen, und zwar in den Fällen, in welchen der andere Schenkel durch eine Knochenbrücke ersetzt ist.

Durch dieses über die Seitenöffnung des Keilbeinsattels ausgespannte *Ligamentum interclinoideum* entstehen jederseits zwei *Foramina osteo-fibrosa* d. i. das *Foramen interclinoideum anterius s. carotico-clinoideum* (Fig. III. h.) zur Aufnahme der *Arteria carotis interna*, und das *Foramen interclinoideum posterius* (Fig. III. i.) zur Aufnahme der Enden der *Hypophysis cerebri*. Man wird daher von nun an zwei Paare normaler *Foramina interclinoidea osteo-fibrosa* anzunehmen haben, die im Falle der Verknöcherung ihres häutigen Theiles d. i. des *Ligamentum interclinoideum* zu den bis jetzt bekannten *Foramina interclinoidea ossea anomala* sich entwickeln können.

Das *Ligamentum petro-sphenoideum s. spheno-petrosum posterius* (Fig. III. k.) ist ein im *Sinus cavernosus* zur Seite der Basis der Sattellehne an der Grenze zwischen der mittleren und hinteren Schädelgrube gelagertes über den *Sulcus petrosus inferior* oder über dessen Uebergang in die Hypophysengrube oder dessen Fortsetzung zur Seitenfläche des Keilbeines gespanntes, mehr oder weniger starkes fibröses Band. Dasselbe entspringt von dem *Processus sphenoidalis posterior* der Pyramidenspitze des *Temporale* allein, oder zugleich etwas von der angrenzenden hintern Fläche derselben, steigt den genannten *Sulcus* überspringend, zur Sattellehne auf- ein- und vorwärts, um sich daselbst an den *Processus clinoideus posterior inferior s. petrosus posterior* oder, bei Mangel des letzteren, an das untere Ende ihres Seitenrandes zu inseriren. Bisweilen erstreckt sich die Insertion noch über diesen *Processus* am Seitenrande der Sattellehne bis unter den *Processus clinoideus posterior superior* hinauf; oder auch noch auf die hintere Fläche der Sattellehne. Dasselbe erscheint bald in der Gestalt eines länglich vierseitigen plattrundlichen starken Stranges (meistens) oder dünnen bandartigen Streifens, bald und selten in der eines stärkeren fadenförmigen Balkens. Als Strang und Streifen ist es an den Enden häufig verbreitert. Bisweilen ist es am Insertionsende in 2—3 Bündel getheilt, wovon das eine zum *Processus clinoideus posterior inferior*, das andere zu einem überzähligen *Processus* oder einer zweiten Zacke desselben, oder darüber an den Seitenrand der Sattellehne, das dritte zur hinteren Fläche der letzteren sich begiebt. Seine Fasern liegen meistens paralell neben einander, bisweilen aber überkreuzen sie sich. Bei der Gestalt als vierseitiger Strang und Streifen zeigt es zwei Flächen und zwei Ränder. Von den Flächen sieht die vordere zugleich etwas abwärts die hintere auch etwas aufwärts; von den Rändern sieht der obere auch nach aussen und der untere auch nach innen. Frei sind seine vordere Fläche und sein oberer Rand. Meistens frei ist auch die hintere Fläche, entweder dadurch, dass der *Sinus transversus basilaris* oder ein Theil des *Sinus petrosus inferior* hinter ihr zum *Sinus cavernosus* vorbeizieht, oder dadurch, dass sie sich an die zur Sattellehne überspringende *Dura mater*, ohne damit zu verwachsen, nur anlegt. Mit netzförmig verbundenen Balken oder einer siebförmig

durchbrochenen dünnen Schicht der *Dura mater* steht der hintere Rand häufig in Verbindung. Seine Länge beträgt im *Med. 1 cent.;* seine Breite bei der Gestalt als Strang und Streifen variirt in der Mitte von $^3/_4$—3 mm., an den Enden bis 3—4 mm.; seine Dicke bei der Gestalt als Strang beträgt $^1/_2$—1 mm.

Da durch Ueberbrücken des *Sulcus petrosus inferior* durch dieses *Ligament* derselbe daselbst zu einem Loche oder kurzem Kanale geschlossen wird, so wird man ausser dem *Foramen petro-sphenoideum s. spheno-petrosum osseum anomalum* auch ein normales *osteofibrosum* (Fig. III, l.) zu unterscheiden haben, welches letztere durch Verknöcherung seines häutigen Theiles d. i. des *Ligamentum petro-sphenoideum posterius* zu ersterem gestaltet wird. Dasselbe kommt in einer ähnlichen Gestalt wie das knöcherne, aber auch als Spalte vor. Seine quere Länge variirt von 6—12 mm., ja sogar ausnahmsweise bis 18 mm., seine Weite von 1—3 mm., ist somit in ersterer Richtung grösser, in letzterer häufig kleiner als das knöcherne *Foramen*. Durch dasselbe tritt immer der *Nervus abducens*, welcher in Regel neben der Mitte nach aussen in einiger Entfernung vom äusseren Pole desselben, oder auch in der Mitte, ausnahmsweise neben der Mitte nach innen liegt, dann wohl auch immer der *Sinus petrosus inferior* entweder ganz, oder bisweilen mit einem Aste, mit oder ohne frühere Aufnahme des *Sinus transversus basilaris*.

J. Henle[6]) erwähnt «eines *Ligamentes* zwischen der Spitze der Schläfenpyramide und dem *Processus clinoideus posterior* des Wespenbeines, unter welchem der *Nervus abducens* aus der hinteren in die mittlere Schädelgrube gelangt». — Sollte Henle damit unser *Ligament* gemeint haben, dann wäre die Insertion nicht richtig angeführt worden. Bisweilen kommt über unserem *Ligamente* ein anderes aber unbeständiges isolirtes Bündel der *Dura mater* vor, welches von dem *Processus clinoideus posterior superior* zu einem Fortsatze des oberen Randes der Schläfenpyramide am inneren oder äusseren Umfange der *Impressio trigemini* überspringt und eine andere Bedeutung hat.

Da der *Nervus trochlearis* von dem hinteren Nebenfortsätzchen des *Processus clinoideus posterior superior* 5—9 mm. absteht, so kann er zu einem Ausschnitte der Sattellehne in keiner Beziehung stehen (gegen *Cruveilhier.*) Dem Ausschnitte zwischem dem oberen und hinteren Nebenfortsätzchen des *Processus clinoideus posterior superior* entsprechend, verläuft aber der *Nervus oculomotorius*.

[6]) Handb. d. Bänderlehre d. M. Braunschweig 1856 p. 55.

Erklärung der Abbildungen.

Figur I.

Vordere Wand der hinteren Schädelgrube.

1. Sattellehne.
2. 2. Schläfenbeinpyramiden.
a. a. Processus clinoidei post. sup.
b. b'. » » *post. inf.* s. *petrosi post.* (links doppelt).
c. c'. Processus *sphenoidales post. p. p. o. t.* (links doppelt).
d. *Foramen petro-sphenoideum osseum.*

Figur II.

Mittlere Schädelgrube (Ansicht von vorn).

1—d. wie Fig. I.

Figur III.

1. Keilbein.
2. 2. Schläfenbeinpyramiden.
3. Basilartheil des Hinterhauptbeines.
a. a. Processus clinoid. ant.
b. b. » » med.
c. c. » » post. sup. (dreispitzig).
d. d. » » *post. inf.*
e. e. » *sphenoid. post. p. p. o. t.*
f. f. Sulci petrosi inf.
g. *Ligamentum interclinoideum.*
α. Dessen wagerecht liegender Schenkel.
β. » schief aufsteigender Schenkel.
h. Foramen interclinoideum *osteo-fibrosum* ant.
i. » » » post.
k. *Ligamentum petro-sphenoideum post.*
l. Foramen petro-sphenoideum *osteo-fibrosum.*

Fig. I.

Fig. II.

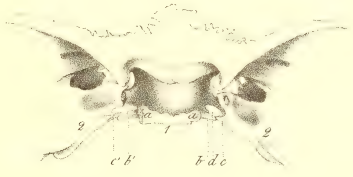
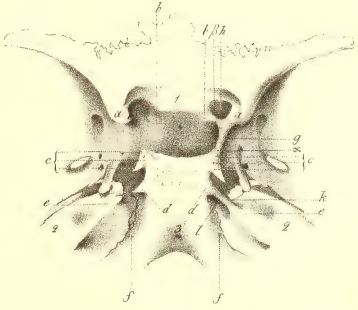


Fig. III.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 4.

MENSCHLICHES ANALOGON

DER THIERISCHEN

VAGINA NERVI TRIGEMINI OSSEA

AM FELSENBEINE.

VON

Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.**

(Mit 1 Tafel.)

Der Akademie vorgelegt am 18. März 1859.

ST. PETERSBURG, 1859.

Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:
EGGERS UND COMP. in St. Petersburg, SAMUEL SCHMIDT in Riga
und LEOPOLD VOSS in Leipzig.

Preis: 25 Kop. = 8 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

C. Vesselovsky, beständiger Secretair.

Im Mai 1859.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

MENSCHLICHES ANALOGON

DER

THIERISCHEN VAGINA NERVI TRIGEMINI OSSEA

AM FELSENBEINE.

Von

Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.**

Die bekannten Verknöcherungen der *Dura mater* im Dache der *Vagina nervi trigemini*, dann im Dache und in der hinteren Wand des *Sinus cavernosus* treten, nach meinen Beobachtungen, vom 16. Lebensjahre aufwärts meistens beiderseits in der Einzahl oder Zweizahl, selten in der Mehrzahl auf. Sie erscheinen im Dache der ersteren etwa unter 10 Fällen, in dem des letzteren unter 30 Fällen, in dem beider zugleich unter 60 Fällen 1 Mal. Die der *Vag. nerv. trig.* sah ich nur an deren Eingange, die des *Sinus cavernosus* meistens an oder vor oder unter der Grenze zwischen der oberen und hinteren Wand, d. i. in dem zum *Processus clinoideus posterior superior* hinüber gespannten Theile der *Dura mater*, wobei sie sich in das *Tentorium* bald erstreckten, bald nicht.

Sie, namentlich die der *Vagina nervi trigemini* und bei jungen Individuen, befinden sich bald zwischen zwei Blättern der *Dura mater* und sind dann meistens leicht ausschälbar; bald durchdringen sie, namentlich bei alten Leuten, die Substanz derselben. Sie erscheinen als länglich dreiseitige, länglich runde, länglich vierseitige Platten, auch hakenförmige und anders gestaltete, 5—22 mm. lange, 2—5 mm. breite Balken; oder bei alten Leuten als ganz unregelmässige, bald zusammenhängende, bald nicht zusammenhängende Concretionen. Die im Dache der *Vag. nerv. trig.* schicken von ihrem äusseren oder inneren Ende, oder von beiden zugleich bisweilen hakenförmige Fortsätze ab, welche am inneren und äusseren Pole des Einganges jener *Vagina* zum oberen Felsenbeinrande abwärts steigen, ohne sich damit zu vereinigen, und so diesen Eingang gemeinschaftlich mit dem Rande der *Impressio nervi trigemini* des Felsenbeines mit einem Knochenringe umgeben. Die im Dache des *Sinus cavernosus* stossen bald an den *Processus clinoideus po-*

*

sterior superior, bald nicht. Sie können ausnahmweise den *Sinus cavernosus* und die *Vagina nerv. trig.* zugleich überbrücken und einerseits jenen *Processus*, andererseits den Felsenbeinrand neben dem äusseren Pole der *Vagina nerv. trig.* berühren. Die Verknöcherungen in der Substanz können sich bei alten Leuten in die hintere Schädelgrube in der den *Clivus*, den *Sinus petrosus inferior*, die hintere Fläche des Felsenbeines überziehenden *Dura mater* fortsetzen, und am letzteren um den Eingang der *Vagina nerv. trig.* einen Knochenring bilden, der von dem oben genannten verschieden ist.

Mit diesen Verknöcherungen der *Dura mater* sind andere Knochenplatten unter dem Dache des *Sinus cavernosus*, die bis in das *Tentorium* sich erstrecken können, oder die unter der hinteren Wand des *Sinus cavernosus* in der hinteren Schädelgrube liegen, nicht zu verwechseln. Sie gehören der Sattellehne an und sind bald ungewöhnlich entwickelte *Processus clinoidei posteriores superiores*, bald ungewöhnlich ausgesprochene Fortsätze des *Clivus*, mögen sie nun unmittelbare Fortsetzungen derselben sein, oder als getrennte Stücke neben an liegen. Welche bedeutende Grösse ausser der vorderen auch die hintere Zacke des *Processus clinoideus posterior superior* bisweilen erreichen könne, ergibt sich leicht bei der Durchmusterung einer grösseren Schädelanzahl. Ich habe aber im Jahre 1849 bei einem 30—40 jährigen Manne auch an jeder Seite der Sattellehne ein zwischen zwei Blätter der *Dura mater* in das *Tentorium* sich erstreckendes $^1/_2{}''$ langes und 3—4‴ breites Knochenstück gesehen, das mit einer ovalen Erhöhung in einer Grube des *Processus clinoideus posterior superior* sass[1]). Ich deutete die Knochenstücke als Rudimente eines vorderen beweglichen knöchernen *Tentorium* des Menschen und erkläre sie auch jetzt noch als ungewöhnlich entwickelte hintere Zacken der *Processus clinoidei posteriores superiores*, die sich mit diesen Knöchern nicht vereiniget haben. Unter den Fällen mit Vorkommen des *Clivus* unter der Gestalt eines an einer Seite defecten Rahmens mit einem oberen queren und zwei damit rechtwinklig vereinigten seitlichen absteigenden Schenkeln, fand ich in einem Falle (Fig. II) den linken Seitenschenkel so sehr verlängert, dass er einen am Felsenbeinrande zwischen der *Incisura nerv. trig.* und dem *Processus sphenoidalis posterior p. p. o. t.* sitzenden anomalen Fortsatz (*f*) erreichte, sonach über und hinter der vom gut entwickelten *Processus clinoideus posterior inferior* entspringenden und an den wenig ausgesprochenen *Processus sphenoidalis posterior* sich inserirenden zur Bildung des *Foramen petro-sphenoideum* für den *Sinus petrosus inferior* und *Nervus abducens* bestimmten *ligamentösen* (in anderen Fällen bisweilen knöchernen) Brücke — *Ligamentum petro-sphenoideum posterius* — in einiger Entfernung davon durch eine Lücke getrennt, eine zweite Brücke bilden. Aber ich sah diesen Rahmen bei einem 19jährigen Soldaten auch vollkommen von der Sattellehne getrennt, also den *Clivus* als für sich bestehendes Knochenstück vorkommen.

Der obere Felsenbeinrand ist an seinem inneren Ende, d. i. an der Ecke, die durch sein Zusammenstossen mit der oberen hinteren Kante des *Semisulcus petrosus inferior*

[1]) W. Gruber. Abhandl. a. d. menschl. u. vergleichenden Anat. St. Petersb. 1852. 4. p. 1—4. Tab. 1. Fig. 1—3.

entsteht, häufig in den von mir beschriebenen *Processus sphenoidalis posterior* ausgezogen; an seinem hinteren Ende d. i. an der Ecke, die durch sein Zusammenstossen mit dem vorderen Rande der *Fossa sigmoidea* oder durch einen am Uebergange in die, die innere Oberfläche des Warzentheiles des Schläfenbeines in zwei Felder theilende, Kante entsteht, in $^1/_2$ d. F. mit einem nach rückwärts hervorstehenden, meistens dreiseitig pyramidalen spitzigen oder stumpfen Höckerchen versehen. Derselbe ist neben dem *Processus sphenoidalis posterior* für die Anlagerung des *Nervus trigeminus* ausgeschnitten und erst von da auswärts vom *Sulcus petrosus superior* gefurcht, falls dieser ausnahmsweise nicht an der oberen oder hinteren Fläche des Felsenbeines verlaufen sollte. Es ist unrichtig, wenn manche Anatomen denselben nach seiner ganzen Länge von jenem *Sulcus* durchfurcht sein lassen. Auch in den Fällen, in welchen der *Sinus petrosus superior* nicht in der oberen Wand der *Vagina nerv. trig.* zum *Sinus cavernosus* verläuft, zieht das Ende des *Sulcus petrosus superior* nicht durch die *Incisura nerv. trig.*, sondern unter ihr an der hinteren Felsenbeinfläche vorbei. Der nach auswärts von der *Incisura nerv. trig.* befindliche Theil ist durch eine Einsenkung oder einen Absatz an oder über dem Reste der beim *Embryo* und neugebornen Kinde unter dem oberen vorderen Bogengange befindlichen tiefen Grube häufig in zwei Portionen geschieden, wovon die vordere innere auswärts von der *Incisura nerv. trig.* über den *Porus acusticus internus* liegt, die hintere äussere vom vorderen Umfange der *Em. arcuata* bis zur *Fossa sigmoidea* der *Pars mastoidea* reicht.

Am oberen Felsenbeinrande kommen aber bei Erwachsenen auch Fortsätze oder doch Zacken, dann mehr oder weniger vorspringende, an ihren Enden abgesetzte oder nicht abgesetzte, scharfe oder stumpfe Leisten und Platten vor. Sie sind ihrem Standorte und ihrer Bedeutung nach in zwei Arten zu theilen, nämlich: 1) in die, welche an dem Theile des Randes, an welchen das *Tentorium cerebelli* seinen Ansatz hat, d. i. auswärts von der *Incisura nerv. trig.* bis zu seinem äusseren hinteren Ende sitzen und *Rudimente* des bei gewissen Thieren vorkommenden *Tentorium osseum* sind, und 2) in die, welche von jenem Theile, der vom *Tentorium cerebelli* übersprungen wird, d. i. neben der *Incisura nerv. trig.* innen und aussen sich erheben, und für *rudimentäre* und der *Vagina nerv. trig.* am Felsenbeine gewisser Thiere analoge Bildungen beim Menschen zu betrachten sind.

Die der 1sten Art kommen häufiger vor. Sie treten in Gestalt von Zacken, Leisten und Platten auf, welche von der hinteren oder unteren Kante des *Sulcus petrosus superior* sich entwickeln, oder von der hinteren Felsenbeinfläche aufsteigen, an diese Kante sich anlegen und sie mit ihrem Rande oder ihrer Fläche verbreitern. Sie dienen dem *Sinus petrosus superior* zur Unterlage. Ausnahmsweise, namentlich am äusseren Ende, kommen sie auch von der vorderen oder oberen Kante des *Sulcus*, können diesen am äusseren Ende überbrücken oder in einen Kanal verwandeln, auch zugleich über der *Fossa sigmoidea* hervorstehen. Sie kommen an beiden Portionen des gefurchten Theiles des Randes vor, setzen selten von einer Portion zur anderen brückenförmig hinüber, sind aber an der inneren

vorderen Portion häufiger, als an der anderen, dort bei jedem 3—4, hier bei jedem 6—7 Individuum zugegen. Die Leisten und Platten kommen um $^1/_8$ häufiger vor als die Zacken. Erstere haben eine verschiedene Gestalt, treten aber an der inneren Portion, über dem *Porus acusticus internus*, meistens abgesetzt und gern als länglich vierseitige, oder länglich rundliche Platten auf, die gewöhnlich mit einem schmäleren Theile aufsitzen und am inneren und äusseren Ende in eine Zacke ausgezogen sind. Sie können an der inneren Portion 4—14 mm. lang, $1^1/_2$—$3^1/_2$ mm. breit und bis 2 mm. dick werden; an der äusseren Portion, deren ganze Länge oder $^1/_3$ bis $^4/_5$ derselben einnehmen und bis 3 mm. breit werden. Eine von der vorderen oberen Kante des *Sulcus* kommende, dessen äusseres Ende und die *Fossa sigmoidea* überbrückende, an beiden Enden quer abgeschnittene, dünne Platte, war in dem einen Falle 1 cent. lang und 3—$3^1/_2$ mm. breit. Die Zacken an der inneren Portion sind öfterer nach vor- und einwärts als auswärts gerichtet und um $^2/_3$ häufiger zugegen als die der äusseren Portion, welche gewöhnlich von deren vorderem Ende ausgehen und einwärts und vorwärts sehen, seltener an anderen Stellen sitzen und dann nach rückwärts vorstehen. Das angegebene Höckerchen am äusseren hinteren Ende der unteren oder hinteren Kante des Randes ist nicht selten in eine kleine horizontale, gerade nach rückwärts vorstehende dreieckige plattenartige Zacke ausgezogen.

Die Anatomen haben dieselben wohl berücksichtigt und richtig als Rudimente des bei gewissen Thieren vorkommenden *Tentorium osseum* gedeutet. Namentlich nennt M. J. Weber[2]), die an diesem Rande als kleine Leiste manchmal befindliche Spur, *Crista tentorii. Henle*[3]) bezeichnet damit den überhängenden oberen, medianwärts seltener rückwärts in eine stumpfe oder scharfe Zacke verlängerten Rand des *Porus acusticus internus;* aber er betrachtet auch die Zacken der Spitze der Schläfenpyramide, welche die Aushöhlung zur Seite des Fusses der Sattellehne theilweise decken, als Verknöcherungen des *Tentorium cerebelli*, wofür sie, meiner Meinung nach, nicht zu nehmen sind. Die am inneren Ende des oberen Felsenbeinrandes sitzende und dem *Processus clinoideus posterior inferior* gegenüber stehende Zacke, welche ich[4]) als *Processus sphenoidalis posterior* einführte, hat mit dem *Tentorium* bestimmt nichts zu thun, ist somit keine Spur eines knöchernen *Tentorium osseum*, wohl aber, wie ich bewiesen habe, die Brücke zur unvollständigen oder vollständigen Schliessung eines besonderen, constanten, neuen Loches, *Foramen petro-sphenoideum*, am Schädelgrunde, das beim Menschen ausnahmsweise, bei gewissen Thieren häufig oder constant ganz knöchern auftritt. Aber auch noch andere, davon auswärts an der Pyramidenspitze befindliche Fortsätze stehen zum *Tentorium* wenig oder gar nicht, wohl aber zur *Vagina nerv. trig.* vorzugsweise oder ganz in Beziehung, wodurch sie die Deutung als Rudimente eines *Tentorium osseum* auch nicht zulassen,

[2]) Handb. d. Anat. d. menschl. Körpers. Bd. I. Bonn. 1839 p. 75.

[3]) Handb. d. Knochenl. d. M. Braunschweig. 1855. p. 142. 73.

[4]) W. Gruber. Beitr. z. Anat. des Keilbeines und Schläfenbeines. Mém. de l'Acad. Imp. des sc. VIIme Sér. T. I. No. 3, p. 6.

wohl aber die als solche der knöchernen *Vagina nerv. trig.* gestatten, wovon sogleich die Rede sein wird.

Die der 2ten Art, welche die Veranlassung zu vorliegender Abhandlung wurden, treten als Fortsätze auf und können innerer und äusserer Fortsatz des Ausschnittes f. d. *Nerv. trig.*, *Processus incis. trig. internus et externus*, genannt werden. Sie kommen seltener als die der 1sten Art, beide, oder auch nur einer derselben und dann häufiger der äussere vor. Dieselben sitzen am oberen Felsenbeinrande knapp neben der *Incisura nerv. trig.* als Erhebungen ihrer Ecken, der innere (Fig. I. e.; Fig. II. f.) innen zwischen ihr und dem *Processus sphenoidalis posterior* oder auf letzterem als dessen zweite Zacke, der äussere (Fig. I. f.; Fig. III. d.) aussen von ihr. Dieselben stehen entweder vertical oder zugleich etwas nach rückwärts, seltener nach vorwärts geneigt. Auch neigt sich der innere nach aus-, der äussere nach einwärts. Dieselben erscheinen als kegelförmige oder dreiseitig pyramidale Zacken, dreieckige oder viereckige Platten (Fig. I. f.) und als grosse hakenförmig gekrümmte bandartige Fortsätze (Fig. II. f.; Fig. III. d.), welche die *Incisura nerv. trig.* von aussen nach innen oder von innen nach aussen überbrücken. In wenig entwickeltem Zustande grenzen sie die *Incisura nerv. trig.* innen und aussen scharf ab und vertiefen sie; in mehr entwickeltem Zustande erheben sie sich wie Pfeiler innen und aussen vom Pole des Einganges der *Vagina nerv. trig.* bis unter das *Tentorium* und umgeben gemeinschaftlich mit dem Felsenbeine jenen Eingang mit einem knöchernen Halbringe; in sehr entwickeltem Zustande erheben sie sich nicht nur bis zum *Tentorium*, sondern krümmen sich, der innere auswärts, der äussere einwärts, wie ein Schwibbogen unter demselben über den genannten Eingang nach einwärts oder auswärts so hinüber, dass dadurch statt der *Incisura* ein nur theilweise defecter Knochenring (Fig. I. II. g.; Fig. III. b.) entsteht, ja, möglicher Weise, ein vollständiger Knochenring gebildet werden könnte.

Bis zu welchem Grade besonders entwickelte *Processus incis. nerv. trig.* zur Bildung eines knöchernen Einganges der *Vagina nerv. trig.* beitragen, werden folgende Fälle darthun:

An dem einen Schädel (Fig. I.) entspringt der *Processus sphenoidalis post. p. p. o. t.* (*d.*) gemeinschaftlich mit dem *Processus internus incis. nerv. trig.* (*e.*) Jener vereinigt sich rechts mit dem *Processus clinoideus post. inf.* (*b.*), nähert sich links diesem bis auf eine geringe Distanz, wodurch rechts ein vollständiges, links ein unvollständiges *For. petro-sphenoideum osseum* (*h.*) entsteht; dieser aber erhebt sich als eine stumpfe dreiseitig pyramidale nach auswärts gegen den *Processus externus incis. nerv. trig.* geneigte Zacke, die die tiefste Stelle der *Incisura nerv. trig.* 3—$3^1/_2$ mm. überragt. Der *Processus externus nerv. trig.* (*f.*) ist ein länglich vierseitiger Fortsatz, der vom oberen Felsenbeinrande links vertikal, rechts fast vertikal sich erhebt und über die äussere Hälfte der *Incisura nerv. trig.* nach einwärts und vorwärts, bis zu einem Abstand von 4—$4^1/_2$ mm. seiner Spitze von ersterer tiefsten Stelle, geneigt ist. Derselbe zeigt rechts zwei Flächen (äussere vordere und innere hintere) und drei

Ränder (vorderen, oberen und hinteren); links drei Flächen (äussere vordere, innere hintere und obere) und 4 Ränder (vorderen, hinteren und zwei obere). Der vordere Rand beider begrenzt den Eingang in die *Vagina nerv. trig.* Die obere Fläche des linken ist gefurcht für den *Sinus petrosus superior.* Jeder ist 7—8 mm. von vorn nach hinten lang, 5—6 mm. hoch, der rechte bis 2 mm., der linke bis $3^1/_2$ mm. breit. Beide sind am Abgange dünner und der linke auch in der Richtung vom vorderen Rande zum hinteren um die Hälfte schmäler als sein oberes Ende. Durch dieses Verhalten beider *Processus incis. nerv. trig.*, namentlich des *externus*, gemeinschaftlich mit dem oberen Felsenbeinrande an der *Incisura nerv. trig.* entsteht ein Knochenring (*g.*), der am inneren oberen $^1/_4$ defect ist und mit der dieses $^1/_4$ ersetzenden *Dura mater* eine elliptische Oeffnung, als Eingang in die *Vagina nerv. trig.*, umkreisen würde, die 8—10 mm. in der Richtung von innen nach aussen und hinten, und 4—$4^1/_2$ mm. in der von oben nach unten weit ist. Von dem *Clivus* der Sattellehne entwickelt sich jederseits ein Fortsatz (*c.*), der hinter der das *Foramen petro-sphenoideum* schliessenden Brücke hervorsteht und davon rechts 4 mm., links 2 mm. absteht.

An einem anderen Schädel (Fig. II.) von einem alten Individuum, in welchem die *Processus sphenoidales post. p. p. o. t.* und die *Processus clinoidei post. inf.* wenig entwickelt aber zugegen sind, der *Processus clinoideus post. sup. dext.* eine Knochenbrücke (*b.*) zum *Processus clinoideus ant.* sendet und der *Clivus* der Sattellehne ungewöhnlich lange Fortsätze (*e.*) aufweiset, ist linkerseits ein hakenförmiger *Processus internus incis. nerv. trig.* (*f.*) zugegen. Derselbe stellt einen an den Enden zugespitzten Halbring dar, der die Hälfte eines Ovales umkreiset und vertikal auf dem oberen Felsenbeinrande aufsitzt. Er entsteht 3 mm. auswärts vom *Processus sphenoidalis post.* von der inneren Ecke der *Incisura nerv. trig.*, umgibt einen Theil des unteren Umfanges, den inneren Pol und die innere Hälfte des oberen Umfanges des Einganges der *Vagina nerv. trig.*, und endiget in der Mitte des oberen Umfanges desselben bei einem 3—$3^1/_2$ mm. Abstand von der *Incisura nerv. trig.* Er zeigt zwei Flächen (vordere innere und äussere hintere) und zwei mit Zacken besetzte Ränder (vorderen äusseren und hinteren inneren). Das Ende des linken Fortsatzes des *Clivus* legt sich an die Mitte seines hinteren inneren Randes, wodurch hinter der das *For. petro-sphenoideum* schliessenden ligamentösen Brücke noch eine zweite durch eine knöcherne Brücke geschlossene Lücke entsteht. Derselbe ist 12—14 mm. lang, am festsitzenden Ende $1^1/_4$ mm., in der Mitte 2—$2^1/_2$ mm., am freien oberen äusseren Ende 1 mm. breit. Dadurch entsteht am Eingange der *Vagina nerv. trig.* ein Knochenring (*g.*), der an der äusseren oberen Hälfte defect ist.

An einem dritten Schädel (Fig. III.) fehlt beiderseits der *Processus internus incis. nerv. trig.*, aber beiderseits ist der *Processus externus* zugegen. Der der linken Seite ist nur eine kleine $1^1/_2$—2 mm. breite, viereckige, plattenartige Zacke; der der rechten Seite aber ein von vorn nach hinten comprimirter, plattenartiger, zweischenkliger, nach hinten geneigter, die *Incisura nerv. trig.* überbrückender, grosser Haken (*d.*) Derselbe erhebt sich vom Felsenbeinrande mit dem unteren aufsteigenden 4 mm. langen und 2—$2^1/_2$ mm. brei-

ten, etwas S förmig gekrümmten Schenkel nach auf-, rück- und einwärts am äusseren Pole des Einganges der *Vagina nerv. trig.*, beugt sich dann unter einem fast rechten Winkel um und setzt sich über der *Incisura nerv. trig.* in den 8 mm. langen, zuerst 2 mm., dann 1 mm. breiten, oberen queren Schenkel nach ein- und vorwärts fort. Dieser steht mit seiner Spitze dem inneren Ende der *Incisura* gegenüber, dem er sich durch Senken bis auf $2^1/_2$—3 mm. Abstand nähert, während er ausen 4 mm. von der *Incisura nerv. trig.* sich entfernt. Dadurch wird um den Eingang der *Vagina nerv. trig.* ein Knochenring (*e.*) gebildet, der nur am inneren Pole desselben defect ist.

An einem vierten Schädel von einem 50jährigen Manne ist der *Processus externus* der rechten Seite ein schmaler, aber langer bandartiger Knochenstreif, der die *Incisura nerv. trig.* aussen und oben völlig überbrückt und dem *Processus sphenoidalis post. sup.* bis auf 1 cent. Abstand sich nähert. Derselbe zeigt zwei Flächen (obere vordere und untere hintere) und zwei Ränder (oberen hinteren und unteren vorderen); und ist 16 mm. lang und 2 mm. breit. Dadurch entsteht um den Eingang der *Vagina nerv. trig.* wieder ein Knochenring, der nur am inneren Pole desselben defect ist.

Aus diesen vier Fällen ist ersichtlich, dass die Fortsätze der *Incisura nerv. trig.*, namentlich der äussere, zur Bildung eines Knochenringes um den Eingang der *Vagina nerv. trig.* wenigstens bis auf eine kurze, innen, oben oder aussen liegende Strecke Defectes beizutragen vermögen; dass die Möglichkeit des Vorkommens eines vollständigen Knochenringes bei Auftreten und Betheiligung beider derartig entwickelter Fortsätze an einer und derselben Seite eines Schädels vermuthet werden darf, da schon ein Fortsatz allein einen grösstentheils vollständigen Knochenring bilden kann; und dass der Eingang der *Vagina nerv. trig.* nicht nur durch Verknöcherungen der *Dura mater*, sondern auch durch wirkliche Felsenbeinfortsätze knöchern werden könne.

Die Anatomen haben unter den Zacken und Fortsätzen am oberen Felsenbeinrande besondere Fortsätze der *Incisura nerv. trig.* nicht hervorgehoben, um so weniger denselben eine besondere Bedeutung zugeschrieben. Nur A. Portal[5]) erwähnt einer knöchernen Brücke über genannter *Incisura*, wie aus folgender Stelle hervorgeht: «Le supérieur (bord) est creusé dans la longueur pour reçevoir le sinus pierreux supérieur; en avant, ce bord présente une légère échancrure, quelquefois recouverte par un prolongement osseux en forme de pont, sous lequel est le tronc des nerfs trijumeaux, etc.»; allein irgend eine Deutung hat er nicht aufgestellt.

Mit dem inneren Fortsatze der *Incisura nerv. trig.* darf aber ein anderer bisweilen die *Impressio nerv. trig.* von innen her überbrückender Fortsatz, dessen auch Henle[6]) gedenkt, nicht verwechselt werden. Dieser hat eine von ersterem verschiedene Lage,

[5]) Cours d'anat. méd. Tom. 1. Paris. 1804, p. 142. | [6]) A. a. O. p. 140.

auch, wie ich in meiner Abhandlung «die *Foramina lacera* und die *Ossicula supernumeraria* des Schädelgrundes» beweisen werde, eine ganz andere Bedeutung.

Die beschriebenen anomalen neuen Fortsätze an der *Incis. nerv. trig.* des oberen Felsenbeinrandes beim Menschen, welche bald nur zur Seite der letzteren sitzen, bald sie theilweise oder ganz überbrücken, halte ich für Analoga jener Fortsätze des Felsenbeines gewisser Säugethiere, welche constant oder doch häufig bald die *Incisura nerv. trig.* des oberen Felsenbeinrandes allein, bald die ganze *Impressio nerv. trig.* der vorderen oberen Felsenbeinfläche schwibbogenartig und meistens vollständig überwölben. Den durch die Fortsätze gemeinschaftlich mit dem oberen Felsenbeinrande gebildeten, nicht ganz vollständigen Knochenring am Eingange in die *Vagina nerv. trig.* beim Menschen sehe ich desshalb als *Rudiment* der knöchernen *Vagina nerv. trig.* der Säugethiere an, die sich bald nur auf den oberen Felsenbeinrand d. i. auf ihren Eingang beschränkt, bald aber auch auf die ganze vordere obere Felsenbeinfläche sich ausdehnt, d. i. so lang und weit ist, als die *Impressio nerv. trig.* gewöhnlicher Fälle lang und breit gefunden wird.

Für die Richtigkeit dieser meiner Deutung sprechen nachstehende Beobachtungen:

Die *Impressio nerv. trig.* bei den Säugethieren wird verschieden seicht und tief, selbst halbkanalförmig; der obere hintere Felsenbeinrand an ihrem hinteren oberen Ende — *Incisura nerv. trig.* — schwach ausgebuchtet, aber auch halbmondförmig, halbkreisförmig, einfach oder doppelt winklig ausgeschnitten angetroffen.

An der inneren und äusseren Ecke der *Incisura nerv. trig.* können sich über sie geneigte Fortsätze erheben. Der *Orang-Utang* zeigte solche Fortsätze unter 14 Schädeln an 2, d. i. in $^1/_7$ der Fälle. In dem einen Falle war nur der äussere Fortsatz, in dem anderen waren beide Fortsätze zugegen. *Cynocephalus* wies unter 5 Schädeln an 3, d. i. in $^3/_5$ d. F. den äussern Fortsatz auf. Dieser kam auch an einem Schädel von *Lagothrix sp.?* und *Pithecia sp.?* vor.

Der äussere Fortsatz der *Incisura nerv. trig.* kann aber so lang werden, dass er diese ganz, ja auch zugleich die Aushöhlung zur Seite der Sattellehne überbrückt, ohne aber das Felsenbein einwärts von der *Incisura* zu erreichen, ohne also den Knochenring am Eingange der *Vagina nerv. trig.* völlig zu schliessen. Ersteres kam bei *Ateles hypoxanthus* und *Viverra nasua* vor. Bei *Ateles hypoxanthus* stiess das Ende des Fortsatzes an den *Processus clinoideus posterior inferior.* Der innere Fortsatz der *Incisura nerv. trig.* war auch zugegen, allein er erreichte ersteren nicht, um den Knochenring ganz vollständig zu machen. Bei *Viverra nasua* ging an einem Schädel von dem äusseren Fortsatze, nachdem dieser die *Incisura* überbrückt hatte, ein gegen die Felsenbeinspitze gerichtetes Fortsätzchen ab, ohne dieselbe zu erreichen. Letzteres war bei *Lemur rufiventris* der Fall. Das Ende des Fortsatzes deckte die Aushöhlung zur Seite der Sattellehne, erreichte diese jedoch nicht. Auch der äussere Fortsatz,

der bei manchen Thieren nicht nur von der *Incisura*, sondern von dieser und dem ganzen lateralen Rande der *Impressio nerv. trig.* abgeht, kann letztere nur überbrücken, ohne mit deren medialem Rande sich zu vereinigen. Diess kommt ausnahmsweise bei *Canis* vor.

Endlich können beide Fortsätze oder nur der äussere allein, mögen sie nun der *Incisura nerv. trig.* allein, oder dieser und der *Impressio nerv. trig.* zugleich angehören, gemeinschaftlich mit der *Incisura nerv. trig.* am oberen Felsenbeinrande oder mit der *Impressio nerv. trig.* an der vordereren oberen Felsenbeinfläche, im ersteren Falle am Eingange in die *Vagina nerv. trig.* einen vollständigen Knochenring, im letzteren Falle eine knöcherne *Vagina nerv. trig.* bilden, so weit diese am Felsenbeine liegt. Einen vollständigen Knochenring um den Eingang in die *Vagina nerv. trig.* fand ich: bei *Orang-Utang*, *Mycetes guaviba*, *Cebus apella* u. *fatuellus*, und *Lemur catta;* eine knöcherne *Vagina nerv. trig.:* bei mehreren aus den *Carnivora*, und zwar aus den *Ursina* bei *Procyon lotor;* aus den *Gracilia* bei *Meles vulgaris*, *Gulo melivorus* und *Mustela foina* und bei der Familie der *Canina*, wie *C. familiaris*, *lupus*, *aureus*, *karagan*, *lagopus*, *melanotus*.

Unter 14 Schädeln vom *Orang-Utang* sehe ich nämlich die *Incisura nerv. trig.* am oberen Fenbeinrande ähnlich der des Menschen seicht, bei 8 mehr oder weniger tief halbkreisförmig, bei 1 durch eine über sie quer hinüber gelegte Knochenbrücke jederseits in ein ovales Loch verwandelt, das in der Richtung von innen nach aussen 7—8 mm. in der anderen von vorn nach hinten $3^1/_2$—4 mm. weit ist. Die Schädel mit seichter *Incisura* gehören meistens jungen Thieren, einer einem Weibchen; die mit tiefer, meistens älteren an. Bei dem Schädel von einem alten Thiere, mit einem Loche statt der *Incisura*, ist die *Impressio nerv. trig.* ein 15 mm. langer Halbkanal, welcher vom vorderen (unteren) Felsenbeinrande, allmählig tiefer wird. Die die *Incisura* zu einem Loche schliessende Knochenbrücke ist ein äusserer Fortsatz der ersteren. Derselbe entsteht jederseits vom oberen hinteren Ende des lateralen Randes der *Impressio nerv. trig.* oder von der lateralen Ecke der *Incisura nerv. trig.*, springt über diese quer nach ein- und vorwärts hinüber, um sich mit der vorderen Fläche des ungemein entwickelten und das *Foramen petro-sphenoideum* schliessenden *Processus sphenoidalis posterior p. p. o. t.*, so wie mit einer von diesem abgehenden nach aussen über die *Incisura* gekrümmten und entgegenkommenden Zacke (innerem Fortsatze der *Incisura*) rechts durch Harmonie zu vereinigen, links zu verwachsen. Der Fortsatz ist ein von oben und vorn und unten und hinten comprimirter, etwas um seine Achse gedrehter Stachel, der die vordere Fläche zur mittleren Schädelgrube, die hintere Fläche zur *Impressio nerv. trig.*, den einen Rand nach auf- und rückwärts, den anderen nach ab- und vorwärts kehrt, allmählig an Breite abnimmt, und einwärts zugespitzt endiget. Derselbe ist 11 mm. lang, wovon 7 mm. über der *Incisura nerv. trig.* liegen, 4 mm. zur Anlagerung an den *Processus sphenoidalis posterior* dienen; beiderseits am Ursprunge von der lateralen Ecke der *Incisura nerv. trig.* 4 mm. breit, am inneren Pole des Loches rechts 2 mm., links $1^1/_3$ mm. breit und $1^1/_2$ mm. dick. Der *Orang-*

Utang hat somit ausnahmsweise ($^1/_{11}$ d. F.) statt der *Incisura nerv. trig.* ein Loch, d. i. einen vollständigen Knochenring um den Eingang in die *Vagina nerv. trig.*

Unter 3 Schädeln von *Mycetes*, bei einem von *M. guaviba*, ist die *Incisura nerv. trig.* durch den äusseren Fortsatz derselben, der sie überbrückt und innen von derselben mit dem oberen Felsenbeinrande sich nahtförmig vereiniget, in ein knöchernes Loch, am Eingange in die *Vagina nerv. trig.*, verwandelt.

Bei *Cebus apella* und *fatuellus* scheint das statt der *Incisura nerv. trig.* auftretende Loch constant vorzukommen.

Das Loch bei *Lemur catta* verhielt sich in einem Falle so, wie das bei anderen oben angeführten Affen[7]).

Bei *Canis* schickt die die obere und vordere Fläche des Felsenbeines deckende Knochenmasse zwei breite dicke Knochenplatten ab. Die eine davon geht von deren vorderem (unteren äusseren) Rande aus, bildet das Dach der Paukenhöhle und legt sich an den Temporalflügel des Keilbeines und an die Schuppe des Schläfenbeines, *Processus tympanicus s. Tegmentum tympani;* die andere ist das einwärts von der Vertiefung der hinteren Felsenbeinfläche für das *Cerebellum* und den *Porus acusticus internus* von der massiven Felsenbeinspitze gleichsam abgelöste und die *Impressio nerv. trig.* überbrückende innere Drittel oder zwei innere Fünftel derselben selbst, *Processus s. Tegmentum vaginae nerv. trig.* Der *Processus s. Tegmentum vagin. nerv. trig.* besteht wieder aus zwei fast rechtwinklig miteinander vereinigten Schenkeln, einem vorderen oberen, ein- und vorwärts absteigenden und einem hinteren unteren, nach rückwärts vorstehenden. Der vordere Schenkel ist eine breite, dicke, dreiseitig pyramidale, von vorn und oben nach hinten und unten comprimirte, von oben und hinten nach unten und vorn zugeschärfte, nach ein-, ab- und vorwärts gegen die Sattellehne zugespitze, die *Impressio nerv. trig.* von vorn und oben her überbrückende Platte, die, wenn sie mit ihrer Spitze die Sattellehne erreicht, auch die Aushöhlung zur Seite der Sattellehne zu einem *Foramen petro-sphenoideum osseum* schliesst. Der hintere Schenkel ist bald eine von oben, hinten und innen nach unten, vorn und aussen comprimirte, dünne, vierseitige Platte, bald ein dreiseitig prismatischer Balken, die zwischen den genannten vordern Schenkel und die Felsenbeinspitze eingeschoben sind und dadurch die innere knöcherne Wand der *Vagina nerv. trig.* bilden. Derselbe geht von der hinteren Fläche des vorderen Schenkels nahe seiner Spitze und nachdem dieser die *Impressio nerv. trig.* übersprungen hat, fast rechtwinklig ab, verläuft entweder gestreckt oder bogenförmig nach auswärts gekrümmt nach rückwärts und endiget, namentlich nach auswärts und dann nach abwärts, verbreitert und quer abgestutzt. Dieses Ende ist eine dreieckig abgerundete oder ovale Fläche, welche eine ähnlich gestaltete, an der Felsenbeinspitze neben der *Impressio nerv. trig.* und theilweise in dieser selbst be-

[7]) Auch *Cuvier* — Leç. d'anat. comp. 2. edit. Tom. II. Paris 1837 p. 289—290, erwähnt bei den *Maki* eines vertikalen, an seiner Basis von einem Loche durchbohrten Fortsatzes an der Felsenbeinkante, bei den *Lori* daselbst eines an seiner Basis von einem Loche durchbohrten Höckers.

findliche rauhe Grube sich anlagert, ohne damit zu verwachsen. Ich habe letzteren Schenkel unter vielen Schädeln nur in ein Paar Fällen nicht vorgefunden. Durch diese Anordnung wird die *Vagina nerv. trig.* ein Knochenkanal, dessen äussere, vordere und innere Wand das *Tegmentum impress. nerv. trig.*, die hintere untere Wand die *Impressio nerv. trig.* der Felsenbeinspitze bildet, der an seiner inneren Wand kürzer als an der äusseren, von vorn und oben nach hinten und unten comprimirt, im Durchschnitte oval, in querer Richtung noch einmal so weit ist als in der anderen, und in schiefer Richtung von aussen, hinten und oben nach innen vorn und unten verläuft. Die knöcherne *Vagina nerv. trig.* bei *Canis* ist als constant vorkommend anzunehmen, da ich sie unter einer grossen Reihe Schädeln verschiedener Species vollständig, nur ausnahmsweise ihr *Tegmentum* mit ihrem medialen Rande nicht vereiniget angetroffen hatte.

Bei *Procyon lotor* kömmt eine knöcherne *Vagina nerv. trig.* vor, welche der bei *Canis* ähnlich ist.

Bei *Meles vulgaris* entsteht das *Tegmentum impress. nerv. trig.* von der die vordere obere Felsenbeinfläche bildenden Platte auf eine ähnliche Weise, wie das bei *Canis*. Dasselbe ist jedoch vierseitig, theilweise durchbrochen, nach der *Diagonale* wie geknickt. Es überbrückt nicht nur die *Impressio nerv. trig.*, sondern auch die Aushöhlung zur Seite der Sattellehne. Die Sattellehne erreicht es mit der hinteren Zacke seines Endes und verwandelt dadurch die genannte Aushöhlung in das *Foramen petro-sphenoideum*. Von seinem hinteren Rande, nicht von seiner unteren Fläche, geht einwärts von der *Impressio nerv. trig.* ein hakenförmig gekrümmtes, bandartiges Fortsätzchen ab, das mit der Felsenbeinspitze verschmilzt und die *Vagina nerv. trig.* einwärts abschliesst. So verhielt es sich wenigstens in dem einen Falle, während in einem anderen eine knöcherne *Vagina nerv. trig.* fehlte.

Bei *Gulo mellivorus* und *Mustela foina* konnte die knöcherne *Vagina nerv. trig.* nicht genau untersucht werden, weil es nicht gestattet war das Schädeldach zu entfernen. Das *Tegmentum impress. nerv. trig.* schien dem bei *Canis* zu gleichen, sein abwärts und rückwärts steigender Schenkel war aber mit der Felsenbeinspitze bereits verwachsen.

An einem Schädel von *Cebus apella* schickt der obere Felsenbeinrand der rechten Seite, auswärts vom Knochenringe um den Eingang in die *Vagina nerv. trig.*, eine grosse dreieckige Platte nach rück- und aufwärts zur Ueberdachung der hinteren Schädelgrube. Bei *Lemur rufiventris* geht gemeinschaftlich mit dem äusseren Fortsatze der *Incisura nerv. trig.* ein langer vierseitiger, quer abgestutzter, nach rück-, auf- und auswärts über die hintere Schädelgrube vorstehender Fortsatz von dem oberen Felsenbeinrande ab. Jene Platte und dieser Fortsatz sind starke Spuren eines dem Felsenbeinrande angehörigen *Tentorium osseum*, wie sie nur selten bei den Affen, nach Josephi und Meckel aber beim *Coaita* sehr entwickelt vorkommen; allein sie stehen zur *Impressio nerv. trig.* in keiner Beziehung. Das *Tentorium osseum* bei *Canis* besteht aus drei Theilen, wovon der mittlere von der Schuppe des Hinterhauptbeines, die beiden seitlichen von den Seitenwandbeinen herkommen. Letztere erreichen die Schläfenbeine nicht. Der auswärts

von der knöchernen *Vagina nerv. trig.* befindliche scharfe und sehr vorspringende Theil des oberen Felsenbeinrandes, welcher die Vertiefung der hinteren Felsenbeinfläche für das *Cerebellum* überbrückt, kann wohl nicht als Spur eines dritten und vom Felsenbeine kommenden Theiles des *Tentorium osseum* angesehen werden. Wäre es aber auch der Fall, so würde dennoch weder diese Spur, noch das *Tentorium osseum* überhaupt, mit der knöchernen *Vagina nerv. trig.* etwas zu schaffen haben. Bei *Meles vulgaris* besteht das *Tentorium osseum* aus ähnlichen drei Theilen, wie bei *Canis*, nur mit dem Unterschiede, dass die seitlichen Theile in der That die Bases der Felsenbeine bedecken. Wie weit die Seitenwandbeinportionen darüber hin nach vor- und abwärts verlaufen, konnte ich nicht ausmitteln, da in dem vor mir liegenden Schädel bereits Verwachsung ihrer Enden eingetreten war. Einwärts sind sie dennoch von der Platte, welche die übrigen inneren und vorderen $^2/_3$ des Felsenbeines deckt und das *Tegmentum impress. nerv. trig.* abschickt, bestimmt durch eine Naht an beiden Seiten geschieden. Der auswärts von der *Vagina nerv. trig.* befindliche Theil des oberen Felsenbeinrandes springt als eine sehr breite und dünne Platte, die sich wirklich mit dem übrigen *Tentorium osseum* nahtförmig vereiniget, hervor. Diese mag als Felsentheil des *Tentorium osseum* betrachtet werden. Auch bei diesem Thiere ist das *Tegmentum impress. nerv. trig.* kein Theil des *Tentorium osseum.* Dasselbe ist wohl auch bei *Gulo mellivorus* und *Mustela foina* der Fall, da wahrscheinlich das *Tentorium osseum* sich ähnlich verhält, wie das bei *Meles.* Bei Thieren wird somit durch Fortsätze des Felsenbeines, die von seiner vorderen oberen Fläche kommen und nicht über das Felsenbein nach rückwärts hinaus d. i. nicht über die hintere Schädelgrube sich erstrecken, oder durch den vorderen inneren Theil, der diese Fläche deckenden Platte selbst die *Incisura nerv. trig.* in einen Knochenring und die *Impressio nerv. trig.* in einen Knochenkanal verwandelt, nicht durch das *Tentorium osseum.* Kommt nämlich letzteres in seltenen Fällen als starke Spur vom Felsenbeine (entweder von diesem allein oder zugleich auch von anderen Knochen); so ist es eine Verlängerung des Theiles des oberen Felsenbeinrandes oder der die vordere obere Felsenbeinfläche deckenden Platte, der auswärts von der *Incisura* und *Impressio nerv. trig.* liegt, oder doch nur ein Ast des äusseren Fortsatzes der *Impressio nerv. trig.* (*Lemur rufiventris*). Gehört es aber anderen Knochen an, so erreicht es bald das Felsenbein, bald nicht. Im ersteren Falle kann die vom Seitenwandbeine kommende Portion das Felsenbein in einem bald grösseren, bald kleineren Umfange decken, zum Temporalflügel des Keilbeines und der Schuppe des Schläfenbeines etc. überspringen und damit sich vereinigen. Allein dieses Bedecken geht auswärts von der *Impressio nerv. trig.* vor sich, und selbst bei Thieren mit einem derartig entwickelten *Tentorium osseum* (*Ursus, Hyaena, Felis*) vermag dieses mit seinem Rande nur etwas den äusseren Umfang der *Impressio nerv. trig.* zu überdachen.

Wenn nun bei den Thieren nur die Fortsätze und Platten des Felsenbeines, welche von demselben auswärts von der *Impressio nerv. trig.* ausgehen und die hintere Schädelgrube überdachen, als *Tentoria ossea* oder doch Spuren derselben zu nehmen

sind; so können auch beim Menschen nur die Zacken, Fortsätze, Leisten und Platten, welche vom angegebenen Felsenbeinrande auswärts von der *Incisura nerv. trig.* entstehen, dem *Sinus petrosus superior* zur Unterlage dienen und die hintere Schädelgrube etwas überbrücken, als Spuren eines *Tentorium osseum* gedeutet werden. Wenn ferner die Fortsätze der *Incisura* und *Impressio nerv. trig.* bei den Thieren dadurch, dass sie durch Ueberdachen derselben, erstere in einen Knochenring, letztere in einen Knochenkanal zur Aufnahme des *Nervus trigeminus* verwandeln können, als zur Bildung einer knöchernen *Vagina nerv. trig.*, nicht zu der eines *Tentorium osseum*, bestimmt sich erweisen; so werden auch die Fortsätze der *Incisura nerv. trig.* beim Menschen, weil sie wenigstens letztere auf ähnliche Weise durch Ueberbrücken in einen, wenn auch unvollständigen Knochenring um den Eingang in die *Vagina nerv. trig.* umgestalten können, als zur *Vagina nerv. trig.*, nicht zum *Tentorium*, in Beziehung stehende Bildungen, als Analoga der Fortsätze der *Incisura nerv. trig.* und als *Rudimente* der als wirkliches *Tegmen*der *Impressio nerv. trig.* auftretenden Fortsätze der Thiere erklärt werden müssen. Der von den Fortsätzen der *Incisura nerv. trig.* gemeinschaftlich mit dem oberen Felsenbeinrande um den Eingang in die *Vagina nerv. trig.* gebildete Knochenring beim Menschen wird somit als rudimentäre *Vagina nerv. trig. ossea* zu deuten sein, die bei manchen Thieren (*Ateles hypoxanthus*, *Lemur rufiventris*, *Viverra nasua*), wie beim Menschen, auf einen nicht ganz vollständigen Ring am Eingange in die *Vagina nerv. trig.* sich reducirt, bei anderen (*Orang-Utang*, *Mycetes guaviba*, *Cebus apella* und *fatuellus*, *Lemur catta*) zu einem vollständigen Ring daselbst sich entwickelt, bei einem (*Meles vulgaris*) schon über die ganze Breite des Felsenbeines, aber bei einer auf einen Rand reducirten inneren Wand, sich ausdehnt, und endlich bei mehreren (*Procyon lotor*, *Gulo mellivorus*, *Mustela foina*, besonders *Canis*) ganz vollkommen und eben so lang sich vorfindet als das Felsenbein im Bereiche der *Impressio nerv. trig.* breit ist.

Erklärung der Abbildungen.

Figur I.

1. Sattellehne.
2. Basilartheil etc. des Hinterhauptbeines.
3. 3. Schläfenbeine.
a. a. Processus clinoidei post. sup.
b. b. » » post. inf.
c. c. » laterales des Clivus der Sattellehne.
d. d. » sphenoidales post. der Felsenbeine.
e. » internus incisurae nerv. trig. des linken Felsenbeines (rechts angedeutet).
f. f. » externi incis. nerv. trig. der Felsenbeine.
g. g. Knochenringe a. d. oberen Felsenbeinrändern statt der Incis. nerv. trig. (oben und innen defect).
h. h. Foramina petro-sphenoidea (links oben defect).

Figur II.

1. 2. 3. a. wie Fig. I.
b Vordere verlängerte Zacke des Processus clinoideus post. sup. zum ant.
c. c. Processus laterales des Clivus der Sattellehne.
d. d. » sphenoidales post. der Felsenbeine.
e. Lücke zur Seite der Sattellehne, im frischen Zustande durch das Lig. petro-sphenoideum post. in zwei getheilt, wovon die eine das For. petro-sphenoideum osteo-fibrosum.
f. Processus internus incis. nerv. trig. des linken Felsenbeines.
g. Knochenring am linken oberen Felsenbeinrande statt der Incis. nerv. trig. (aussen und oben defect).

Figur III.

1. 2. 3. a. wie Fig. I.
b. Processus clinoideus post. inf. (angedeutet).
c. » sphenoidalis post. des Felsenbeines.
d. » externus incis. nerv. trig. des Felsenbeines.
e. Knochenring am oberen Felsenbeinrande statt der Incisura nerv. trig. (innen defect).

Fig. I.

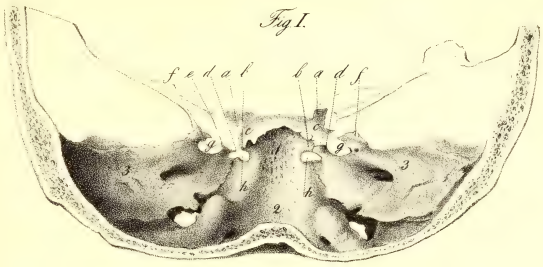


Fig. II.

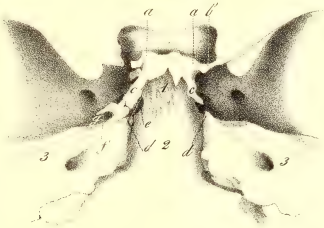


Fig. III.

Kosinski, Heppner et Lösch ad nat. del. J. A. Satory Lith.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 5.

SUR L'INTERPOLATION

DANS LE CAS

D'UN GRAND NOMBRE DE DONNÉES

FOURNIES PAR LES OBSERVATIONS.

PAR

P. Tchébychef,
Membre de l'Académie.

Lu le 29 octobre 1858.

ST.-PÉTERSBOURG, 1859.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
MM. EGGERS et COMP. à St.-Pétersbourg, M. SAMUEL SCHMIDT à Riga
et M. LÉOPOLD VOSS à Leipzig.

Prix: 65 Kop. = 22 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Mai 1859.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

SUR L'INTERPOLATION

DANS LE CAS

D'UN GRAND NOMBRE DE DONNÉES

FOURNIES PAR LES OBSERVATIONS.

Par **P. Tchébychef.**

Quand le nombre des valeurs données surpasse celui des termes que l'on conserve dans leur expression, l'interpolation peut être executée par diverses méthodes. Mais ces méthodes, dans chaque cas particulier, sont loin d'être également avantageuses; elles diffèrent entre elles, soit par la prolixité plus ou moins grande des calculs, soit par la grandeur de l'erreur moyenne à craindre, tant qu'il s'agit d'interpolation de valeurs fournies par les observations, et conséquemment affectées d'erreurs. Comme on ne peut gagner au delà d'une certaine limite, sous un de ces rapports, sans perdre sous l'autre, il est impossible de donner une méthode d'interpolation qui soit en général préférable à toutes les autres; car, suivant les cas, on tient plus ou à la simplification des calculs, ou à la précision des résultats. Si l'on ne connait qu'un petit nombre de valeurs d'une fonction interpolée, il se présente peu de ressources pour atténuer l'influence de leurs erreurs sur le résultat cherché, et alors il est important de tirer des données d'interpolation tout le parti possible pour diminuer l'erreur moyenne à craindre, ce qu'on ne peut faire qu'à l'aide de *la méthode des moindres carrés*. Dans le cas contraire, le nombre considérable des données qu'on a à sa disposition, nous dispense de recourir à *la méthode des moindres carrés* qui exige des calculs trop longs. Alors, pour la simplification des opérations numériques, on peut bien sacrifier une partie plus ou moins considérable de ce que les valeurs données offrent pour apprécier le résultat cherché. Dans le Mémoire *Sur les fractions continues*, présenté à l'Académie en 1855, nous avons traité de l'interpolation parabolique d'après *la méthode des moindres carrés*,*) et nous sommes parvenu à une série qui fournit directement les résultats d'une telle interpolation, indispensable, comme nous venons de le voir, si le nombre des valeurs connues de la fonction interpolée est assez petit. Dans le présent Mémoire nous

*) La traduction française de ce Mémoire, dont je suis redevable à l'obligeance eclairée de M. Bienaymé, vient de paraitre dans le Journal de M. Liouville, T. III, 2me Série.

montrerons comment, d'après nos méthodes, on parvient à d'autres formules d'interpolation qui peuvent remplacer avec avantage celle dont nous venons de parler, en tant que son application, vu le grand nombre des valeurs données, cesse, d'une part, d'être importante, et de l'autre, devient peu praticable.

Des divers cas particuliers que peut présenter l'interpolation suivant le nombre plus ou moins grand des valeurs données, nous nous bornerons à considérer celui qui est la limite de tous les autres où le nombre des valeurs données est infini. Quoique, en réalité, ce nombre ne soit jamais infini, les formules qu'on trouve dans cette supposition peuvent être cependant d'une application utile; car elles présentent la limite vers laquelle convergent très rapidement les résultats d'interpolation, à mesure que ce nombre augmente, et il ne sera pas difficile de voir, dans chaque cas particulier, de quel degré d'approximation ces formules sont susceptibles d'après les valeurs données.

I.

§ 1. Nous commencerons par exposer la solution du problème qui servira de base à nos recherches.

Problème.

Etant donnée une suite de valeurs de $F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ *qui correspondent à des valeurs de* x *équidistantes et très rapprochées entr'elles, combiner les valeurs de* $F(x)$, *par la seule voie d'addition et de soustraction, de manière à ce que le résultat final ne contienne que le terme affecté du coefficient* A_1, *et que ce terme soit le plus grand possible.*

Solution.

Soient

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ldots\ldots F(x_t)$$

les valeurs données de

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n.$$

En supposant que

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F(x_\sigma),$$
$$F(x_{\sigma+\sigma'+1}),\ F(x_{\sigma+\sigma'+2}),\ \ldots F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

soient les valeurs de $F(x)$ prises avec le signe $+$, et

$$F(x_{\sigma+1}),\ F(x_{\sigma+2}),\ \ldots\ldots\ldots\ldots F(x_{\sigma+\sigma'}),$$
$$F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+1}),\ F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+2}),\ \ldots F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

celles qui auront le signe —, on trouve que la combinaison cherchée des valeurs

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ldots F(x_i)$$

s'exprime par la formule

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} F(x_\mu) - \sum_{\mu=\sigma+1}^{\mu=\sigma+\sigma'} F(x_\mu) + \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+1}^{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''} F(x_\mu) - \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''+1}^{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''} F(x_\mu) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les valeurs

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_i$$

étant, par hypothèse, équidistantes, cette expression, à un facteur constant près et qui ne change en rien la solution cherchée, est égale à

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\sigma} F(x_\mu)(x_{\mu+1}-x_\mu) - \sum_{\mu=\sigma+1}^{\mu=\sigma+\sigma'} F(x_\mu)(x_{\mu+1}-x_\mu) + \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+1}^{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''} F(x_\mu)(x_{\mu+1}-x_\mu) - \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''+1}^{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''} F(x_\mu)(x_{\mu+1}-x_\mu) + \ldots,$$

ce qui se réduit à

$$\int_{x_1}^{x_\sigma} F(x)dx - \int_{x_\sigma}^{x_{\sigma+\sigma'}} F(x)dx + \int_{x_{\sigma+\sigma'}}^{x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}} F(x)dx - \int_{x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}}^{x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''}} F(x)dx + \ldots\ldots\ldots,$$

les valeurs

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_i$$

étant très rapprochées entre elles.

Or, si l'on fait

$$x_\sigma = \eta_1,\ x_{\sigma+\sigma'} = \eta_2,\ x_{\sigma+\sigma'+\sigma''} = \eta_2,\ \ldots\ldots\ldots,$$

et que l'on désigne par a et b les valeurs extrêmes de x dans la suite

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_i,$$

et par ν le nombre des valeurs

$$x_\sigma,\ x_{\sigma+\sigma'},\ x_{\sigma+\sigma'+\sigma''},\ \ldots\ldots\ldots,$$

l'expression précédente peut être représentée ainsi:

$$\int_a^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^\nu \int_{\eta_\nu}^b F(x)dx.$$

A cause de quoi notre problème se réduit à la détermination des quantités

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ldots\ldots\eta_\nu,$$

sous la condition que, pour

$$F(x) = A_0 + A_1 x \ldots\ldots + A_n x^n,$$

on ait

$$(1)\ldots\ldots \int_a^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots + (-1)_\nu \int_{\eta_\nu}^{b} F(x)dx = sA_l,$$

et que le facteur s soit le plus grand possible, en supposant, bien entendu, que, conformément au sens du problème, les valeurs

$$a,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ldots\ldots\ldots \eta_\nu,\ b$$

présentent une série croissante.

§ 2. Pour tirer de ce qui précède les équations relatives à $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\ldots \eta_\nu$ nous remarquerons que la formule (1), en prenant

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots\ldots + A_n x^n,$$

devient

$$\begin{aligned}
&A_0\left[-a + 2\eta_1 - 2\eta_2 + 2\eta_3 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu + (-1)^\nu b\right]\\
&+\frac{1}{2}A_1\left[-a^2 + 2\eta_1^2 - 2\eta_2^2 + 2\eta_3^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu^2 + (-1)^\nu b^2\right]\\
&+\frac{1}{3}A_2\left[-a^3 + 2\eta_1^3 - 2\eta_2^3 + 2\eta_3^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu^3 + (-1)^\nu b^3\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{l}A_{l-1}\left[-a^l + 2\eta_1^l - 2\eta_2^l + 2\eta_3^l - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu^l + (-1)^\nu b^l\right]\\
&+\frac{1}{l+1}A_l\left[-a^{l+1} + 2\eta_1^{l+1} - 2\eta_2^{l+1} + 2\eta_3^{l+1} \ldots\ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu^{l+1} + (-1)^\nu b^{l+1}\right]\\
&+\frac{1}{l+2}A_{l+1}\left[-a^{l+2} + 2\eta_1^{l+2} - 2\eta_2^{l+2} + 2\eta_3^{l+2} \ldots\ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu^{l+2} + (-1)^\nu b^{l+2}\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{n+1}A_n\left[-a^{n+1} + 2\eta_1^{n+1} - 2\eta_2^{n+1} + 2\eta_3^{n+1} - \ldots - 2(-1)^\nu \eta_\nu^{n+1} + (-1)^\nu b^{n+1}\right]\\
&= sA_l.
\end{aligned}$$

D'où résultent les équations

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases}
a - 2\eta_1 + 2\eta_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2(-1)^\nu \eta_\nu - (-1)^\nu b = 0,\\
a^2 - 2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2(-1)^\nu \eta_\nu^2 - (-1)^\nu b^2 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a^l - 2\eta_1^l + 2\eta_2^l - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2(-1)^\nu \eta_\nu^l - (-1)^\nu b^l = 0,\\
a^{l+2} - 2\eta_1^{l+2} + 2\eta_2^{l+2} - \ldots\ldots + 2(-1)^\nu \eta_\nu^{l+2} - (-1)^\nu b^{l+2} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a^{n+1} - 2\eta_1^{n+1} + 2\eta_2^{n+1} - \ldots\ldots + 2(-1)^\nu \eta_\nu^{n+1} - (-1)^\nu b^{n+1} = 0,
\end{cases}$$

avec la condition que la quantité

$$(3)\ldots\ldots s=-\frac{1}{l+1}\left[a^{l+1}-2\eta_1{}^{l+1}+2\eta_2{}^{l+1}-\ldots\ldots\ldots+2(-1)^{\nu}\eta_\nu{}^{l+1}-(-1)^{\nu}b^{l+1}\right]$$

ait la valeur la plus grande possible, et par suite la méthode usitée des *maxima* relatifs nous fournit ces équations:

$$\begin{aligned}
\eta_1{}^l &= \lambda_0+\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_1{}^2+\ldots\ldots\ldots+\lambda_n\eta_1{}^n,\\
\eta_2{}^l &= \lambda_0+\lambda_1\eta_2+\lambda_2\eta_2{}^2+\ldots\ldots\ldots+\lambda_n\eta_2{}^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_\nu{}^l &= \lambda_0+\lambda_1\eta_\nu+\lambda_2\eta_\nu{}^2+\ldots\ldots\ldots+\lambda_n\eta_\nu{}^n,
\end{aligned}$$

où λ_0, λ_1, $\lambda_2\ldots\ldots\lambda_n$ sont des inconnues auxiliaires.

Les dernières équations nous montrent que les quantités

$$\eta_1,\ \eta_2,\ldots\ldots\eta_\nu$$

sont les racines de la même équation

$$\lambda_n\eta^n+\ldots\ldots+\lambda_2\eta^2+\lambda_1\eta+\lambda_0-\eta^l=0.$$

Comme cette équation est tout au plus de degré n, et que les quantités

$$\eta_1,\ \eta_1,\ldots\ldots\eta_\nu$$

sont différentes entre elles, il en résulte que ν, nombre de ces quantités, ne peut surpasser n. Donc, relativement au nombre ν, il n'y a que ces $n+1$ hypothèses à faire:

$$\nu=n,\ \nu=n-1,\ldots\ldots\nu=1,\ \nu=0.$$

De plus, on reconnaît aisément que la première hypothèse comprend comme cas particulier toutes les autres, tant qu'on admet des solutions où quelques unes des quantités

$$\eta_n,\ \eta_{n-1},\ \eta_{n-2},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont égales à b. En effet, si l'on a

$$n=\nu,\ \eta_n=b,\ \eta_{n-1}=b,\ldots\ldots\ldots\eta_{n-\rho+1}=b,$$

dans nos formules fondamentales (1), (2), (3), ρ termes s'éliminent, et le reste devient identique à ce qu'on trouverait en prenant

$$\nu=n-\rho,$$

au lieu de

$$n=\nu.$$

C'est pourquoi, dans les recherches de $\eta_1,\ \eta_2,\ldots\ldots\eta_\nu$, nous nous bornerons à la première hypothèse sur le nombre ν, savoir: $\nu=n$.

Or, pour cette valeur de ν, les formules (2) et (3) nous donnent

$$(4)\ldots\ldots\begin{cases} a-2\eta_1+2\eta_2-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n-(-1)^n b=0,\\ a^2-2\eta_1^2+2\eta_2^2-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^2-(-1)^n b^2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a^l-2\eta_1^l+2\eta_2^l-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^l-(-1)^n b^l=0,\\ a^{l+2}-2\eta_1^{l+2}+2\eta_2^{l+2}-\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{l+2}-(-1)^n b^{l+2}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a^{n+1}-2\eta_1^{n+1}+2\eta_2^{n+1}-\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{n+1}-(-1)^n b^{n+1}=0, \end{cases}$$

$$(5)\ldots\ldots s=-\frac{1}{l+1}\left[a^{l+1}-2\eta_1^{l+1}+2\eta_2^{l+1}-\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{l+1}-(-1)^n b^{l+1}\right].$$

Les équations (4) sont en nombre suffisant pour déterminer toutes les quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_n$. Ces équations pourront avoir plusieurs solutions, mais on distinguera facilement celle qui correspond à notre problème, en ayant égard à la valeur de

$$s=-\frac{1}{l+1}\left[a^{l+1}-2\eta_1^{l+1}+2\eta_2^{l+1}-\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{l+1}-(-1)^n b^{l+1}\right],$$

qu'on cherche à rendre aussi grande que possible. De plus, conformément à ce que nous avons vu, on rejetera toutes les solutions où les valeurs

$$a,\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots\ldots\ldots\eta_n,\ b$$

ne présentent pas une série croissante.

§ 3. Il serait très difficile de résoudre les équations (4) par les méthodes ordinaires d'Algèbre; mais on y pervient très aisément à l'aide d'une méthode particulière, dont nous nous sommes servi dans le Mémoire cité plus haut; c'est ce que nous allons montrer.

En développant l'expression

$$\frac{1}{x-a}-\frac{2}{x-\eta_1}+\frac{2}{x-\eta_2}-\ldots\ldots\ldots+\frac{2(-1)^n}{x-\eta_n}-\frac{(-1)^n}{x-b}$$

suivant les puissances décroissantes de x, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x-a}-\frac{2}{x-\eta_1}+\frac{2}{x-\eta_2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{2(-1)^n}{x-\eta_n}-\frac{(-1)^n}{x-b}=\\ &\quad\frac{1}{x^2}\left[a-2\eta_1+2\eta_1-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n-(-1)^n b\right]\\ &\quad+\frac{1}{x^3}\left[a^2-2\eta_1^2+2\eta_2^2-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^2-(-1)^n b^2\right]\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+\frac{1}{x^{l+2}}\left[a^{l+1}-2\eta_1^{l+1}+2\eta_2^{l+1}-\ldots\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{l+1}-(-1)^n b^{l+1}\right]\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{x^{n+2}}\left[a^{n+1}-2\eta_1^{n+1}+2\eta_2^{n+1}-\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{n+1}-(-1)^n b^{n+1}\right]$$
$$+\frac{1}{x^{n+3}}\left[a^{n+2}-2\eta_1^{n+2}+2\eta_2^{n+2}-\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{n+2}-(-1)^n b^{n+2}\right]$$
$$+\frac{1}{x^{n+4}}\left[a^{n+3}-2\eta_1^{n+3}+2\eta_2^{n+3}-\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{n+3}-(-1)^n b^{n+3}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où, en vertu des équations (4), (5), et en faisant, pour abréger,

$$s'=a^{n+2}-2\eta_1^{n+2}+2\eta_2^{n+2}\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{n+2}-(-1)^n b^{n+2},$$
$$s''=a^{n+3}-2\eta_1^{n+3}+2\eta_2^{n+3}-\ldots\ldots+2(-1)^n\eta_n^{n+3}-(-1)^n b^{n+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous obtenons

$$\frac{1}{x-a}-\frac{2}{x-\eta_1}+\frac{2}{x-\eta_2}-\ldots\ldots+\frac{2(-1)^n}{x-\eta_n}-\frac{(-1)^n}{x-b}=-\frac{(l+1)s}{x^{l+2}}+\frac{s'}{x^{n+3}}+\frac{s''}{x^{n+4}}+\ldots\ldots\ldots$$

D'autre part, en posant

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases}(x-\eta_1)(x-\eta_3)\ldots\ldots\ldots\ldots=\varphi(x),\\(x-\eta_2)(x-\eta_4)\ldots\ldots\ldots\ldots=\psi(x),\end{cases}$$

nous trouvons

$$\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_3}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$
$$\frac{1}{x-\eta_2}+\frac{1}{x-\eta_4}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

et par là l'équation précédente donne

$$\frac{1}{x-a}-\frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\frac{2\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{(-1)^n}{x-b}=-\frac{(l+1)s}{x^{l+2}}+\frac{s'}{x^{n+3}}+\frac{s''}{x^{n+4}}+\ldots\ldots\ldots$$

D'où, en intégrant,

$$\log(x-a)-2\log\varphi(x)+2\log\psi(x)-(-1)^n\log(x-b)=\log C+\frac{s}{x^{l+1}}-\frac{s'}{(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{(n+3)x^{n+3}}-\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{(x-a)\psi^2(x)}{(x-b)(-1)^n\varphi^2(x)}=Ce^{\frac{s}{x^{l+1}}-\frac{s'}{(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{(n+3)x^{n+3}}-\ldots\ldots}$$

D'après la composition des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, on voit que la plus haute puissance de x dans le développement de la fraction

$$\frac{(x-a)\psi^2(x)}{(x-b)(-1)^n\varphi^2(x)}$$

aura pour coefficient 1, et comme le premier terme du développement de

$$Ce^{\frac{s}{x^{l+1}}-\frac{s'}{(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{(n+3)x^{n+3}}-\ldots\ldots}$$

est C, l'équation précédente suppose

$$C=1,$$

et elle se réduit alors á celle-ci:

$$\frac{(x-a)\psi^2(x)}{(x-b)(-1)^n\varphi^2(x)}=e^{\frac{s}{x^{l+1}}-\frac{s'}{(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{(n+3)x^{n+3}}-\cdots\cdots}$$

ce qui nous donne

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\sqrt{\frac{(x-b)(-1)^n}{x-a}}e^{\frac{s}{2x^{l+1}}-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}}-\cdots\cdots}$$

C'est au moyen de cette formule que nous trouverons le coefficient s dans l'équation (1)

$$\int_a^{\eta_1}F(x)dx-\int_{\eta_1}^{\eta_2}F(x)dx+\int_{\eta_2}^{\eta_3}F(x)dx-\cdots\cdots+(-1)^\nu\int_{\eta_\nu}^{b}F(x)dx=sA_l$$

et les fonctions

$$\varphi(x),\ \psi(x)$$

qui, d'après (6), déterminent les quantités

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3\ldots\ldots\ldots$$

Mais pour y parvenir nous devons examiner séparément le cas de n pair et celui de n impair.

Le nombre n est pair.

§ 4. Dans le cas de n pair, l'équation (7) devient

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}e^{\frac{s}{2x^{l+1}}-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}}-\cdots\cdots\cdots}$$

D'où il résulte

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}=\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}\left(e^{-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}}-\cdots}-1\right),$$

et comme l'expression

$$e^{-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}}-\frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}}-\cdots\cdots}-1,$$

développée en série, ne contient x que dans les degrés inférieurs à $-(n+1)$, il s'en suit que la fraction

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

est la valeur de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, exacte jusqu'à $\frac{1}{x^{n+2}}$. D'autre part, n étant un nombre pair, les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, déterminées par les formules (6), sont du degré $\frac{n}{2}$, et dans ce cas la fraction $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ ne peut représenter la valeur de

$$\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$$

exactement jusqu'à $\frac{1}{x^{n+2}}$, à moins qu'elle ne soit égale à l'une des réduites de la fraction continue qui résulte du développement de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$. De plus, comme cette réduite doit représenter $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$ exactement jusqu'à $\frac{1}{x^{n+2}}$, et que son dénominateur ne sera pas de degré plus élevé que $\varphi(x)$ ou $x^{\frac{n}{2}}$, la réduite qui vient après elle doit avoir un dénominateur de degré supérieur à $\frac{n}{2}+1$. D'où l'on voit que parmi les réduites de la fraction continue, résultant de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, celle qui détermine la valeur de $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ est la dernière avec un dénominateur de degré inférieur à $\frac{n}{2}+1$. D'après cela, dès qu'on connaîtra la valeur de s, on trouvera la fraction $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, et par là, les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$, dépourvues de leur commun diviseur. Mais en ayant égard à la composition des formules (1), (4), (5), (6), on voit que tous les facteurs communs des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ne donnent naissance qu'aux valeurs η_1, η_2, $\eta_3\ldots$, égales deux à deux, et de telles valeurs de η_1, η_2, $\eta_3\ldots$, dans les formules (1), (4), (5), ne produisent que des termes identiquement nuls.

Ainsi l'on s'assure qu'en dénotant par

$$\frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}}$$

la dernière des réduites de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$ dont le dénominateur est de degré inférieur à $\frac{n}{2}+1$, et en faisant abstraction des facteurs communs des fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ qui n'ont aucune influence sur la composition de nos formules définitives, on aura

$$\psi(x) = C_0 P_{\frac{n}{2}}, \quad \varphi(x) = C_0 Q_{\frac{n}{2}},$$

où C_0 est une constante, et par là, en vertu de (6), les quantités

$$\eta_1, \eta_3, \ldots,$$
$$\eta_2, \eta_4, \ldots.$$

seront déterminées par la résolution des équations

$$Q_{\frac{n}{2}} = 0,$$
$$P_{\frac{n}{2}} = 0.$$

Comme les quantités

$$\eta_1, \eta_3, \ldots\ldots,$$
$$\eta_2, \eta_4, \ldots\ldots$$

présentent une série croissante, en disposant les racines des équations

$$Q_{\frac{n}{2}} = 0, \; P_{\frac{n}{2}} = 0$$

par ordre de grandeur, on trouvera deux suites de termes respectivement égaux à

$$\eta_1, \eta_3, \ldots\ldots,$$
$$\eta_2, \eta_4, \ldots\ldots$$

§ 5. D'après ce que nous avons montré, on trouvera facilement les quantités $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \ldots\ldots$, dès qu'on connaîtra la valeur de la constante s, qui entre dans l'expression $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$. C'est la détermination de cette constante qui va nous occuper.

En dénotant par $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}}$ celle des réduites de la fraction continue, résultant de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, qui vient immédiatement après $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, nous trouvons que la différence

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}} = \frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}} - \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$$

est du même ordre que l'expression

$$\frac{1}{Q_{\frac{n}{2}} \cdot Q_{\frac{n}{2}+1}}.$$

Mais nous avons vu que la fraction $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ doit représenter la valeur de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$ avec l'exactitude jusqu'à $\frac{1}{x^{n+2}}$; donc cette expression ne peut être de degré supérieur à $-(n+2)$, et par conséquent, la fonction $Q_{\frac{n}{2}+1}$, dénominateur de la réduite qui vient après $\frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, devra être d'un degré supérieur à celui de $\frac{x^{n+1}}{Q_{\frac{n}{2}}}$. Or, d'après cela, on peut toujours trouver toutes les valeurs de s satisfaisant à nos équations. En effet, le dénominateur de la fraction

$$\frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

étant tout au plus du degré $\frac{n}{2}$, l'expression $\frac{x^{n+2}}{Q_{\frac{n}{2}}}$ ne peut être que de degré supérieur à $\frac{n}{2}+1$. Donc, la réduite

$$\frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

avec un dénominateur de degré inférieur à $\frac{n}{2}+1$, sera immédiatement suivie de la fraction $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}}$, où le dénominateur est de degré supérieur à $\frac{n}{2}+1$. D'où l'on voit que la fraction continue, résultant du développement de $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, n'aura pas de réduite avec un dénominateur du degré $\frac{n}{2}+1$. Mais si l'on trouve toutes les valeurs de s, avec lesquelles l'expression

$$\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$$

jouit de cette propriété *), en examinant chacune d'elles à part, on distinguera toutes celles qui, conformément à ce que nous avons vu sur la fraction $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}}$, rendent le degré de $Q_{\frac{n}{2}+1}$ supérieur á celui de $\frac{x^{n+1}}{Q_{\frac{n}{2}}}$.

Ainsi on parviendra à déterminer les valeurs de s qui correspondent à toutes les solutions possibles de nos équations. Pour choisir parmi elles la valeur s qui résout notre problème, on exclura toutes celles qui conduisent à ses solutions impropres, c.-à-d., où les valeurs

$$-h,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4, \ldots, +h,$$

contre le vrai sens du problème, ne sont pas toutes réelles ou bien ne présentent pas une série croissante. Après cela, la valeur de s, numériquement la plus grande parmi celles qui restent, correspondra, évidemment, à la solution cherchée de notre problème, où il s'agit de rendre la quantité

$$s = -\frac{1}{l+1}\left[a^{l+1} - 2\eta_1^{\,l+1} + 2\eta_2^{\,l+1} - \ldots - (-1)^{\nu} b^{l+1}\right]$$

aussi grande que possible.

*) Dans le Mémoire intitulé: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*, nous avons montré la marche à suivre pour trouver les valeurs d'une constante, déterminée par une condition de ce genre.

En suivant la marche indiquée, on finira toujours par trouver la valeur de s qui résout notre problème et qui détermine, comme nous l'avons vu, toutes les autres inconnues de la formule

$$\int_a^{x_1} F(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} F(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^{\nu}\int_{x_\nu}^{b} F(x)dx = sA_l.$$

Mais dans plusieurs cas particuliers la détermination de s se simplifie notablement; car souvent la série des valeurs parmi lesquelles on cherchera celle qui résout notre problème, se réduira à un seul terme qui ne pourra être que la valeur cherchée de s. — Remarquons encore que dans toutes ces recherches on pourra faire abstraction des valeurs imaginaires de s qui ne sont pas conformes au sens du problème.

Le nombre n est impair.

§ 6. Dans ce cas la formule (7) devient

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\, e^{\frac{s}{2x^{l+1}} - \frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \ldots\ldots\ldots}$$

ce qui nous donne

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\left(e^{-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \ldots\ldots} - 1\right).$$

Cette formule prouve que la fraction

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

ne diffère de l'expression

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

que par des termes d'un ordre moins élevé que $\frac{1}{x^{n+3}}$, et comme d'après (6), pour n impair, on trouve que $\varphi(x)$, dénominateur de cette fraction, est du degré $\frac{n+1}{2}$, cela suppose qu'elle est égale à l'une des réduites de la fraction continue qu'on obtient par le développement de l'expression

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}.$$

De plus, en dénotant par

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$$

celle des réduites de la fraction continue, résultant de $\frac{e^{\frac{xs}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$, qui est égale à $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, et par

$$\frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}}$$

la réduite qui vient immédiatement après $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$, on trouve que la différence

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} - \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

est du même degré que

$$\frac{1}{Q_{\frac{n+1}{2}} Q_{\frac{n+3}{2}}}.$$

D'où, suivant ce que nous avons remarqué relativement à la différence

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},$$

il résulte que la fonction $Q_{\frac{n+3}{2}}$ doit être de degré plus élevé que $\frac{x^{n+2}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$. Mais comme $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$ est égale à la fraction $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, mise sous la forme la plus simple, et que $\varphi(x)$ n'est que du degré $\frac{n+1}{2}$, cela nous prouve que $Q_{\frac{n+3}{2}}$ sera de degré supérieur à $\frac{n+3}{2}$. D'où l'on voit que la réduite

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

dont le dénominateur n'est pas de degré supérieur à $\frac{n+1}{2}$, est suivie immédiatement de la réduite

$$\frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}}$$

avec un dénominateur de degré plus élevé que $\frac{n+3}{2}$. Donc, parmi les réduites de la fraction continue, résultant du développement de l'expression

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{\frac{1}{4}}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},$$

la fraction

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

sera la dernière avec un dénominateur de degré inférieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$.

Or, d'après ce que nous venons de montrer sur les réduites

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}, \quad \frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}},$$

et en suivant la même marche que dans les §§ 4 et 5, on parvient, relativement à la détermination des quantités

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \ldots\ldots, s,$$

dans le cas de n impair, à ces conclusions:

1) Les quantités

$$\eta_1, \eta_3, \ldots\ldots,$$

$$\eta_2, \eta_4, \ldots\ldots\ldots$$

sont les racines des équations

$$Q_{\frac{n+1}{2}} = 0, \; P_{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

où $P_{\frac{n+1}{2}}$, $Q_{\frac{n+1}{2}}$ désignent les termes de la dernière réduite de la fraction continue, résultant du développement de

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{\frac{1}{4}}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},$$

dont le dénominateur $Q_{\frac{n+1}{2}}$ est tout au plus du degré $\frac{n+1}{2}$.

2) On cherchera la valeur de s parmi celles qui ne donnent pas à la fraction continue, résultant du développement de l'expression

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+2}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},$$

de réduite dont le dénominateur serait du degré $\frac{n+3}{2}$. — Dans la série des valeurs de s qui jouissent de cette propriété, on exclura, en premier lieu, toutes celles avec lesquelles la réduite $\frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}}$ qui vient après $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ a pour dénominateur une fonction moins élevée que $\frac{x^{n+3}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$, et puis, toutes celles qui, d'après le N° 1, donnent des valeurs

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \ldots\ldots$$

ne répondant pas à notre problème (Voyez le § 2). Parmi les valeurs restantes celle numériquement la plus grande sera égale à la valeur cherchée de s. Dans tout cela on fera abstraction des valeurs imaginaires de s.

II.

§ 7. Pour montrer l'usage des méthodes exposées, nous allons chercher les coefficients de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n$$

dans les cas de

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Pour simplifier les calculs, nous supposerons que les valeurs données de $F(x)$ sont comprises entre $x = -h$ et $x = +h$, ce qui revient à prendre dans nos formules

$$a = -h,\ b = +h.$$

Pour ces valeurs de a et b, et en supposant n pair, nous remarquerons (§§ 4, 5) que la détermination du coefficient A_0 se rattache au développement de l'expression

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}}$$

en fraction continue. Or, au moyen de la méthode ordinaire, on trouve aisément que la fraction continue, résultant de cette expression, a la valeur suivante:

$$1 + \cfrac{s-2h}{2x+h-\frac{1}{2}s+\cfrac{(s-2h)^3+32h^3}{24(s-2h)x+\cfrac{s^6-12hs^5+60h^2s^4-720h^4s^2-2880h^5s+2880h^6}{10[(s-2h)^3+32h^3]x+etc.}}}$$

En examinant la composition de cette fraction continue, on voit que ses trois premiers quotients ne cessent d'être du premier degré, et conséquemment, donnent des réduites avec des dénominateurs respectivement des degrés 0, 1, 2, 3, tant que les quantités

$$s-2h,$$
$$(s-2h)^3+32h^3,$$
$$s^6-12hs^5+60h^2s^4-720h^4s^2-2880h^5s+2880h^6$$

restent différentes de zéro.

Donc, pour que cela n'ait pas lieu, la quantité s doit vérifier au moins l'une de ces équations:

$$s-2h=0,$$
$$(s-2h)^3+32h^3=0,$$
$$s^6-12hs^5+60h^2s^4-720h^4s^2-2880h^5s+2880h^6-0.$$

D'autre part, en supposant consécutivement que la quantité s vérifie chacune de ces équations, on trouve que la fraction continue, résultant de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, dans ces trois hypothèses sur s, devient respectivement

$$1+\frac{s^2(s-6h)}{48x^3+\text{etc.}},$$

$$1+\cfrac{s-2h}{2x+h-\frac{s}{2}+\cfrac{3s^5-30hs^4+80h^2s^3-240h^4s+480h^5}{1920(s-2h)x^2+\text{etc.}},}$$

$$1+\cfrac{s-2h}{2x+h-\frac{s}{2}+\cfrac{(s-2h)^3+32h^3}{24(s-2h)x+\cfrac{0}{x+\text{etc.}}}}$$

D'où, pour réduites de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}e^{\frac{s}{2x}}$, on obtient

$$(8)\ldots\ldots\frac{1}{1},\ \frac{48x^3+s^2(s-6h)}{48x^3},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(9)\ldots\ldots\frac{1}{1},\ \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s},\ \frac{3840(s-2h)x^4+\ldots\ldots\ldots}{3840(s-2h)x^4+\ldots\ldots\ldots},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(10)\ldots\ldots\frac{1}{1},\ \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s},\ \frac{48(s-2h)x^2+12(s-2h)^2x+(s-2h)^3+32h^3}{48(s-2h)x^2-12(s-2h)^2x+(s-2h)^3+32h^3},\ \frac{p_4}{q_4},\ \frac{p_5}{q_5},\ldots,$$

en désignant par $\frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \ldots$ des réduites avec des dénominateurs de degrés supérieurs à 3.

Ainsi nous parvenons à trouver tous les cas, où la fraction continue, résultant de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}e^{\frac{s}{2x}}$, n'a pas de réduites avec des dénominateurs des degrés 1, 2, 3. D'après cela,

en suivant la marche indiquée dans les §§ 4, 5, il est aisé de trouver la solution de notre problème pour $n = 0,2,4$. C'est ce dont nous allons nous occuper.

Cas de $n = 0$.

§ 8. Dans ce cas on doit chercher la valeur de s parmi celles, avec lesquelles la fraction continue, résultant du développement de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}}$, n'a pas de réduite dont le dénominateur soit du degré $\frac{0}{2} + 1 = 1$. Or, d'après ce que nous avons vu sur les réduites de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}}$, cela n'a lieu que dans le cas où

$$s - 2h = 0,$$

et comme cette équation ne donne qu'une valeur de s

$$s = 2h,$$

nous concluons sur le champ que c'est elle qui résout notre problème.

Pour trouver les quantités

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\ldots,$$

nous chercherons parmi les réduites (8), obtenues dans l'hypothèse

$$s - 2h = 0,$$

celle qui est la dernière avec un dénominateur de degré inférieur à $\frac{0}{2} + 1 = 1$. Comme cette fraction est $\frac{1}{1}$, il s'en suit

$$P_{\frac{n}{2}} = 1,\ Q_{\frac{n}{2}} = 1,$$

et par là on reconnaît que le nombre des quantités

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\ldots,$$

qui se déterminent par les équations

$$P_{\frac{n}{2}} = 0,\ Q_{\frac{n}{2}} = 0,$$

se réduit à 0.

Or, en portant dans la formule (1) la valeur trouvée de s et en réduisant la série des valeurs

$$a, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\ldots, b$$

à

$$-h, +h,$$

on obtient, pour $n = 0$ et $l = 0$,

$$\int_{-h}^{+h} F(x)dx = 2hA_0,$$

équation qui se vérifie aisément, en remarquant que dans le cas de $n = 0$, la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1x + \ldots\ldots + A_nx^n$$

devient égale à une constante.

Cas de $n = 2$.

§ 9. Si $n = 2$, on cherchera la valeur de s parmi celles avec lesquelles la fraction continue, résultant de l'expression

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}},$$

n'a pas de réduite dont le dénominateur soit du degré $\frac{2}{2} + 1 = 2$. Or, comme nous l'avons vu (§ 7), cela ne peut avoir lieu que dans les cas où l'une des équations

$$(11)\ldots\ldots\ldots s - 2h = 0,\ (s-2h)^3 + 32h^3 = 0$$

est satisfaite. Pour choisir parmi les racines de ces équations celle qui résout notre problème, remarquons que dans le cas de

$$s - 2h = 0,$$

d'après (8), les réduites de la fraction continue, résultant du développement de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}}$, présentent cette série:

$$\frac{1}{1},\ \frac{48x^3 + s^2(s-2h)}{48x^3},\ldots\ldots\ldots$$

Parmi ces fractions la dernière avec un dénominateur de degré inférieur à $\frac{2}{2} + 1 = 2$ étant $\frac{1}{1}$, on aura, d'après notre notation, dans la supposition de $s - 2h = 0$,

$$Q_{\frac{n}{2}} = 1,\ Q_{\frac{n}{2}+1} = 48x^3,$$

Comme pour ces valeurs de $Q_{\frac{n}{2}}$, $Q_{\frac{n}{2}+1}$, le degré de $Q_{\frac{n}{2}+1}$ n'est pas supérieur à celui de $\frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}}}$, on conclut (§ 7) que l'équation

$$s - 2h = 0$$

ne donne pas la valeur de s qui résoudrait notre problème. D'après cela il ne reste qu'à chercher cette valeur parmi les racines de la dernière des équations (11), et comme cette équation n'a qu'une racine réelle

$$s = 2(1 - \sqrt[3]{4})h,$$

nous concluons sur le champ que c'est elle qui correspond à notre problème.

Pour trouver les quantités

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\ldots,$$

remarquons que, dans le cas de

$$(s-2h)^3 + 32h^3 = 0,$$

les réduites de la fraction continue, résultant du développement de

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}},$$

sont, comme nous l'avons vu (9),

$$\frac{1}{1},\ \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s},\ \frac{3840(s-2h)x^4+\ldots\ldots}{3840(s-2h)x^4+\ldots\ldots},\ldots\ldots\ldots$$

La fraction

$$\frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s}$$

étant la dernière parmi elles avec un dénominateur de degré au dessous de $\frac{2}{2}+1=2$, nous concluons qu'on aura

$$P_{\frac{n}{2}} = 2x-h+\tfrac{1}{2}s,\ Q_{\frac{n}{2}} = 2x+h-\tfrac{1}{2}s.$$

D'après cela, pour la détermination des quantités

$$\eta_1, \eta_3, \ldots\ldots,$$
$$\eta_2\ \eta_4, \ldots\ldots,$$

nous obtenons les équations

$$Q_{\frac{n}{2}} = 2x+h-\tfrac{1}{2}s = 0,$$
$$P_{\frac{n}{2}} = 2x-h+\tfrac{1}{2}s = 0.$$

D'où il résulte

$$\eta_1 = -\tfrac{h}{2} + \tfrac{1}{4}s,\ \eta_2 = \tfrac{h}{2} - \tfrac{1}{4}s,$$

et en portant ici la valeur trouvée de s, on a définitivement

$$\eta_1 = -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}h,\ \eta_2 = +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}h.$$

En vertu de ces valeurs de

$$s, \eta_1, \eta_2,$$

et en remarquant que dans le cas actuel

$$l = 0,\ a = -h,\ b = +h,$$

la formule (1) nous donne

$$\int_{-h}^{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h} F(x)dx - \int_{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h}^{+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h} F(x)dx + \int_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h}^{h} F(x)dx = 2(1-\sqrt[3]{4})hA_0.$$

Cas de $n=4$.

§ 10. Nous avons vu (§ 7) que la fraction continue, résultant du développement de l'expression

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}},$$

n'a pas de réduite avec un dénominateur du degré 3 seulement dans le cas où s remplit l'une des équations

$$(s-2h)^3 + 32h^3 = 0,$$
$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0.$$

D'après cela, comme le nombre $\frac{n}{2}+1$, pour $n=4$, devient 3, on cherchera, suivant le § 5, la valeur de s parmi les racines réelles de ces équations.

D'autre part, comme, dans la supposition

$$(s-2h)^3 + 32h^3 = 0,$$

nous avons trouvé que les fractions réduites sont

$$\frac{1}{1},\ \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s},\ \frac{3840(s-2h)x^1+\ldots\ldots}{3840(s-2h)x^2+\ldots\ldots},\ \ldots\ldots\ldots,$$

et que la fraction

$$\frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s},$$

la dernière avec le dénominateur de degré inférieur à 3, est suivie de la fraction

$$\frac{3840(s-2h)x^4+\ldots\ldots}{3840(s-2h)x^1+\ldots\ldots},$$

dont le dénominateur n'est pas de degré supérieur à celui de

$$\frac{x^4+1}{2x+h-\frac{s}{2}},$$

nous concluons que l'équation

$$(s-2h)^3 + 52h^3 = 0$$

ne saurait donner la valeur cherchée de s, et par conséquent, qu'on doit la chercher parmi les racines réelles de l'équation

$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0.$$

Or, en cherchant les racines réelles de cette équation, on trouve que l'une d'elles est comprise entre $s = 6h$ et $s = 7h$, et l'autre entre $s = 0$ et $s = h$. Pour reconnaître parmi ces valeurs de s celle qui se rapporte à notre problème, nous passons aux valeurs de

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3, \ldots\ldots$$

qui en résultent.

Comme dans le cas de

$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880hs^5 + 2880h^6 = 0.$$

d'après (10), les réduites de la fraction continue qui résulte de

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x}}$$

sont

$$\frac{1}{1},\ \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s},\ \frac{48(s-2h)x^2+12(s-2h)^2x+(s-2h)^3+32h^3}{48(s-2h)x^2-12(s-2h)x+(s-2h)^2+32h^2},\ \frac{p_4}{q_4}, \ldots\ldots\ldots,$$

et que parmi elles la dernière avec le dénominateur de degré au dessous de $\frac{4}{2} + 1 = 3$, est

$$\frac{48(s-2h)x^2+12(s-2h)x+(s-2h)^3+32h^3}{48(s-2h)x^2-12(s-2h)x+(s-2h)^3+32h^3},$$

nous trouvons, pour la détermination de

$$\eta_1,\ \eta_3, \ldots\ldots,$$

$$\eta_2,\ \eta_4, \ldots\ldots,$$

les équations

$$48(s-2h)x^2 - 12(s-2h)^2x + (s-2h)^3 + 32h^3 = 0,$$

$$48(s-2h)x^2 + 12(s-2h)^2x + (s-2h)^3 + 32h^3 = 0.$$

Or on reconnaît que ces équations n'ont point de solution réelle, si s surpasse $2h$. D'où nous concluons que la racine de l'équation

$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0.$$

comprise entre $s = 6h$ et $s = 7h$, ne donne pas de valeurs de

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4, \ldots\ldots,$$

propres à la solution de notre problème, et, par conséquent, que c'est son autre racine, comprise entre $s = 0$ et $s = h$, et dont la valeur approchée est $0{,}83446h$, qui correspondra à notre problème.

En portant cette valeur de s dans les équations que nous avons trouvées pour la détermination des quantités

$$\eta_1, \eta_3, \ldots\ldots,$$
$$\eta_2, \eta_4, \ldots\ldots,$$

on a

$$x^2 + 0{,}29138hx - 0{,}54362h^2 = 0,$$
$$x^2 - 0{,}29138hx - 5{,}54362h^2 = 0,$$

et comme les racines de ces équations, disposées par ordre de grandeur, sont

$$-0{,}89725h, \quad +0{,}60587h,$$
$$-0{,}60587h, \quad +0{,}89725h,$$

nous concluons qu'on aura

$$\eta_1 = -0{,}89725h, \quad \eta_3 = 0{,}60587h,$$
$$\eta_2 = -0{,}60587h, \quad \eta_4 = 0{,}89725h.$$

Ainsi nous trouvons les valeurs des quantités

$$s, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$$

pour $n = 4$ et en prenant

$$l = 0, \; a = -h, \; b = +h.$$

D'après cela la formule (1) nous donne

$$\int_{-h}^{-0{,}89725h} F(x)dx - \int_{-0{,}89725h}^{-0{,}60587h} F(x)dx + \int_{-0{,}60587h}^{0{,}60587h} F(x)dx - \int_{0{,}60587h}^{0{,}89725h} F(x)dx + \int_{0{,}89725h}^{h} F(x)dx = 0{,}83446hA_0.$$

Cas de $n = 1, 3, 5$.

§ 11. En cherchant pour ces valeurs de n la solution de notre problème, relatif à la détermination de A_0, et en prenant toujours

$$a = -h, \; b = +h,$$

on parvient définitivement aux formules identiques à celles que nous venons de trouver pour

$$n = 0, 2, 4,$$

respectivement; c'est ce qu'on pouvait prévoir, en remarquant que dans les formules

$$\int_{-h}^{h} F(x)dx = 2hA_0,$$

$$\int_{-h}^{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h} F(x)dx - \int_{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h}^{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h} F(x)dx + \int_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}h}^{h} F(x)dx = 2\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)hA_0,$$

$$\int_{-h}^{-0,89725h} F(x)dx - \int_{-0,89725h}^{-0,60587h} F(x)dx + \int_{-0,60587h}^{0,60587h} F(x)dx - \int_{0,60587h}^{0,89725h} F(x)dx + \int_{0,89725h}^{h} F(x)dx = 0,83446hA_0,$$

tous les termes de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1x + \ldots\ldots + A_nx^n$$

avec les puissances impaires de x s'évanouissent.

§ 12. En cherchant de la même manière la solution de notre problème pour

$$l = 1,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

et en supposant toujours

$$a = -h,\ b = +h,$$

nous parvenons définitivement à ces formules:

Cas de $n = 1$ ou 2.

$$\int_{-h}^{0} F(x)dx - \int_{0}^{h} F(x)dx = -h^2A_1.$$

Cas de $n = 3$ ou 4.

$$\int_{-h}^{-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}h} F(x)dx - \int_{-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}h}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}h} F(x)dx - \int_{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}h}^{h} F(x)dx = (\sqrt{2} - 1)h^2A_1.$$

Cas de $n = 5$.

$$\int_{-h}^{-0,91682h} F(x)dx - \int_{-0,91682h}^{-0,67418h} F(x)dx + \int_{-0,67418h}^{0} F(x)dx - \int_{0}^{0,67418h} F(x)dx + \int_{0,67418h}^{0,91682h} F(x)dx - \int_{0,91682h}^{h} F(x)dx = -0,82277h^2A_1.$$

De même pour $l=2$ et en supposant successivement $n=2,\ 3,\ 4,\ 5$, nous trouvons:

Cas de $n=2$ ou 3.

$$\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} F(x)dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}h}^{h} F(x)dx = \tfrac{1}{2}h^3 A_2.$$

Cas de $n=4$ ou 5.

$$\int_{-h}^{-0,87305h} F(x)dx - \int_{-0,87305h}^{-0,37305h} F(x)dx + \int_{-0,37305h}^{0,37305h} F(x)dx - \int_{0,37305h}^{0,87305h} F(x)dx + \int_{0,87305h}^{h} F(x)dx = -0,15139h^3 A_2.$$

En prenant $l=3$ et $n=3,\ 4,\ 5$, nous obtenons ces formules:

Cas de $n=3$ ou 4.

$$\int_{-h}^{-\sqrt{\frac{1}{3}}h} F(x)dx - \int_{-\sqrt{\frac{1}{3}}h}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\sqrt{\frac{1}{3}}h} F(x)dx - \int_{\sqrt{\frac{1}{3}}h}^{h} F(x)dx = -\tfrac{1}{4}h^4 A_3.$$

Cas de $n=5$.

$$\int_{-h}^{-0,89945h} F(x)dx - \int_{-0,89945h}^{-0,55589h} F(x)dx + \int_{-0,55589h}^{0} F(x)dx$$

$$- \int_{0}^{0,55589h} F(x)dx + \int_{0,55589h}^{0,89945h} F(x)dx - \int_{0,89945h}^{h} F(x)dx = 0,05901h^4 A_3.$$

Le cas de $l=4$ et $n=4$ ou 5 nous fournit l'équation

$$\int_{-h}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} F(x)dx - \int_{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} F(x)dx + \int_{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} F(x)dx - \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} F(x)dx + \int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{h} F(x)dx = \tfrac{1}{8}h^5 A_4.$$

Enfin, pour le cas de $l=5$ et $n=5$, on obtient cette formule:

$$\int_{-h}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}h} F(x)dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{-\frac{1}{2}h} F(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}h}^{0} F(x)dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}h} F(x)dx + \int_{\frac{1}{2}h}^{\frac{\sqrt{3}}{2}h} F(x)dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{h} F(x)dx = -\tfrac{1}{16}h^6 A_5.$$

§ 13. D'après ce que nous venons de trouver il est facile de composer la table des valeurs de ν, s, η_1, η_2, η_3, η_4, ... dans les cas de

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

et en prenant pour limites de x les valeurs $-h$ et $+h$. Une telle table se trouve à la fin de notre Mémoire, et on verra dans la *Section* IV le parti qu'on peut en tirer pour l'interpolation. Il est désirable que cette table soit prolongée jusqu'à des valeurs de n plus considérables.

III.

§ 14. Dans les paragraphes précédents nous avons donné la méthode générale pour trouver, suivant notre problème, les quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3, \ldots\ldots$$

dans la formule

$$\int_a^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_\nu}^{b} F(x)dx = sA_l,$$

quel que soit A_l, coefficient de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n$$

que l'on cherche à déterminer. Nous allons montrer maintenant que cette méthode est susceptible d'une simplification notable dans le cas particulier, où il s'agit de la détermination de A_n, dernier coefficient de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n.$$

Nous verrons que dans ce cas il est aisé de trouver directement les valeurs de

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3 \ldots\ldots,$$

quel que soit le nombre n, et nous montrerons plus tard comment on peut en tirer une nouvelle formule d'interpolation.

Nous supposerons toujours, pour simplifier nos formules,

$$a = -h,\ b = h,$$

et nous commencerons par le cas de n impair.

Cas de n impair.

§ 15. En faisant dans les formules du § 6

$$a = -h,\ b = +h,$$

nous trouvons que, dans le cas de n impair et $l = n$, les quantités

$$\eta_1,\ \eta_3, \ldots\ldots,$$
$$\eta_{i2},\ \eta_4, \ldots\ldots$$

se déterminent par les équations

$$Q_{\frac{n+1}{2}} = 0,\ P_{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

où $P_{\frac{n+1}{2}}$, $Q_{\frac{n+1}{2}}$ sont les termes de la dernière réduite de

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2-h^2}},$$

dont le dénominateur $Q_{\frac{n+1}{2}}$ n'est pas de degré plus élevé que $\frac{n+1}{2}$. D'autre part, comme les expressions

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2-h^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}$$

ne diffèrent entre elles que par les termes de l'ordre $\frac{1}{x^{n+2}}$ ou moins élevés, et que des termes de ces ordres n'ont aucune influence sur les fractions réduites avec les dénominateurs de degrés inférieurs à $\frac{n+2}{2}$, il est clair que dans la détermination de

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}},$$

suivant la méthode mentionnée, on peut prendre l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}$$

au lieu de

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2-h^2}}.$$

Or, d'après cela il est aisé de trouver l'expression générale des fonctions $P_{\frac{n+1}{2}}$ et $Q_{\frac{n+1}{2}}$,

et pour y parvenir nous allons chercher la loi de composition de la fraction continue qui résulte du développement de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}.$$

§ 16. En remarquant que le produit des valeurs

$$x-\sqrt{x^2-h^2},\quad x+\sqrt{x^2-h^2}$$

se réduit à h^2, nous concluons qu'on aura

$$x-\sqrt{x^2-h^2}=\frac{h^2}{x+\sqrt{x^2-h^2}};$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sqrt{x^2-h^2}-x=-\frac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)},$$

et par là, au moyen des substitutions successives de

$$-\frac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}$$

à la place de

$$\sqrt{x^2-h^2}-x,$$

on trouve

$$\sqrt{x^2-h^2}-x=-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}}$$

$$=-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}}}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-}}\cdots\cdots-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}}.$$

D'où résulte ce développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}$ en fraction continue:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-}}}}\cdots\cdots$$

*

Pour trouver la loi de composition des réduites de cette fraction continue, que nous désignerons par

$$\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}},\ \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}},\ \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}},\ \ldots\ldots,$$

remarquons que leurs termes sont liés entre eux par les équations

$$P^{(m+2)} = 2x\,P^{(m+1)} - h^2 P^{(m)},$$
$$Q^{(m+2)} = 2x\,P^{(m+1)} - h^2 Q^{(m)}.$$

Mais en traitant ces formules, comme les équations aux *différences finies*, on en tire

$$P^{(m)} = C\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^m + C_1\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^m,$$
$$Q^{(m)} = C_2\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^m + C_3\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^m,$$

où

$$C,\ C_1,\ C_2,\ C_3$$

sont des valeurs indépendantes du nombre m. Pour déterminer ces quantités nous remarquerons que les valeurs précédentes de $P^{(m)}$, $Q^{(m)}$, pour $m=0$, $m=1$, donnent

$$P^{(0)} = C + C_1,\quad P^{(1)} = C\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right) + C_1\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right),$$
$$Q^{(0)} = C_2 + C_3,\quad Q^{(1)} = C_2\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right) + C_3\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right),$$

et comme d'autre part, d'après le développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}$ en fraction continue

$$\cfrac{1}{x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\ddots}}},$$

on trouve

$$\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}} = \frac{0}{1},\quad \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}} = \frac{1}{x},$$

il en résulte les équations

$$C + C_1 = 0,$$
$$C\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right) + C_1\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right) = 1,$$
$$C_2 + C_3 = 1,$$
$$C_2\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right) + C_3\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right) = x.$$

Ces équations, étant résolues relativement à C, C_1, C_2, C_3, nous donnent

$$C=\frac{1}{2\sqrt{x^2-h^2}},\quad C_1=-\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}},$$
$$C_2=\tfrac{1}{2},\quad C_3=\tfrac{1}{2},$$

et en portant ces valeurs de C, C_1, C_2, C_3 dans les expressions de $P^{(m)}$, $Q^{(m)}$, on trouve définitivement

$$P^{(m)}=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^m-(x-\sqrt{x^2-h^2})^m}{2\sqrt{x^2-h^2}}$$
$$Q^{(m)}=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^m+(x-\sqrt{x^2-h^2})^m}{2}.$$

Telles sont les valeurs des termes dans les réduites

$$\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}},\ \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}},\ \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}},\ \ldots\ldots\ldots,\ \frac{P^{(m)}}{Q^{(m)}},\ \ldots\ldots\ldots$$

de la fraction continue

$$\cfrac{1}{x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\ddots}}}$$

qui résulte du développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}$.

§ 17. D'après cela on voit que la dernière de ces réduites, dont le dénominateur n'est pas de degré plus élevé que $\frac{n+1}{2}$, a pour termes les fonctions

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}-(x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2-h^2}},$$
$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2}.$$

D'où, en vertu de ce que nous avons vu sur la détermination de

$$\eta_1,\ \eta_3,\ \ldots\ldots,$$
$$\eta_2,\ \eta_4,\ \ldots\ldots,$$

il suit que ces quantités sont les racines des équations

$$(12)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases}\dfrac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2}=0,\\[2ex]\dfrac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}-(x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2-h^2}}=0.\end{cases}$$

Quant à la solution de ces équations, on y parvient très aisément, en remarquant que si l'on fait

$$\frac{x}{h} = \cos\varphi,$$

elles deviennent

$$\cos\frac{n+1}{2}\varphi = 0, \quad \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\varphi} = 0,$$

ce qu'on vérifie en général, en prenant

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n+1}, \quad \varphi = \frac{2l\pi}{n+1},$$

où k et l sont des nombres entiers, dont le dernier ne doit pas être divisible par $\frac{n+1}{2}$. D'après cela, en faisant successivement

$$k = \frac{n-1}{2}, \ k = \frac{n-3}{2}, \ldots\ldots\ldots k = 2, \ k = 1, \ k = 0,$$

$$l = \frac{n-1}{2}, \ l = \frac{n-3}{2}, \ldots\ldots\ldots l = 2, \ l = 1,$$

on trouve pour les racines des équations (12), disposées suivant leur grandeur, et, par conséquent, pour les quantités cherchées

$$\eta_1, \ \eta_3, \ldots\ldots,$$

$$\eta_2, \ \eta_4, \ldots\ldots,$$

les expressions suivantes:

$$\eta_1 = h\cos\frac{n}{n+1}\pi, \ \eta_3 = h\cos\frac{n-2}{n+1}\pi, \ldots\ldots\ldots \eta_{n-2} = h\cos\frac{3\pi}{n+1}, \ \eta_n = h\cos\frac{\pi}{n+1},$$

$$\eta_2 = h\cos\frac{n-1}{n+1}\pi, \ \eta_4 = h\cos\frac{n-3}{n+1}\pi, \ldots\ldots\ldots \eta_{n-1} = h\cos\frac{2\pi}{n+1}.$$

§ 18. En passant à la détermination de la quantité s, remarquons que, d'après le § 6, on doit chercher sa valeur parmi celles avec lesquelles l'expression

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2-h^2}}$$

ne diffère de la réduite

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}},$$

que par les termes de l'ordre inférieur à $-(n+2)$, ce qui suppose l'équation

$$lim.\left[\left(\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2-h^2}}-\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}\right)x^{n+2}\right]_{x=\infty}=0.$$

Mais comme nous avons trouvé

$$P_{\frac{n+1}{2}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}-\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2-h^2}},$$

$$Q_{\frac{n+1}{2}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{2},$$

et que

$$e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}=1+\frac{s}{2x^{n+1}}+\frac{s^2}{8x^{2n+2}}+\ldots\ldots\ldots,$$

cette équation devient

$$lim.\left[\left(1+\frac{s}{2x^{n+1}}+\frac{s^2}{8x^{2n+2}}+\ldots\ldots-\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}-\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\right)\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2-h^2}}\right]_{x=\infty}=0.$$

D'où, en remarquant que

$$1-\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}-\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{2h^{n+1}}{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{n+1}+h^{n+1}},$$

$$lim.\left[\left(\frac{s^2}{8x^{2n+2}}+\ldots\ldots\right)\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2-h^2}}\right]_{x=\infty}=0,$$

$$lim.\left[\frac{s}{2x^{n+1}}\,\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2-h^2}}\right]_{x=\infty}=\frac{s}{2},$$

on obtient

$$\frac{s}{2}+lim.\left(\frac{2h^{n+1}}{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{n+1}+h^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2-h^2}}\right)_{x=\infty}=0,$$

et comme l'expression

$$\frac{2h^{n+1}}{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{n+1}+h^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2-h^2}},$$

pour $x=\infty$, se réduit à $\frac{h^{n+1}}{2^n}$, il en résulte cette valeur de s:

$$s=-\frac{h^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Ainsi dans le cas de n impair et en prenant

$$a = -h,\ b = h,\ l = n,$$

on parvient directement aux valeurs des quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ldots\ \eta_n,$$

qui, d'après la formule (1), nous donnent

$$\int_{-h}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \int_{\eta_n}^{h} F(x)dx = sA_n.$$

Cas de n pair.

§ 19. Dans ce cas, en cherchant la valeur de

$$\frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}},$$

dernière réduite de la fraction continue, résultant de $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}$, avec le dénominateur $Q_{\frac{n}{2}}$ de degré inférieur à $\frac{n}{2}+1$, on peut prendre l'expression

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}$$

au lieu de

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}$$

qui n'en diffère que par les puissances de x, inférieures à $\frac{1}{x^n}$, et comme les termes des réduites de la fraction continue, résultant du développement de

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}},$$

s'expriment*) par les formules

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}},$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}},$$

*) Voyez notre Mémoire *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* (§ 57).

il en résulte pour $P_{\frac{n}{2}}$, $Q_{\frac{n}{2}}$ les valeurs suivantes:

$$P_{\frac{n}{2}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}},$$

$$Q_{\frac{n}{2}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}}.$$

En vertu de ces valeurs de $P_{\frac{n}{2}}$, $Q_{\frac{n}{2}}$, nous concluons, suivant le § 4, que les quantités cherchées

$$\eta_1,\ \eta_3,\ \ldots\ ,$$
$$\eta_2,\ \eta_4,\ \ldots\ .$$

sont les racines des équations

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}}=0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}}=0.$$

Pour résoudre ces équations, on fera, comme dans le cas précédent,

$$\frac{x}{h}=\cos\varphi,$$

d'après quoi elles deviennent

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}=0,\quad \frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}}=0,$$

ce qu'on vérifie, en prenant respectivement

$$\varphi=\frac{2l\pi}{n+1},\quad \varphi=\frac{(2k+1)\pi}{n+1},$$

où les nombres entiers l, $2k+1$ ne doivent pas être divisibles par $n+1$.

Les racines des équations que nous avons obtenues pour la détermination des quantités

$$\eta_1,\ \eta_3,\ \ldots\ldots,$$
$$\eta_2,\ \eta_4,\ \ldots\ldots,$$

s'expriment donc ainsi:

$$h\cos\frac{n\pi}{n+1},\ h\cos\frac{(n-2)\pi}{n+1},\ \ldots\ldots,h\cos\frac{2\pi}{n+1},$$
$$h\cos\frac{(n-1)\pi}{n+1},\ h\cos\frac{(n-3)\pi}{n+1},\ \ldots\ldots,h\cos\frac{\pi}{n+1},$$

et comme ces racines sont disposées par ordre de grandeur, elles sont respectivement égales à

$$\eta_1,\ \eta_3,\ \ldots\ldots,$$

$$\eta_2,\ \eta_4,\ \ldots\ldots$$

D'où l'on voit que les quantités

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4,\ \ldots\ldots$$

s'expriment par les mêmes formules que dans le cas de n impair.

§ 20. Pour trouver la quantité s, nous remarquerons que, d'après le § 5, elle doit remplir cette condition

$$lim.\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}-\frac{P_{\frac{n}{2}}}{Q_{\frac{n}{2}}}\right)x^{n+1}\right]_{x=\infty}=0.$$

Or, en substituant les valeurs trouvées de $P_{\frac{n}{2}}$, $Q_{\frac{n}{2}}$, et en développant $e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}$ en série, on a

$$lim.\left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{s}{2x^{n+1}}+\frac{s^2}{8x^{2n+2}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}\end{array}\right\}x^{n+1}\right]_{x=\infty}=0,$$

et comme

$$lim.\left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\left(1-\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}\right)x^{n+1}\right]_{x=\infty}=-\frac{h^{n+1}}{2^n},$$

$$lim.\left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\cdot\frac{s}{2x^{n+1}}x^{n+1}\right]_{x=\infty}=\frac{s}{2},$$

$$lim.\left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\left(\frac{s^2}{8x^{2n+2}}+\ldots\ldots\right)x^{n+1}\right]_{x=\infty}=0,$$

il en résulte

$$s=\frac{h^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Cette expression de s ne diffère de celle du cas de n impair que par son signe. Or il est aisé de remarquer qu'on embrassera ces deux cas, en introduisant dans la

valeur de s le facteur $(-1)^n$ qui se réduit à $+1$ ou -1, suivant que n est pair ou impair. Ainsi on obtient pour s cette expression:

$$s = (-1)^n \frac{h^{n+1}}{2^{n-1}}$$

qui subsistera pour toutes les valeurs de n.

IV.

§ 21. Bien que le problème actuel ne se présente point dans la pratique, où les valeurs connues de la fonction cherchée ne sont jamais en nombre infini, les formules que nous avons trouvées, en partant de cette hypothèse, sont d'une application utile, comme nous allons le montrer.

Tant qu'on connait la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n,$$

pour toutes les valeurs de x, depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_i$, et qu'on les considère comme équidistantes et infiniment rapprochées, on parvient à tirer, par la seule voie d'addition et de soustraction, les valeurs des coefficients $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$, pourvus de facteurs aussi grands que possible. Ces expressions qui déterminent les coeffients

$$A_0,\ A_1, \ldots\ldots A_n$$

seront représentées, comme nous l'avons vu (§ 1), par la formule

$$\int_{x_1}^{x_{i1}} F(x)dx - \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} F(x)dx + \ldots\ldots + (-1)^v \int_{x_{iv}}^{x_i} F(x)dx.$$

D'après cela toute la difficulté de la détermination des coefficients

$$A_0,\ A_1, \ldots\ldots A_n$$

se réduit à l'évaluation des intégrales

$$\int_{x_1}^{x_{i1}} F(x)dx,\ \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} F(x)dx, \ldots\ldots \int_{x_{iv}}^{x_i} F(x)dx.$$

Or, comme ces intégrales, avec une approximation plus ou moins grande, peuvent être évaluées au moyen d'un nombre limité des valeurs de $F(x)$, il est facile de comprendre qu'on peut bien profiter de ces expressions déterminant les coefficients de

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n,$$

tant qu'on a un nombre suffisant de valeurs de $F(x)$, à l'aide desquelles les intégrales

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx\,,\quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx,\ldots\ldots\quad \int_{\eta_\nu}^{x_i} F(x)dx$$

sont évaluables avec une approximation suffisante.

§ 22. Quant à l'évaluation des intégrales

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx,\quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx,\ldots\ldots\quad \int_{\eta_\nu}^{x_i} F(x)dx,$$

qu'on aura à faire dans les applications de nos formules, cela ne présente aucune difficulté. Pour y parvenir plus aisément, on n'a qu'à remarquer que les intégrales

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx,\quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx,\ldots\ldots\quad \int_{\eta_\nu}^{x_i} F(x)dx$$

désignent respectivement les aires de la courbe

$$y = F(x),$$

comprises entre $x = x_1$ et $x = \eta_1$, $x = \eta_1$ et $x = \eta_2, \ldots\ldots x = \eta_\nu$ et $x = x_i$, et que chacune des valeurs données de $F(x)$ détermine l'un des points de cette courbe. Ainsi l'évaluation des intégrales en question se réduit à ce problème de géométrie:

Etant donnée une suite de points, déterminer pour la courbe, passant par ces points, les aires comprises entre des limites données.

Or un tel problème est susceptible d'une solution approchée, qu'on trouve aisément. Si l'on a la représentation graphique de la courbe

$$y = F(x),$$

construite d'après les valeurs connues de $F(x)$, on trouvera ces aires directement à l'aide du planimètre. Dans le cas contraire, on pourra trouver ces aires à l'aide d'un calcul très simple, en prenant pour la courbe le polygone déterminé par les points donnés. Ainsi, en supposant que les valeurs connues de $F(x)$ sont

$$F(x_1),\ F(x_2),\ldots\ldots F(x_\sigma),\ F(x_{\sigma+1}),\ldots\ldots F(x_\tau),\ F(x_{\tau+1}),\ldots\ldots,$$

et que les quantités

$$x = x_0,\ x = X$$

sont comprises respectivement entre x_σ et $x_{\sigma+1}$, x_τ et $x_{\tau+1}$, on trouve que l'aire de la courbe

$$y = F(x),$$

entre $x = x_0$ et $x = X$, s'exprime approximativement par cette formule très simple:

$$(13)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{(x_{\sigma+1}-x_0)^2F(x_\sigma)-(x_\sigma-x_0)^2F(x_{\sigma+1})}{2(x_{\sigma+1}-x_\sigma)}+\frac{1}{2}(x_{\sigma+2}-x_\sigma)F(x_{\sigma+1})+\frac{1}{2}(x_{\sigma+3}-x_{\sigma+1})F(x_{\sigma+2})\\ +\ldots\ldots+\frac{1}{2}(x_{\tau+1}-x_{\tau-1})F(x_\tau)-\frac{(x_{\tau+1}-X)^2F(x_\tau)-(x_\tau-X)^2F(x_{\tau+1})}{2(x_{\tau+1}-x_\tau)}.\end{array}\right.$$

Pour donner une idée nette du degré de précision de cette formule, remarquons que la différence entre l'aire de la courbe et celle du polygone, entre les limites $x = x_0$ et $x = X$, est égale à

$$(14)\ldots-\frac{N}{12}\left[\begin{array}{l}(x_{\sigma+1}-x_\sigma)^3+(x_{\sigma+2}-x_{\sigma+1})^3+\ldots\ldots+(x_\tau-x_{\tau-1})^3\\ +(X-x_\tau)^2(3x_{\tau+1}-x_\tau-2X)-(x_0-x_\sigma)^2(3x_{\sigma+1}-x_\sigma-2x_0)\end{array}\right],$$

N étant une moyenne des valeurs de $\frac{d^2F(x)}{dx^2}$ entre $x = x_0$ et $x = X$.

§ 23. Avec la formule (13) que nous venons de mentionner, on trouve aisément la valeur approchée des expressions de la forme

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx-\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx+\ldots\ldots+(-1)^\upsilon\int_{\eta_\upsilon}^{x_i} F(x)dx,$$

d'après les valeurs connues de $F(x)$

$$F(x_1),\ F(x_2),\ldots\ldots F(x_i).$$

Pour y parvenir on commencera par chercher dans la suite

$$x_1,\ x_2,\ldots\ldots x_i$$

les couples des termes qui sont respectivement les plus proches des quantités

$$\eta_{i1},\ \eta_{i2},\ \eta_{i3},\ldots\ldots\eta_{i\upsilon-1},\ \eta_{i\upsilon}.$$

En désignant ces termes par

$$x_{i'},\ x_{i'+1},\ x_{i''},\ x_{i''+1},\ x_{i'''},\ x_{i'''+1},\ldots\ldots\ x_{i^{(\upsilon+1)}},\ x_{i^{(\upsilon-1)}+1},\ x_{i^{(\upsilon)}},\ x_{i^{(\upsilon)}+1},$$

on trouvera que les quantités

$$x_1,\ \eta_{i1},\ \eta_{i2},\ldots\ldots\eta_{i\upsilon},\ x_i$$

sont comprises respectivement entre x_1 et x_2, $x_{i'}$ et $x_{i'+1}$, $x_{i''}$ et $x_{i''+1}$, $x_{i'''}$, $x_{i'''+1}$, ..., $x_{i^{(\upsilon-1)}}$, $x_{i^{(\upsilon-1)}+1}$, $x_{i^{(\upsilon)}}$ et $x_{i^{(\upsilon)}+1}$, x_{i-1} et x_i. D'après cela, en posant successivement dans la formule (13)

$$x_0=x_1,\ X=\eta_1,\ x_\sigma=x_1,\ x_{\sigma+1}=x_2,\ x_\tau=x_{i'},\ x_{\tau+1}=x_{i'+1},$$

$$x_0=\eta_1,\ X=\eta_2,\ x_\sigma=x_{i'},\ x_{\sigma+1}=x_{i'+1},\ x_\tau=x_{i''},\ x_{\tau+1}=x_{i''+1},$$

$$x_0=\eta_2,\ X=\eta_3,\ x_\sigma=x_{i''},\ x_{\tau+1}=x_{i''+1},\ x_\tau=x_{i'''},\ x_{\tau+1}=x_{i'''+1},$$

....

$$x_0=\eta_{\upsilon-1},\ X=\eta_\upsilon,\ x_\sigma=x_{i^{(\upsilon-1)}},\ x_{\sigma+1}=x_{i^{(\upsilon-1)}+1},\ x_\tau=x_{i^{(\upsilon)}},\ x_{\tau+1}=x_{i^{(\upsilon)}+1},$$

$$x_0=\eta_\upsilon,\ X=x_i,\ x_\sigma=x_{i^{(\upsilon)}},\ x_{\sigma+1}=x_{i^{(\upsilon)}+1},\ x_\tau=x_{i-1},\ x_{\tau+1}=x_i,$$

on obtient, pour les aires de la courbe

$$y=F(x)$$

entre $x=x_1$ et $x=\eta_1$, $x=\eta_1$ et $x=\eta_2$, $x=\eta_2$ et $x=\eta_3$, ..., $x=\eta_{\upsilon-1}$ et $x=\eta_\upsilon$, $x=\eta_\upsilon$ et $x=X$, et conséquemment pour les intégrales

$$\int_x^{\eta_1} F(x)dx,\ \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx,\ \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx,\ .....\ \int_{\eta_{\upsilon-1}}^{\eta_\upsilon} F(x)dx,\ \int_{\eta_\upsilon}^{x_i} F(x)dx,$$

les expressions approchées suivantes:

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx=\tfrac{1}{2}(x_2-x_1)F(x_1)+\tfrac{1}{2}(x_3-x_1)F(x_2)+\tfrac{1}{2}(x_4-x_2)F(x_3)+\ ....\ +\tfrac{1}{2}(x_{i'+1}-x_{i'-1})F(x_{i'})$$
$$-\frac{(x_{i'+1}-\eta_1)^2F(x_{i'})-(x_{i'}-\eta_1)^2F(x_{i'+1})}{2(x_{i'+1}-x_{i'})},$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx=\frac{(x_{i'+1}-\eta_1)^2F(x_{i'})-(x_{i'}-\eta_1)^2F(x_{i'+1})}{2(x_{i'+1}-x_{i'})}+\tfrac{1}{2}(x_{i'+2}-x_{i'})F(x_{i'+1})+\tfrac{1}{2}(x_{i'+3}-x_{i'+1})F(x_{i'+2})$$
$$+\ ......\ +\tfrac{1}{2}(x_{i''+1}-x_{i''-1})F(x_{i''})-\frac{(x_{i''+1}-\eta_2)^2F(x_{i''})-(x_{i''}-\eta_2)^2F(x_{i''+1})}{2(x_{i''+1}-x_{i''})},$$

$$\int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx=\frac{(x_{i''+1}-\eta_2)^2F(x_{i''})-(x_{i''}-\eta_2)^2F(x_{i''+1})}{2(x_{i''+1}-x_{i''})}+\tfrac{1}{2}(x_{i''+2}-x_{i''})F(x_{i''+1})+\tfrac{1}{2}(x_{i''+3}-x_{i''+1})F(x_{i''+2})$$
$$+\ ......\ +\tfrac{1}{2}(x_{i'''+1}-x_{i'''-1})F(x_{i'''})-\frac{(x_{i'''+1}-\eta_3)^2F(x_{i'''})-(x_{i'''}-\eta_3)^2F(x_{i'''+1})}{2(x_{i'''+1}-x_{i'''})},$$

....

$$\int_{\eta_{\upsilon-1}}^{\eta_\upsilon} F(x)dx=\frac{(x_{i^{(\upsilon-1)}+1}-\eta_{\upsilon-1})^2F(x_{i^{(\upsilon-1)}})-(x_{i^{(\upsilon-1)}}-\eta_{\upsilon-1})^2F(x_{i^{(\upsilon-1)}+1})}{2(x_{i^{(\upsilon-1)}+1}-x_{i^{(\upsilon-1)}})}+\ ....$$
$$........\ +\tfrac{1}{2}(x_{i^{(\upsilon)}+1}-x_{i^{(\upsilon)}-1})F(x_{i^{(\upsilon)}})-\frac{(x_{i^{(\upsilon)}+1}-\eta_\upsilon)^2F(x_{i^{(\upsilon)}})-(x_{i^{(\upsilon)}}-\eta_\upsilon)^2F(x_{i^{(\upsilon)}+1})}{2(x_{i^{(\upsilon)}+1}-x_{i^{(\upsilon)}})},$$

$$\int_{\eta_0}^{x_i} F(x)dx = \frac{(x_{i^{(0)}+1}-\eta_0)^2F(x_{i^{(0)}})-(x_{i^{(0)}}-\eta_0)^2F(x_{i^{(0)}+1})}{2(x_{i^{(0)}+1}-x_{i^{(0)}})} + \frac{1}{2}(x_{i^{(0)}+2}-x_{i^{(0)}})F(x_{i^{(0)}+1}) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2}(x_i-x_{i-2})F(x_{i-1}) + \frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})F(x_i).$$

D'où, en faisant pour abréger,

$$M_1=(x_2-x_1)F(x_1),\ M_2=(x_3-x_1)F(x_2),\ M_3=(x_4-x_2)F(x_3),\ldots\ldots$$
$$M_{i-1}=(x_i-x_{i-2})F(x_{i-1}),\ M_i=(x_i-x_{i-1})F(x_i),$$

on a

$$(15)\ldots\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots(-1)^{\upsilon}\int_{\eta_{\upsilon-1}}^{\eta_\upsilon} F(x)dx + (-1)^{\upsilon}\int_{\eta_\upsilon}^{x_i} F(x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} M_1+M_2+\ldots\ldots+M_{i'}-M_{i'+1}-M_{i'+2}-\ldots-M_{i''}+M_{i''+1}+\ldots+M_{i'''}-M_{i'''+1}-\ldots\ldots \\ \ldots\ldots-(-1)^{\upsilon}M_{i^{(\upsilon-1)}+1}-\ldots\ldots-(-1)^{\upsilon}M_{i^{(\upsilon)}}+(-1)^{\upsilon}M_{i^{(\upsilon)}+1}+\ldots\ldots+(-1)^{\upsilon}M_i \end{array}\right\}$$
$$-\frac{(x_{i'+1}-\eta_1)^2F(x_{i'})-(x_{i'}-\eta_1)^2F(x_{i'+1})}{x_{i'+1}-x_{i'}} + \frac{(x_{i''+1}-\eta_2)^2F(x_{i''})-(x_{i''}-\eta_2)^2F(x_{i''+1})}{x_{i''+1}-x_{i''}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{\upsilon}\frac{(x_{i^{(\upsilon)}+1}-\eta_\upsilon)^2F(x_{i^{(\upsilon)}})-(x_{i^{(\upsilon)}}-\eta_\upsilon)^2F(x_{i^{(\upsilon)}+1})}{x_{i^{(\upsilon)}+1}-x_{i^{(\upsilon)}}}.$$

C'est ainsi qu'on aura les valeurs approchées des expressions de la forme

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots(-1)^{\upsilon}\int_{\eta_{\upsilon-1}}^{\eta_\upsilon} F(x)dx + (-1)^{\upsilon}\int_{\eta_\upsilon}^{x_i} F(x)dx$$

qui déterminent tous les coefficients de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1x + \ldots\ldots + A_nx^n.$$

§ 24. En vertu de ce que nous avons vu, d'une part, sur la détermination des coefficients de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1x + \ldots\ldots + A_nx^n$$

par des équations de la forme

$$sA_l = \int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^{\upsilon}\int_{\eta_\upsilon}^{x_i} F(x)dx,$$

et de l'autre, sur l'évaluation approchée de l'expression

$$\int_{x_1}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^{\upsilon}\int_{\eta_\upsilon}^{x_i} F(x)dx$$

d'après les valeurs connues de $F(x)$

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ldots,F(x_i),$$

tous les coefficients de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n$$

seront donnés par la même formule

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} sA_l = \frac{1}{2}\Big[M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \ldots\ldots - M_{i''} + M_{i''+1} + \ldots\ldots + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \ldots\ldots \\ \quad - \ldots\ldots - (-1)^{\upsilon} M_{i^{(\upsilon-1)}+1} - \ldots\ldots - (-1)^{\upsilon} M_{i^{(\upsilon)}} + (-1)^{\upsilon} M_{i^{(\upsilon)}+1} + \ldots\ldots + (-1)^{\upsilon} M_i\Big] \\ \quad - \frac{(x_{i'+1}-\eta_1)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'}-\eta_1)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1}-x_{i'}} + \frac{(x_{i''+1}-\eta_2)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''}-\eta_2)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1}-x_{i''}} \\ \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\upsilon} \frac{(x_{i^{(\upsilon)}+1}-\eta_\upsilon)^2 F(x_{i^{(\upsilon)}}) - (x_{i^{(\upsilon)}}-\eta_\upsilon)^2 F(x_{i^{(\upsilon)}+1})}{x_{i^{(\upsilon)}+1} - x_{i^{(\upsilon)}}}, \end{array} \right.$$

en prenant pour

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ldots \eta_\upsilon$$

les valeurs qu'on obtient dans les suppositions de

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots n,$$

et pour

les termes de la suite

$$x_{i'},\ x_{i'+1},\ x_{i''},\ x_{i''},\ \ldots\ldots x_{i^{(\upsilon)}},\ x_{i^{(\upsilon)}+1}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots x_i$$

les plus proches respectivement de

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ldots \eta_\upsilon.$$

§ 25. A l'aide de la méthode, donnée dans les §§ 4, 5, 6, on trouvera toujours les quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ldots \eta_\upsilon$$

qui entrent dans la formule (16).

Mais dans les cas ordinaires de la pratique, où la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n$$

reste de degré inférieur à 6, on peut, avec le secours de la table, jointe à notre Mémoire, s'épargner la peine de chercher ces quantités.

Cette table contient les solutions de notre problème dans les cas de

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

et en prenant pour limites de x les valeurs

$$-h, \quad +h.$$

Donc, toutes les fois que, dans la suite des valeurs données de $F(x)$

$$F(x_1), \; F(x_2), \ldots\ldots F(x_i),$$

on aura

$$x_1 = -x_i,$$

et que n, dans l'expression de

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n,$$

ne surpassera pas 5, les quantités

$$s, \; \eta_{i_1}, \; \eta_{i_2}, \ldots\ldots \eta_{i_\nu}$$

pourront être déterminées par notre table, en prenant

$$h = x_i.$$

De plus, il n'est pas difficile de remarquer que si l'on cherche, au moyen de notre formule (16), les coefficients du développement de $F(x)$ suivant les puissances de

$$x - \tfrac{x_1 + x_i}{2},$$

quellesque soient les valeurs de x_i et x_1, les quantités

$$s, \; \eta_{i_1}, \; \eta_{i_2}, \ldots\ldots \eta_{i_\nu},$$

dans les cas de

$$n = 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5,$$

seront aussi données par cette table, et que pour cela on doit prendre

$$h = \tfrac{x_i - x_1}{2}.$$

En effet, si l'on pose

$$x - \tfrac{x_1 + x_i}{2} = X,$$

et que l'on cherche, d'après (16), les coefficients de la fonction

$$F(x) = F\left(\tfrac{x_1 + x_i}{2} + X\right) = K_0 + K_1 X + \ldots\ldots + K_n X^n,$$

en supposant connuées ses valeurs pour

$$X = X_1, \; X_2, \ldots\ldots X_i,$$

correspondantes à celles de

$$x = x_1, \; x_2 \ldots\ldots x_i,$$

on trouve, pour la détermination des coefficients

$$K_0, \; K_1, \ldots\ldots K_n,$$

ce système de formules:

$$(17)\ldots sK_i=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} M_1+M_2+\ldots+M_{i'}-M_{i'+1}-M_{i'+2}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-M_{i''} \\ +M_{i''+1}+\ldots+M_{i'''}-M_{i'''+1}-\ldots+(-1)^{\nu}M_{i^{(\nu)}+1}+\ldots+(-1)^{\nu}M_i \end{array}\right\}$$

$$-\frac{\left(X_{i'+1}-\eta_1\right)^2F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i'}\right)-\left(X_{i'}-\eta_1\right)^2F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i'+1}\right)}{X_{i'+1}-X_{i'}}$$

$$+\frac{\left(X_{i''+1}-\eta_2\right)^2F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i''}\right)-\left(X_{i''}-\eta_2\right)^2F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i''+1}\right)}{X_{i''+1}-X_{i''}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(-1)^{\nu}\frac{\left(X_{i^{(\nu)}+1}-\eta_\nu\right)^2F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i^{(\nu)}}\right)-\left(X_{i^{(\nu)}}-\eta_\nu\right)^2F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i^{(\nu)}+1}\right)}{X_{i^{(\nu)}+1}-X_{i^{(\nu)}}},$$

$$M_1=\left(X_2-X_1\right)F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_1\right),\ M_2=\left(X_3-X_1\right)F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_2\right),\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{i-1}=\left(X_i-X_{i-2}\right)F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_{i-1}\right),\ M_i=\left(X_i-X_{i-1}\right)F\left(\frac{x_1+x_i}{2}+X_i\right),$$

où les quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots\ldots\eta_\nu$$

seront déterminées, en prenant pour les valeurs limites de X celles-ci:

$$X=X_1,\ X=X_i.$$

Or, comme ces quantités, en vertu de l'équation

$$X=x-\frac{x_1+x_i}{2},$$

se réduisent, au signe près, à

$$\frac{x_i-x_1}{2},$$

on voit que, dans le cas de

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

ces solutions seront données par notre table, en prenant

$$h=\frac{x_i-x_1}{2}.$$

Quant au cas de $n>5$, suivant ce que nous venons de voir, on trouvera, pour ces valeurs de n, les quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ldots\ldots\eta_\nu$$

de la formule (1), à l'aide de la méthode générale, en prenant les limites de x au signe près égales, ce qui entraine beaucoup de simplification dans la recherche de ces quantités.

Remarquons encore que si l'on remplace la variable

$$X$$

par la valeur

$$x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

les formules que nous venons de trouver pour la détermination des coefficients $K_0, K_1, \ldots K_n$, dans le développement de $F(x)$ suivant les puissances de

$$X = x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

deviennent

$$(18) \ldots . sK_l = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} M_1 + M_2 + \ldots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - M_{i''} \\ + M_{i''+1} + \ldots + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \ldots + (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)}+1} + \ldots + (-1)^{\nu} M_i \end{array} \right\}$$

$$- \frac{\left(x_{i'+1} - \eta_1 - \frac{x_1 + x_i}{2}\right)^2 F(x_{i'}) - \left(x_{i'} - \eta_1 - \frac{x_1 + x_i}{2}\right)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1} - x_{i'}}$$

$$+ \frac{\left(x_{i''+1} - \eta_2 - \frac{x_1 + x_i}{2}\right)^2 F(x_{i''}) - \left(x_{i''} - \eta_2 - \frac{x_1 + x_i}{2}\right)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1} - x_{i''}}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\nu} \frac{\left(x_{i^{(\nu)}+1} - \eta_\nu - \frac{x_1 + x_i}{2}\right)^2 F(x_{i^{(\nu)}}) - \left(x_{i^{(\nu)}} - \eta_\nu - \frac{x_1 + x_i}{2}\right)^2 F(x_{i^{(\nu)}+1})}{x_{i^{(\nu)}+1} - x_{i^{(\nu)}}},$$

$$M_1 = (x_2 - x_1) F(x_1), \quad M_2 = (x_3 - x_1) F(x_2), \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$M_{i-1} = (x_i - x_{i-2}) F(x_{i-1}), \quad M_i = (x_i - x_{i-1}) F(x_i).$$

Dans la formule (17) les quantités

$$X_i, \ X_{i'+1}, \ X_{i''}, \ X_{i'''+1}, \ldots\ldots\ldots X_{i^{(\nu)}}, \ X_{i^{(\nu)}+1}$$

étant celles de la suite

$$X_1, \ X_1, \ldots\ldots\ldots X_i$$

qui s'approchent le plus de

$$\eta_1, \ \eta_2, \ldots\ldots \eta_\nu,$$

on voit, d'aprés l'équation

$$X = x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

*

qu'on trouvera les quantités

$$x_i,\ x_{i+1},\ x_i',\ x_{i+1}',\ \ldots\ldots,\ x_i^{(\nu)},\ x_{i+1}^{(\nu)}$$

de la formule (18), en cherchant dans la suite

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots x_i$$

les couples des termes respectivement les plus proches de

$$\eta_1 + \frac{x_1+x_i}{2},\ \eta_2 + \frac{x_1+x_i}{2},\ \ldots\ldots \eta_\nu + \frac{x_1+x_i}{2}.$$

§ 26. Comme les quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ldots \eta_\nu,$$

comprises dans la formule (18), pour les cas les plus ordinaires de la pratique

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

se trouvent immédiatement par notre table, en prenant $h = \frac{x_i - x_1}{2}$, et que cette table, à l'aide de la méthode donnée dans les §§ 4, 5, 6, peut être facilement étendue jusqu'à la limite plus considérable et au delà des valeurs de n dont la pratique a besoin, la formule (18), déteminant les coefficients du développement de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n,$$

suivant les puissances de

$$x - \frac{x_1+x_i}{2},$$

est très commode pour la recherche de son expression d'après ses valeurs connues

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ldots F(x_i).$$

Cette formule ne donne l'expression de la fonction $F(x)$ qu'approximativement, à cause des erreurs qu'on commet dans les recherches des intégrales, en remplaçant la courbe par un polygone. Mais ces erreurs, à mesure que le nombre des valeurs données de $F(x)$ augmente, convergent très rapidement vers zéro, et d'après ce que nous avons vu (§ 22), on pourra, dans chaque particulier, assigner leur limite. Tant que les valeurs connues de $F(x)$ seront en nombre considérable et qu'elles sont déterminées par les observations, le plus souvent ces erreurs seront au dessous de celles qui sont dues aux observations elles mêmes. Dans ces cas notre formule, sans contredit, est très propre à la recherche de l'expression approchée de la fonction $F(x)$, vu qu'elle détermine séparément tous les coefficients du développement de $F(x)$ suivant les puissances de

$$x - \frac{x_1+x_i}{2},$$

et n'exige que des calculs très simples.

L'usage de cette formule est d'autant plus expéditif que la plupart de ses termes et les seuls dont le nombre croisse avec celui des valeurs données de $F(x)$, savoir:

$$M_1,\ M_2, \ldots\ldots M_i,$$

restent, au signe près, les mêmes dans la détermination de tous les coefficients cherchés

$$K_0,\ K_1, \ldots\ldots K_n,$$

et que les autres termes ne sont jamais en nombre supérieur au degré de $F(x)$, ordinairement peu élevé. Quant à l'évaluation de tous ces termes, sous le rapport de la simplicité, elle ne laisse rien à désirer. Mais, comme nous l'avons remarqué plus haut (§ 22), on pourra, à l'aide du planimètre, s'épargner tout-à-fait la peine de faire ces calculs, tant qu'on aura la représentation graphique de la fonction cherchée, et alors, d'après nos formules, on trouvera son expression sous la forme

$$A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n$$

avec une extrême facilité.

V.

§ 27. Pour montrer sur un exemple l'application de la formule (18), nous chercherons l'expression des changements de volume de l'eau à différentes temperatures, entre $t = 0°$ et $t = 25°$, d'après les observations qu'on trouve dans le Mémoire de M. Kopp (Annalen der Physik und Chemie, von J. C. Poggendorf, 20. Band, page 45) et dont les résultats peuvent etre présentés ainsi:

m	x_m	$F(x_m)$	m	x_m	$F(x_m)$
1	0	0,000000	16	13,5	0,000480
2	0,9	— 0,000022	17	13,8	0,000568
3	1,6	— 0,000098	18	15,0	0,000706
4	2,1	— 0,000077	19	15,6	0,000841
5	5,2	— 0,000115	20	16,3	0,000927
6	5,6	— 0,000135	21	17,4	0,001057
7	6,1	— 0,000094	22	18,6	0,001256
8	6,3	— 0,000101	23	18,6	0,001298
9	7,2	— 0,000047	24	19,2	0,001419
10	8,5	— 0,000006	25	19,8	0,001496
11	8,6	0,000007	26	21,2	0,001805
12	9,1	0,000081	27	21,8	0,001989
13	11,2	0,000215	28	22,2	0,002043
14	11,9	0,000317	29	24,0	0,002421
15	12,7	0,000352	30	24,5	0,002618

où par x_m nous désignons des températures et par $F(x_m)$ des changements d'une unité du volume de l'eau à différentes températures au dessus de zéro.

Nous chercherons l'expression de $F(x)$ par la formule

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3,$$

et pour cela nous prendrons

$$n = 3.$$

D'autre part, comme dans la suite des valeurs connues de $F(x)$ les limites de x sont

$$x_1 = 0, \quad x_{30} = 24{,}5,$$

on aura, suivant notre notation,

$$x_1 = 0, \quad x_i = 24{,}5, \quad i = 30,$$

et par là

$$h = \frac{x_i - x_1}{2} = \frac{24{,}5 - 0}{2} = 12{,}25,$$

$$\frac{x_1 + x_i}{2} = \frac{0 + 24{,}5}{2} = 12{,}25.$$

D'après cela, en mettant la fonction $F(x)$ sous la forme

$$K_0 + K_1(x - 12{,}25) + K_2(x - 12{,}25)^2 + K_3(x - 12{,}25)^3,$$

et en cherchant ses coefficients

$$K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

au moyen de notre formule (18), on a

$$(19)\ldots sK_l = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} M_1 + M_2 + \ldots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - M_{i''} \\ + M_{i''+1} + \ldots + M_{i''} - M_{i''+1} - \ldots + (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)}+1} + \ldots + (-1)^{\nu} M_{30} \end{array}\right\}$$

$$- \frac{(x_{i'+1} - \eta_1 - 12{,}25)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'} - \eta_1 - 12{,}25)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1} - x_{i'}}$$

$$+ \frac{(x_{i''+1} - \eta_2 - 12{,}25)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''} - \eta_2 - 12{,}25)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1} - x_{i''}}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\nu} \frac{(x_{i^{(\nu)}+1} - \eta_\nu - 12{,}25)^2 F(x_{i^{(\nu)}}) - (x_{i^{(\nu)}} - \eta_\nu - 12{,}25)^2 F(x_{i^{(\nu)}+1})}{x_{i^{(\nu)}+1} - x_{i^{(\nu)}}},$$

où les quantités

$$s, \ \nu, \ \eta_1, \ \eta_2, \ldots\ldots \eta_\nu$$

se trouvent par la table, jointe à notre Mémoire, en prenant

$$n = 3,\ h = 12{,}25,$$

ce qui nous donne ce système des valeurs de $s, \nu, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\nu$, correspondantes à $l = 0, 1, 2, 3$:

$$l = \mathbf{0}.$$

$$\begin{aligned} s &= -1{,}17480 \,.\, 12{,}25 = -14{,}3913; \\ \upsilon &= 2; \\ \eta_1 &= -0{,}79370 \,.\, 12{,}25 = -9{,}7228; \\ \eta_2 &= 0{,}79370 \,.\, 12{,}25 = 9{,}7228. \end{aligned}$$

$$l = \mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned} s &= 0{,}41421 \,.\, 12{,}25^2 = 62{,}1579; \\ \upsilon &= 3; \\ \eta_1 &= -0{,}84090 \,.\, 12{,}25 = -10{,}3010; \\ \eta_2 &= 0; \\ \eta_3 &= 0{,}84090 \,.\, 12{,}25 = 10{,}3010. \end{aligned}$$

$$l = \mathbf{2}.$$

$$\begin{aligned} s &= 0{,}5 \,.\, 12{,}25^3 = 919{,}13; \\ \upsilon &= 2; \\ \eta_1 &= -0{,}5 \,.\, 12{,}25 = -6{,}125; \\ \eta_2 &= 0{,}5 \,.\, 12{,}25 = 6{,}125. \end{aligned}$$

$$l = \mathbf{3}.$$

$$\begin{aligned} s &= -0{,}25 \,.\, 12{,}25^4 = -5629{,}7; \\ \upsilon &= 3; \\ \eta_1 &= -0{,}70711 \,.\, 12{,}25 = -8{,}6620; \\ \eta_2 &= 0; \\ \eta_3 &= 0{,}70711 \,.\, 12{,}25 = 8{,}6620. \end{aligned}$$

En vertu de cela et en remarquant que, d'après notre notation,

$$x_{i'}, x_{i'+1}, x_{i''}, x_{i''+1}, \ldots\ldots x_{i^{(\upsilon)}}, x_{i^{(\upsilon)}+1}$$

désignent les couples des valeurs qui, dans la suite

$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_i,$$

sont respectivement les plus proches des quantités

$$\eta_1 + 12{,}25\,,\ \eta_2 + 12{,}25\,, \ldots\ldots \eta_\nu + 12{,}25\,,$$

on tire aisément de la formule (19) les équations qui déterminent séparément chacun des coefficients

$$K_0, K_1, K_2, K_3$$

de la fonction cherchée

$$F(x) = K_0 + K_1(x-12{,}25) + K_2(x-12{,}25)^2 + K_3(x-12{,}25)^3.$$

§ 28. Pour déterminer le coefficient K_0, on prendra

$$l = 0,$$

et on aura

$$s = -14{,}3913,\ \upsilon = 2,\ \eta_1 = -9{,}7228,\ \eta_{12} = 9{,}7228.$$

Comme dans la colonne des valeurs de x_m (§ 27), les plus proches de

$$\eta_1 + 12{,}25 = -9{,}7228 + 12{,}25 = 2{,}5272,$$

$$\eta_2 + 12{,}25 = 9{,}7228 + 12{,}25 = 21{,}9728$$

sont

$$x_4 = 2{,}1\ ,\ x_5 = 5{,}2\ ,\ x_{27} = 21{,}8\ ,\ x_{28} = 22{,}2\ ,$$

on prendra, conformément à notre notation,

$$x_{i'} = x_4,\ x_{i'+1} = x_5,\ x_{i''} = x_{27},\ x_{i''+1} = x_{28},$$

$$i' = 4,\ i'' = 27.$$

Avec ces valeurs de

$$s,\ \upsilon,\ \eta_1,\ \eta_2,\ i',\ i'',$$

la formule (19) nous donne

$$-14{,}3913\,K_0 = \tfrac{1}{2}\Big[M_1 + M_2 + \ldots + M_4 - M_5 - \ldots - M_{27} + M_{28} + \ldots + M_{30}\Big]$$

$$- \frac{(x_5 - 2{,}5272)^2 F(x_4) - (x_4 - 2{,}5272)^2 F(x_5)}{x_5 - x_4}$$

$$+ \frac{(x_{28} - 21{,}9728)^2 F(x_{27}) - (x_{27} - 21{,}9728)^2 F(x_{28})}{x_{28} - x_{27}}.$$

En passant à la détermination du coefficient K_1, on fera

$$l = 1,$$

et comme pour cette valeur de l nous venons de trouver

$$s = 62{,}1579,\ \upsilon = 3\ ,\ \eta_1 = -10{,}3010\ ,\ \eta_2 = 0\ ,\ \eta_3 = 10{,}3010,$$

et que dans la colonne des valeurs de x_m les plus proches de

$$\eta_1 + 12{,}25 = -10{,}3010 + 12{,}25 = 1{,}9490,$$

$$\eta_2 + 12{,}25 = 0 + 12{,}25 = 12{,}25\ ,$$

$$\eta_3 + 12{,}25 = 10{,}3010 + 12{,}25 = 22{,}5510,$$

sont

$$x_3 = 1{,}6\,,\ x_4 = 2{,}1\,,\ x_{14} = 11{,}9\,,\ x_{15} = 12{,}7\,,\ x_{28} = 22{,}2\,,\ x_{29} = 24{,}0\,,$$

on aura, d'après notre notation,

$$i' = 3,\ i'' = 14,\ i''' = 28.$$

Alors, pour la détermination du coefficient K_1, la formule (19) nous fournit cette équation:

$$62{,}1579\,K_1 = \tfrac{1}{2}\Big[M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - \ldots - M_{14} + M_{15} + \ldots + M_{28} - M_{29} - M_{30}\Big]$$
$$- \frac{(x_4 - 1{,}9490)^2 F(x_3) - (x_3 - 1{,}9490)^2 F(x_4)}{x_4 - x_3}$$
$$+ \frac{(x_{15} - 12{,}25)^2 F(x_{14}) - (x_{14} - 12{,}25)^2 F(x_{15})}{x_{15} - x_{14}}$$
$$- \frac{(x_{29} - 22{,}5510)^2 F(x_{28}) - (x_{28} - 22{,}5510)^2 F(x_{29})}{x_{29} - x_{28}}.$$

En cherchant de la même manière l'équation qui détermine le coefficient K_2, on prendra

$$l = 2,$$

et on aura

$$s = 919{,}13,\ \upsilon = 2,\ \eta_1 = -6{,}125,\ \eta_2 = 6{,}125,$$
$$i' = 7,\ i'' = 21.$$

Pour ces valeurs de

$$l,\ s,\ \upsilon,\ \eta_1,\ \eta_2,\ i',\ i'',$$

la formule (19) devient

$$919{,}13\,K_2 = \tfrac{1}{2}\Big[M_1 + M_2 + \ldots + M_7 - M_8 - \ldots - M_{21} + M_{22} + \ldots + M_{30}\Big]$$
$$- \frac{(x_8 - 6{,}125)^2 F(x_7) - (x_7 - 6{,}125)^2 F(x_8)}{x_8 - x_7}$$
$$+ \frac{(x_{22} - 18{,}375)^2 F(x_{21}) - (x_{21} - 18{,}375)^2 F(x_{22})}{x_{22} - x_{21}}.$$

Enfin, pour la détermination de K_3, on fera

$$l = 3,$$

et on trouvera

$$s = -5629{,}7,\ \upsilon = 3,\ \eta_1 = -8{,}6620,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 8{,}6620,$$
$$i' = 4,\ i'' = 14,\ i''' = 25;$$

d'après quoi la formule (19) donne

$$-5629,7K_3 = \tfrac{1}{2}\Big[M_1 + M_2 + \ldots + M_4 - M_5 - \ldots - M_{14} + M_{15} + \ldots + M_{25} - M_{26} - \ldots - M_{30}\Big]$$
$$- \frac{(x_5 - 3,5880)^2 F(x_4) - (x_4 - 3,5880)^2 F(x_5)}{x_5 - x_4}$$
$$+ \frac{(x_{15} - 12,25)^2 F(x_{14}) - (x_{14} - 12,25)^2 F(x_{15})}{x_{15} - x_{14}}$$
$$- \frac{(x_{26} - 20,9120)^2 F(x_{25}) - (x_{25} - 20,9120)^2 F(x_{26})}{x_{26} - x_{25}}$$

Au moyen des formules que nous venons d'obtenir, on trouve aisément les coefficients de la fonction cherchée

$$F(x) = K_0 + K_1(x - 12,25) + K_2(x - 12,25)^2 + K_3(x - 12,25)^3,$$

comme nous allons le montrer.

§ 29. Pour trouver les valeurs de

$$M_1 = (x_2 - x_1)F(x_1),\ M_2 = (x_3 - x_1)F(x_2),\ M_3 = (x_4 - x_2)F(x_3), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots M_{i-1} = (x_i - x_{i-2})F(x_{i-1}),\ M_i = (x_i - x_{i-1})F(x_i),$$

on cherchera les différences

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= 0,9 - 0 = 0,9, & x_{17} - x_{15} &= 13,8 - 12,7 = 1,1,\\
x_3 - x_1 &= 1,6 - 0 = 1,6, & x_{18} - x_{16} &= 15,0 - 13,5 = 1,5,\\
x_4 - x_2 &= 2,1 - 0,9 = 1,2, & x_{19} - x_{17} &= 15,6 - 13,8 = 1,8,\\
x_5 - x_3 &= 5,2 - 1,6 = 3,6, & x_{20} - x_{18} &= 16,3 - 15,0 = 1,3,\\
x_6 - x_4 &= 5,6 - 2,1 = 3,5, & x_{21} - x_{19} &= 17,4 - 15,6 = 1,8,\\
x_7 - x_5 &= 6,1 - 5,2 = 0,9, & x_{22} - x_{20} &= 18,6 - 16,3 = 2,3,\\
x_8 - x_6 &= 6,3 - 5,6 = 0,7, & x_{23} - x_{21} &= 18,6 - 17,4 = 1,2,\\
x_9 - x_7 &= 7,2 - 6,1 = 1,1, & x_{24} - x_{22} &= 19,2 - 18,6 = 0,6,\\
x_{10} - x_8 &= 8,5 - 6,3 = 2,2, & x_{25} - x_{23} &= 19,8 - 18,6 = 1,2,\\
x_{11} - x_9 &= 8,6 - 7,2 = 1,4, & x_{26} - x_{24} &= 21,2 - 19,2 = 2,0,\\
x_{12} - x_{10} &= 9,1 - 8,5 = 0,6, & x_{27} - x_{25} &= 21,8 - 19,8 = 2,0,\\
x_{13} - x_{11} &= 11,2 - 8,6 = 2,6, & x_{28} - x_{26} &= 22,2 - 21,2 = 1,0,\\
x_{14} - x_{12} &= 11,9 - 9,1 = 2,8, & x_{29} - x_{27} &= 24,0 - 21,8 = 2,2,\\
x_{15} - x_{13} &= 12,7 - 11,2 = 1,5, & x_{30} - x_{28} &= 24,5 - 22,2 = 2,3,\\
x_{16} - x_{14} &= 13,5 - 11,9 = 1,6, & x_{30} - x_{29} &= 24,5 - 24,0 = 0,5.
\end{aligned}$$

En multipliant ces différences par les valeurs

$$F(x_1),\ F(x_2),\ldots\ldots F(x_{30}),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
M_1 &= \ \ 0{,}000000.0{,}9 = \ \ 0{,}000000,\\
M_2 &= -0{,}000022.1{,}6 = -0{,}000035,\\
M_3 &= -0{,}000098.1{,}2 = -0{,}000118,\\
M_4 &= -0{,}000077.3{,}6 = -0{,}000277,\\
M_5 &= -0{,}000115.3{,}5 = -0{,}000402,\\
M_6 &= -0{,}000135.0{,}9 = -0{,}000122,\\
M_7 &= -0{,}000094.0{,}7 = -0{,}000066,\\
M_8 &= -0{,}000101.1{,}1 = -0{,}000111,\\
M_9 &= -0{,}000047.2{,}2 = -0{,}000103,\\
M_{10} &= -0{,}000006.1{,}4 = -0{,}000008,\\
M_{11} &= \ \ 0{,}000007.0{,}6 = \ \ 0{,}000004,\\
M_{12} &= \ \ 0{,}000081.2{,}6 = \ \ 0{,}000210,\\
M_{13} &= \ \ 0{,}000215.2{,}8 = \ \ 0{,}000602,\\
M_{14} &= \ \ 0{,}000317.1{,}5 = \ \ 0{,}000475,\\
M_{15} &= \ \ 0{,}000352.1{,}6 = \ \ 0{,}000563,\\
M_{16} &= \ \ 0{,}000480.1{,}1 = \ \ 0{,}000528,\\
M_{17} &= \ \ 0{,}000568.1{,}5 = \ \ 0{,}000852,\\
M_{18} &= \ \ 0{,}000706.1{,}8 = \ \ 0{,}001271,\\
M_{19} &= \ \ 0{,}000841.1{,}3 = \ \ 0{,}001093,\\
M_{20} &= \ \ 0{,}000927.1{,}8 = \ \ 0{,}001668,\\
M_{21} &= \ \ 0{,}001057.2{,}3 = \ \ 0{,}002431,\\
M_{22} &= \ \ 0{,}001256.1{,}2 = \ \ 0{,}001507,\\
M_{23} &= \ \ 0{,}001298.0{,}6 = \ \ 0{,}000779,\\
M_{24} &= \ \ 0{,}001419.1{,}2 = \ \ 0{,}001703,\\
M_{25} &= \ \ 0{,}001496.2{,}0 = \ \ 0{,}002992,\\
M_{26} &= \ \ 0{,}001805.2{,}0 = \ \ 0{,}003610,\\
M_{27} &= \ \ 0{,}001989.1{,}0 = \ \ 0{,}001989,\\
M_{28} &= \ \ 0{,}002043.2{,}2 = \ \ 0{,}004495,\\
M_{29} &= \ \ 0{,}002421.2{,}3 = \ \ 0{,}005568,\\
M_{30} &= \ \ 0{,}002618.0{,}5 = \ \ 0{,}001309.
\end{aligned}$$

D'où l'on tire sur le champ les valeurs de toutes les combinaisons des quantités

$$M_1,\ M_2,\ldots\ldots M_{30}$$

que les expressions, déterminant les coefficients

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ K_3,$$

*

contiennent, savoir:

$$M_1+M_2+\ldots\ldots+M_4-M_5-\ldots\ldots-M_{27}+M_{28}+\ldots\ldots+M_{30}=-0{,}010523,$$

$$M_1+M_2+M_3-M_4-\ldots\ldots-M_{14}+M_{15}+\ldots\ldots+M_{28}-M_{29}-M_{30}=0{,}018249,$$

$$M_1+M_2+\ldots\ldots+M_7-M_8-\ldots\ldots-M_{21}+M_{22}+\ldots\ldots+M_{30}=0{,}013457,$$

$$M_1+M_2+\ldots+M_4-M_5-\ldots-M_{14}+M_{15}+\ldots+M_{25}-M_{26}-\ldots-M_{30}=-0{,}002493.$$

D'autre part, par la substitution des valeurs de

$$x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_{14},\ x_{15},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{25},\ x_{26},\ x_{28},\ x_{29},$$

$$F(x_3),\ F(x_4),\ F(x_5),\ F(x_6),\ F(x_7),\ F(x_8),\ F(x_{14}),\ F(x_{21}),\ F(x_{22}),\ F(x_{25}),\ F(x_{26}),\ F(x_{28}),\ F(x_{29}),$$

on a

$$\frac{(x_3-2{,}3272)^2F(x_4)-(x_4-2{,}3272)^2F(x_3)}{x_3-x_4}=\frac{-(3{,}2-2{,}3272)^2.0{,}000077+(2{,}1-2{,}3272)^2.0{,}000115}{3{,}2-2{,}1}$$

$$=-0{,}000170,$$

$$\frac{(x_{28}-21{,}9728)^2F(x_{27})-(x_{27}-21{,}9728)^2F(x_{28})}{x_{28}-x_{27}}=\frac{(22{,}2-21{,}9728)^2.0{,}001989-(21{,}8-21{,}9728).0{,}002043}{22{,}2-21{,}8}$$

$$=0{,}000103,$$

$$\frac{(x_4-1{,}9490)^2F(x_3)-(x_3-1{,}9490)^2F(x_4)}{x_4-x_3}=\frac{-(2{,}1-1{,}9490)^2.0{,}000098+(1{,}6-1{,}9490)^2.0{,}000077}{2{,}1-1{,}6}$$

$$=0{,}000014,$$

$$\frac{(x_{15}-12{,}25)^2F(x_{14})-(x_{14}-12{,}25)^2F(x_{15})}{x_{15}-x_{14}}=\frac{(12{,}7-12{,}25)^2.0{,}000317-(11{,}9-12{,}15)^2.0{,}000332}{12{,}7-11{,}9}$$

$$=0{,}000026,$$

$$\frac{(x_{29}-22{,}5510)^2F(x_{28})-(x_{28}-22{,}5510)^2F(x_{29})}{x_{29}-x_{28}}=\frac{(24-22{,}5510)^2.0{,}002043-(22{,}2-22{,}5510)^2.0{,}002421}{24-22{,}2}$$

$$=0{,}002217,$$

$$\frac{(x_8-6{,}123)^2F(x_7)-(x_7-6{,}123)^2F(x_8)}{x_8-x_7}=\frac{-(6{,}3-6{,}123)^2.0\ 000094+(6{,}1-6{,}123)^2.0.000101}{6{,}3-6{,}1}$$

$$=-0{,}000014,$$

$$\frac{(x_{22}-18{,}375)^2F(x_{21})-(x_{21}-18{,}375)^2F(x_{22})}{x_{22}-x_{21}}=\frac{(18{,}6-18{,}375)^2.0{,}001057-(17{,}4-18{,}375)^2.0{,}001256}{18{,}6-17{,}4}$$

$$=-0{,}000951,$$

$$\frac{(x_3-3{,}588)^2F(x_4)-(x_4-3{,}588)^2F(x_3)}{x_3-x_4}=\frac{-(3{,}2-3{,}588)^2.0{,}000077+(2{,}1-3{,}588)^2.0{,}000115}{3{,}2-2{,}1}$$

$$=0{,}000017,$$

$$\frac{(x_{26}-20{,}912)^2F(x_{25})-(x_{25}-20{,}912)^2F(x_{26})}{x_{26}-x_{25}}=\frac{(21{,}2-20{,}912)^2.0{,}001496-(19{,}8-20{,}912)^2.0{,}001805}{21{,}2-19{,}8}$$

$$=-0{,}001505.$$

Dès lors les équations que nous avons trouvées (§ 28) pour la détermination des coefficients

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ K_3$$

nous donnent

$$-14{,}3913\,K_0=\frac{-0{,}010523}{2}+0{,}000171+0{,}000103=-0{,}004987,$$

$$62{,}1579\,K_1=\frac{0{,}018249}{2}-0{,}000014+0{,}000026-0{,}002217=0{,}006919,$$

$$919{,}13\,K_2=\frac{0{,}013457}{2}+0{,}000014-0{,}000951=0{,}005791,$$

$$-5629{,}7\,K_3=\frac{-0{,}002493}{2}-0{,}000017+0{,}000026+0{,}001505=0{,}000268,$$

et par là on obtient

$$K_0=\frac{-0{,}004987}{-14{,}3913}=0{,}0003465,$$

$$K_1=\frac{0{,}006919}{62{,}1579}=0{,}00011131,$$

$$K_2=\frac{0{,}005791}{919{,}13}=0{,}00000630,$$

$$K_3=\frac{0{,}000268}{-5629{,}7}=-0{,}0000000476.$$

En portant ces valeurs de

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ K_3$$

dans l'expression cherchée de $F(x)$, on a

$$F(x)=0{,}0003465+0{,}00011131\,(x-12{,}25)+0{,}00000630\,(x-12{,}25)^2$$
$$-0{,}0000000476\,(x-12{,}25)^3,$$

ce qui présente toutes les valeurs données de $F(x)$ avec une approximation très suffisante, comme on peut le voir d'après cette table:

m	x_m	Valeurs de $F(x_m)$ observées.	Valeurs de $F(x_m)$ calculées.	Différences.
1	0	0,000000	+ 0,000016	— 0,000016
2	0,9	— 0,000022	— 0,000036	+ 0,000014
3	1,6	— 0,000098	— 0,000067	— 0,000031
4	2,1	— 0,000077	— 0,000085	+ 0,000008
5	5,2	— 0,000115	— 0,000107	— 0,000008
6	5,6	— 0,000135	— 0,000101	— 0,000034
7	6,1	— 0,000094	— 0,000089	— 0,000005
8	6,3	— 0,000101	— 0,000083	— 0,000018
9	7,2	— 0,000047	— 0,000049	+ 0,000002
10	8,5	— 0,000006	— 0,000020	+ 0,000014
11	8,6	0,000007	— 0,000007	+ 0,000014
12	9,1	0,000081	0,000061	+ 0,000020
13	11,2	0,000215	0,000236	— 0,000021
14	11,9	0,000317	0,000308	+ 0,000009
15	12,7	0,000352	0,000398	— 0,000046
16	13,5	0,000480	0,000495	— 0,000015
17	13,8	0,000568	0,000534	+ 0,000034
18	15,0	0,000706	0,000698	+ 0,000008
19	15,6	0,000841	0,000789	+ 0,000052
20	16,3	0,000927	0,000891	+ 0,000036
21	17,4	0,001057	0,001080	— 0,000023
22	18,6	0,001256	0,001295	— 0,000039
23	18,6	0,001298	0,001295	+ 0,000003
24	19,2	0,001419	0,001408	+ 0,000011
25	19,8	0,001496	0,001525	— 0,000029
26	21,2	0,001805	0,001813	— 0,000008
27	21,8	0,001989	0,001942	+ 0,000047
28	22,2	0,002043	0,002030	+ 0,000013
29	24,0	0,002421	0,002447	— 0,000026
30	24,5	0,002618	0,002568	+ 0,000050

§ 30. D'après la formule (14), et en prenant, suivant l'expression obtenue de $F(x)$,

$$F''(x) = 0{,}0000126 - 0{,}0000002856(x - 12{,}25),$$

on trouve que les erreurs qu'on commet dans nos valeurs des coefficients

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ K_3,$$

en remplaçant, comme nous l'avons fait, la courbe

$$y = F(x)$$

par un polygone, sont comprises respectivement entre les limites

$$\begin{aligned} &-0{,}0000023 \text{ et } -0{,}0000040,\\ &+0{,}00000059 \text{ et } +0{,}00000079,\\ &-0{,}000000022 \text{ et } -0{,}000000032,\\ &+0{,}000000000059 \text{ et } -0{,}000000000081. \end{aligned}$$

D'après cela on reconnaît aisément que ces erreurs sont notablement au-dessous de celles dues aux observations. Ces erreurs seraient encore plus petites, si les valeurs de l'argument des observations des n°s 4 et 5 n'étaient pas si éloignées entre elles.

VI.

§ 31. Par la méthode exposée dans les sections précédentes, on parviendra à trouver les coefficients de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n,$$

avec une approximation plus ou moins grande, suivant le nombre de ses valeurs connues. Mais comme les quantités

$$s,\ \eta_1,\ \eta_2, \ldots\ldots \eta_n$$

qui entrent dans nos formules dépendent essentiellement du nombre n, on ne peut les employer à la recherche de l'expression de $F(x)$ sans fixer d'avance le nombre de ses termes conservés, et conséquemment, tant qu'on ne sait rien sur ce nombre, il est important d'examiner les différentes hypothèses qui s'y rapportent, et de chercher séparément, dans chacune d'elles, l'expression de $F(x)$, ce qui augmente considérablement les calculs. Nous allons montrer maintenant comment par notre méthode on parvient à une formule d'interpolation, qui lève complétement cette difficulté. La formule que nous donnerons à présent embrassera toutes les hypothèses possibles sur le nombre de termes dans l'expression de $F(x)$, et répondra

à chacune d'elles suivant qu'on prolonge plus ou moins la série que cette formule représente. Sous ce rapport elle ne laissera rien à désirer, seulement, comme toutes les autres formules de ce Mémoire, elle ne donnera pas de résultat avec la moindre erreur à craindre, résultat qu'on ne saurait trouver directement qu'à l'aide de notre série citée plus haut.

§ 32. Pour parvenir à la formule d'interpolation dont nous avons parlé, convenons de désigner par le symbole

$$\int_n u$$

l'expression de la forme

$$\int_{-h}^{\eta_1} u dx - \int_{\eta_{i1}}^{\eta_2} u dx + \int_{\eta_{i2}}^{\eta_3} u dx - \ldots\ldots + (-1)^n \int_{\eta_{in}}^{h} u dx,$$

où

$$\eta_1,\ \eta_{i3}, \ldots\ldots,$$
$$\eta_i,\ \eta_{i4}, \ldots\ldots$$

sont les racines des équations

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0,$$

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2-h^2}} = 0$$

dans le cas de n impair, et des équations

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{\sqrt{\frac{x-h}{2}}} = 0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{\sqrt{\frac{x+h}{2}}} = 0$$

dans le cas de n pair.

D'après cette notation, les formules, trouvées dans la Section III pour la détermination du dernier coefficient de la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n,$$

seront représentées ainsi:

$$\int_n F(x) = sA_n.$$

D'où, en substituant la valeur de $F(x)$, nous tirons

$$\int_n (A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n) = A_0 \int_n x^0 + A_1 \int_n x + \ldots\ldots + A_n \int_n x^n = sA_n,$$

ce qui suppose

$$\int_n x^0 = 0,\ \int_n x = 0, \ldots\ldots \int_n x^{n-1} = 0.$$

Soit maintenant

$$f(x) = x_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_m x^m$$

une fonction dont on cherche la valeur pour

$$x = z.$$

D'après la valeur de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_m x^m$$

on a

$$\begin{aligned}\int_n f(x) &= \int_n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m) \\ &= a_0 \int_n x^0 + a_1 \int_n x + a_2 \int_n x^2 + \ldots\ldots + a_m \int_n x^m,\end{aligned}$$

et comme nous venons de voir que

$$\int_n x^0 = 0,\ \int_n x = 0,\ \int_n x^2 = 0, \ldots\ldots \int_n x^{n-1} = 0,$$

cela nous donne, dans la supposition de $n < m - 1$,

$$\int_n f(x) = a_n \int_n x^n + a_{n+1} \int_n x^{n+1} + \ldots\ldots + a_m \int_n x^m.$$

D'où en faisant

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots,$$

nous obtenons ce système d'équations:

$$(20)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \int_0 f(x) = a_0 \int_0 x^0 + a_1 \int_0 x + a_2 \int_0 x^2 + \ldots\ldots + a_m \int_0 x^m, \\ \int_1 f(x) = a_1 \int_1 x + a_2 \int_1 x^2 + \ldots\ldots + a_m \int_1 x^m, \\ \int_2 f(x) = a_2 \int_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m \int_2 x^m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_m f(x) = a_m \int_m x^m. \end{cases}$$

Ces équations déterminent tous les coefficients

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots\ldots a_m$$

de la fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m,$$

d'après lesquels on trouvera aisément sa valeur pour $x = z$.

§ 33. Pour parvenir directement à la valeur de $f(z)$, nous prendrons la somme des équations (20), après les avoir multipliées respectivement par les facteurs arbitraires

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \ldots\ldots\ \theta_{m+1}.$$

Ainsi l'on obtient

$$\theta_{1,0}\int f(x)+\theta_{2,1}\int\int f(x)+\theta_{3,2}\int\int\int f(x)+\ldots+\theta_{m+1,m}\int\ldots\int f(x)=a_0\theta_{1,0}\int x^0+a_1(\theta_{1,0}\int x+\theta_{2,1}\int x)$$
$$+a_2(\theta_{1,0}\int x^2+\theta_{2,1}\int x^2+\theta_{3,2}\int x^2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+a_m(\theta_{1,0}\int x^m+\theta_{2,1}\int x^m+\ldots+\theta_{m+1,m}\int x^m).$$

D'où résulte cette valeur de $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_mz^m$:

$$(21)\ldots\ldots\ldots\ \theta_{1,0}\int f(z)+\theta_{2,1}\int\int f(x)+\theta_{3,2}\int\int\int f(x)+\ldots+\theta_{m+1,m}\int\ldots\int f(x)=f(z),$$

les facteurs

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta\ldots\theta_m$$

étant choisis de manière à ce qu'on ait

$$(22)\ldots\ldots\ \begin{cases}\theta_{1,0}\int x^0=1,\ \theta_{1,0}\int x+\theta_{2,1}\int x=z,\ \theta_{1,0}\int x^2+\theta_{2,1}\int x^2+\theta_{3,2}\int x^3=z^2,\ldots\ldots\\ \theta_{1,0}\int x^m+\theta_{2,1}\int x^m+\ldots\ldots\ldots+\theta_{m+1,m}\int x^m=z^m.\end{cases}$$

Or d'après la forme de ces équations on voit que les facteurs

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \ldots\ldots$$

qui entrent dans l'expression (21) de $f(z)$ sont les fonctions de z, respectivement des degrés

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,$$

et que leurs valeurs ne dépendent nullement de m, nombre de termes de la fonction cherchée. Donc si l'on fait $m=\infty$, l'expression de $f(z)$, donnée par la formule (21), jouira de la propriété dont nous avons parlé dans le § 31. Pour s'en assurer on n'a qu'à remarquer que, dans le cas de $m=\infty$, la formule (21) se réduit à une série infinie

$$\theta_{1,0}\int f(x)+\theta_{2,1}\int\int f(x)+\theta_{3,2}\int\int\int f(x)+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et que cette série, arrêtée au terme $\theta_{m+1,m}\int\ldots\int f(x)$, donne la valeur de $f(z)$ qu'on trouve d'après (21) dans la supposition de

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m.$$

§ 34. Nous allons chercher maintenant la loi de la série

$$(23)\ldots\ldots\ldots\ldots f(z)=\theta_1 {}_0\!f(x)+\theta_2 {}_1\!f(x)+\theta_3 {}_2\!f(x)+\ldots\ldots\ldots,$$

qui résulte de la formule (21) dans le cas de

$$m=\infty.$$

Les équations (22) qui déterminent les fonctions

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ldots\ldots\ldots,$$

pour $m=\infty$, deviennent

$$(24)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases}\theta_1 {}_0\!f x^0=1,\\ \theta_1 {}_0\!f x+\theta_2 {}_1\!f x=z,\\ \theta_1 {}_0\!f x^2+\theta_2 {}_1\!f x^2+\theta_3 {}_2\!f x^2=z^2,\\ \theta_1 {}_0\!f x^3+\theta_2 {}_1\!f x^3+\theta_3 {}_2\!f x^3+\theta_4 {}_3\!f x^3=z^3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Par la solution de ces équations on trouve aisément les fonctions

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ldots\ldots;$$

mais il est difficile de reconnaître leur forme générale. Nous montrerons maintenant comment on y parvient par une méthode toute particulière.

En vertu de ce que nous avons vu (§ 32) relativement aux expressions

$$f_n x^0,\ f x,\ f_n x^2,\ldots\ldots f_n x^{4-1},$$

on a

$$f_1 x^0=0,\ f_2 x^0=0,\ f_3 x^0=0,\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_2 x=0,\ f_3 x=0,\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_3 x^2=0,\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*

D'où il suit que, sans rien changer aux équations (24), elles peuvent être mises sous cette forme :

$$\theta_1 \int_0 x^0 + \theta_2 \int_1 x^0 + \theta_3 \int_2 x^0 + \ldots\ldots\ldots = 1,$$

$$\theta_1 \int_0 x + \theta_2 \int_1 x + \theta_3 \int_2 x + \ldots\ldots\ldots = z,$$

$$\theta_1 \int_0 x^2 + \theta_2 \int_1 x^2 + \theta_3 \int_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots = z^2,$$

$$\theta_1 \int_0 x^3 + \theta_2 \int_1 x^3 + \theta_3 \int_2 x^3 + \ldots\ldots\ldots = z^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or si l'on multiplie ces équations respectivement par

$$\frac{1}{\alpha^2},\ \frac{2}{\alpha^3},\ \frac{3}{\alpha^4},\ \frac{4}{\alpha^5},\ldots\ldots\ldots,$$

α étant une quantité quelconque, et qu'on prenne leur somme, il en résulte

$$\begin{aligned}
&\theta_1\left[\frac{1}{\alpha^2}\int_0 x^0 + \frac{2}{\alpha^3}\int_0 x + \frac{3}{\alpha^4}\int_0 x^2 + \frac{4}{\alpha^5}\int_0 x^3 + \ldots\ldots\right]\\
&+\theta_2\left[\frac{1}{\alpha^2}\int_1 x^0 + \frac{2}{\alpha^3}\int_1 x + \frac{3}{\alpha^4}\int_1 x^2 + \frac{4}{\alpha^5}\int_1 x^3 + \ldots\ldots\right]\\
&+\theta_3\left[\frac{1}{\alpha^2}\int_2 x^0 + \frac{2}{\alpha^3}\int_2 x + \frac{3}{\alpha^4}\int_2 x^2 + \frac{4}{\alpha^5}\int_2 x^3 + \ldots\ldots\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2z}{\alpha^3} + \frac{3z^2}{\alpha^4} + \frac{4z^3}{\alpha^5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et comme

$$\frac{1}{\alpha^2}\int_n x^0 + \frac{2}{\alpha^3}\int_n x + \frac{3}{\alpha^4}\int_n x^2 + \frac{4}{\alpha^5}\int_n x^3 + \ldots\ldots = \int_n\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2z}{\alpha^3} + \frac{3z^2}{\alpha^4} + \frac{4z^3}{\alpha^5} + \ldots\ldots\right) = \int_n \frac{1}{(\alpha - z)^2},$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2z}{\alpha^3} + \frac{3z^2}{\alpha^4} + \frac{4z^3}{\alpha^5} + \ldots\ldots = \frac{1}{(\alpha - z)^2},$$

cette formule se réduit à celle-ci :

$$(25)\ldots\ldots\ldots\ldots \theta_1 \int_0 \frac{1}{(\alpha - x)^2} + \theta_2 \int_1 \frac{1}{(\alpha - x)^2} + \theta_3 \int_2 \frac{1}{(\alpha - x)^2} + \ldots\ldots = \frac{1}{(\alpha - z)^2}.$$

Pour trouver les quantités

$$\int_0 \frac{1}{(\alpha - x)^2},\ \int_1 \frac{1}{(\alpha - x)^2},\ \int_2 \frac{1}{(\alpha - x)^2},\ldots\ldots,$$

contenues dans cette formule, remarquons que d'après notre notation

$$\int_n \frac{1}{(\alpha-x)^2} = \int_{-h}^{\eta_1} \frac{dx}{(\alpha-x)^2} - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{dx}{(\alpha-x)^2} + \int_{\eta_2}^{\eta_3} \frac{dx}{(\alpha-x)^2} - \ldots + (-1)^n \int_{\eta_n}^{h} \frac{dx}{(\alpha-x)^2}.$$

D'où il suit

$$\int_n \frac{1}{(\alpha-x)^2} = -\frac{1}{\alpha+h} + \frac{2}{\alpha-\eta_1} - \frac{2}{\alpha-\eta_2} + \frac{2}{\alpha-\eta_3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{\alpha-h};$$

et comme

$$-\frac{1}{\alpha+h} + \frac{2}{\alpha-\eta_1} - \frac{2}{\alpha-\eta_2} + \frac{2}{\alpha-\eta_3} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{\alpha-h}$$

$$= -\frac{d\log(\alpha+h)}{d\alpha} + \frac{2d\log(\alpha-\eta_1)}{d\alpha} - \frac{2d\log(\alpha-\eta_2)}{d\alpha} + \frac{2d\log(\alpha-\eta_3)}{d\alpha} - \ldots + (-)^n \frac{d\log(\alpha-h)}{d\alpha}$$

$$= \frac{d\log\frac{(\alpha-\eta_1)^2(\alpha-\eta_2)^2\ldots(\alpha-h)^{(-1)^n}}{(\alpha-\eta_2)^2\ldots\ldots\ldots(\alpha+h)}}{d\alpha},$$

il en résulte

$$(26)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int_n \frac{1}{(\alpha-x)^2} = \frac{d\log\frac{(\alpha-\eta_1)^2(\alpha-\eta_2)^2\ldots(\alpha-h)^{(-1)^n}}{(\alpha-\eta_2)^2\ldots\ldots\ldots(\alpha+h)}}{d\alpha}.$$

A l'aide de cette formule on obtient aisément la valeur définitive de

$$\int_n \frac{1}{(\alpha-x)^2}.$$

Dans le cas de n impair, les quantités

$$\eta_1,\ \eta_3,\ldots\ldots,$$
$$\eta_2,\ \eta_4,\ldots\ldots$$

sont (§ 32) les racines des équations

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0,$$

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2-h^2}} = 0,$$

et par là on trouve

$$(\alpha-\eta_1)(\alpha-\eta_3),\ldots = C_0 \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2},$$

$$(\alpha-\eta_2)(\alpha-\eta_4),\ldots = C_1 \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{\alpha^2-h^2}},$$

en désignant par C_0 et C_1 des valeurs indépendantes de α. D'après quoi la formule (26), pour n impair, nous donne

$$\int_n^{\frac{1}{(\alpha-x)^2}} = \frac{d\log\frac{C_0^2}{C_1^2}\left(\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}\right)^2}{d\alpha}$$

$$= -\frac{n+1}{\sqrt{\alpha^2-h^2}}\frac{4h^{n+1}}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^{n+1}}.$$

En passant au cas de n pair, nous remarquerons que, pour ces valeurs de n, les quantités

$$\eta_1,\ \eta_3,\ \ldots\ldots,$$
$$\eta_2,\eta_4,\ \ldots\ldots$$

sont les racines des équations

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}}=0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}+\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}}-\sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}}=0,$$

et par conséquent

$$(\alpha-\eta_1)(\alpha-\eta_3)\ldots\ldots = C_0\frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}},$$

$$(\alpha-\eta_2)(\alpha-\eta_4)\ldots\ldots = C_1\frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}}.$$

D'après cela la formule (26), pour n pair, nous donne

$$\int_n^{\frac{1}{(\alpha-x)^2}} = \frac{d\log\frac{C_0^2}{C_1^2}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}-\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}+\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}\right)^{n+1}}\right)^2}{d\alpha}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{\alpha^2-h^2}}\frac{4h^{n+1}}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^{n+1}}.$$

Par les expressions trouvées de

$$\int \frac{1}{n(\alpha-x)^2}$$

on obtient, pour $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$,

$$\int_0 \frac{1}{(\alpha-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2}-(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})},$$

$$\int_1 \frac{1}{(\alpha-x)^2} = -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h^2}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^2-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^2},$$

$$\int_2 \frac{1}{(\alpha-x)^2} = \frac{3}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h^3}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^3-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en vertu de quoi la formule (25) devient

$$\frac{4}{\sqrt{\alpha^2-h^2}}\left[\frac{h_1\theta_1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})} - \frac{2h^2\theta_2}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^2-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^2} + \frac{3h^3\theta_3}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2})^3-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2})^3} - \ldots\ldots\right] = \frac{1}{(\alpha-z)^2}.$$

Pour simplifier cette formule nous poserons

$$\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-h^2}}{h} = u,$$

ce qui nous donne

$$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-h^2}}{h} = \frac{1}{u}, \quad \frac{2\sqrt{\alpha^2-h^2}}{h} = u-\frac{1}{u}, \quad \frac{2\alpha}{h} = u+\frac{1}{u},$$

et d'après cela notre formule se change dans celle-ci:

$$\frac{8}{h\left(u-\frac{1}{u}\right)}\left[\frac{\theta_1}{u-\frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2-\frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3-\frac{1}{u^3}} - \ldots\ldots\right] = \frac{1}{\left[\frac{h}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)-z\right]^2},$$

ou

$$\frac{\theta_1}{u-\frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2-\frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3-\frac{1}{u^3}} - \ldots = \frac{u^2\left(u-\frac{1}{u}\right)}{2h\left(u^2-\frac{2zu}{h}+1\right)^2}.$$

§ 35. Les deux parties de cette équation se transforment dans des sommes très simples. En effet, comme

$$\frac{\theta_1}{u-\frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2-\frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3-\frac{1}{u^3}} - \ldots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\lambda\theta_\lambda}{u^\lambda-\frac{1}{u^\lambda}},$$

$$\frac{1}{u^\lambda-\frac{1}{u^\lambda}} = \frac{1}{u^\lambda} + \frac{1}{u^{3\lambda}} + \frac{1}{u^{5\lambda}} + \ldots = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{u^{(2\mu-1)\lambda}},$$

on trouve

$$\frac{\theta_1}{u-\frac{1}{u}}-\frac{2\theta_2}{u^2-\frac{1}{u^2}}+\frac{3\theta_3}{u^3-\frac{1}{u^3}}-\ldots\ldots=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{(-1)^{\lambda-1}\lambda\theta_\lambda}{u^{(2\mu-1)\lambda}}.$$

D'autre part, à l'aide de la décomposition en fractions simples, on obtient

$$\frac{u^2\left(u-\frac{1}{u}\right)}{\left(u^2-\frac{2zu}{h}+1\right)^2}=\frac{h}{2\sqrt{z^2-h^2}}\left[\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^2}{(hu-z-\sqrt{z^2-h^2})^2}+\frac{z+\sqrt{z^2-h^2}}{hu-z-\sqrt{z^2-h^2}}-\frac{(z-\sqrt{z^2-h^2})^2}{(hu-z+\sqrt{z^2-h^2})^2}-\frac{z-\sqrt{z^2-h^2}}{hu-z+\sqrt{z^2-h^2}}\right],$$

et par là

$$\frac{u^2\left(u-\frac{1}{u}\right)}{\left(u^2-\frac{2zu}{h}+1\right)^2}=\frac{h}{2\sqrt{z^2-h^2}}\left[\frac{h(z+\sqrt{z^2-h^2})u}{(hu-z-\sqrt{z^2-h^2})^2}-\frac{h(z-\sqrt{z^2-h^2})u}{(hu-z+\sqrt{z^2-h^2})^2}\right];$$

d'où résulte

$$\frac{1}{2h}\frac{u^2\left(u-\frac{1}{u}\right)}{\left(u^2-\frac{2zu}{h}+1\right)^2}=\frac{1}{4\sqrt{z^2-h^2}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{z+\sqrt{z^2-h^2}}{hu}+2\dfrac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^2}{h^2u^2}+3\dfrac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^3}{h^3u^3}+\ldots\ldots\\ -\dfrac{z-\sqrt{z^2-h^2}}{hu}-2\dfrac{(z-\sqrt{z^2-h^2})^2}{h^2u^2}-3\dfrac{(z-\sqrt{z^2-h^2})^3}{h^3u^3}-\ldots\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{z^2-h^2}}\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{h^\tau u^\tau}.$$

D'après les transformations que nous venons de faire, notre formule devient

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{(-1)^{\lambda-1}\lambda\theta_\lambda}{u^{(2\mu-1)\lambda}}=\frac{1}{4\sqrt{z^2-h^2}}\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{h^\tau u^\tau}.$$

§ 36. Pour tirer de cette formule celle qui nous conduira aux valeurs cherchées des fonctions

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ldots\ldots,$$

nous l'intégrerons depuis $u=0$, jusqu'à $u=1$, après l'avoir multipliée par

$$\log^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u},$$

où ρ est un nombre arbitraire. Ainsi l'on obtient

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\lambda-1}\lambda\theta_\lambda\int_0^1\frac{\log^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}\right)du}{u^{(2\mu-1)\lambda+1}}=\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}}\int_0^1\frac{\log^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}\right)du}{u^{\tau+1}},$$

et comme les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\log^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}\right)du}{u^{(2\mu-1)\lambda+1}}, \quad \int_0^1 \frac{\log^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^{\tau+1}}du$$

se réduisent à

$$\frac{1}{\lambda^\rho(2\mu-1)^\rho}\int_1^\infty \log^{\rho-1}x\,dx, \quad \frac{1}{\tau^\rho}\int_1^\infty \log^{\rho-1}x\,dx,$$

il en résulte, après la supression du facteur commun $\int_1^\infty \log^{\rho-1}x\,dx$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{(-1)^{\lambda-1}\theta_\lambda}{\lambda^\rho(2\mu-1)^\rho}=\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau^\rho\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^{\lambda-1}\theta_\lambda}{\lambda^\rho}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{1}{(2\mu-1)^\rho}=\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau^\rho\frac{(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}}.$$

De plus, en remarquant que

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{1}{(2\mu-1)^\rho}=\frac{1}{1^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{5^\rho}+\frac{1}{7^\rho}+\frac{1}{9^\rho}+\ldots,$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{7^\rho}\right)\ldots},$$

on trouve que cette formule peut être mise sous la forme

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^{\lambda-1}\theta_\lambda}{\lambda^\rho}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{7^\rho}\right)\ldots}=\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau^\rho\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}},$$

et par là on obtient

$$(26)\ldots\ldots\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^{\lambda-1}\theta_\lambda}{\lambda^\rho}=\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\tau^\rho\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}}\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{7^\rho}\right)\ldots\ldots$$

C'est au moyen de cette formule que nous trouverons l'expression générale des fonctions

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ldots\ldots\ldots$$

§ 37. Pour trouver la valeur de θ_λ remarquons que la formule (26), indépendamment du nombre ρ, ne peut avoir lieu, à moins que ses parties

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}\lambda\theta_\lambda}{\lambda^\rho},$$

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} \tau \frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}} \left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{7^\rho}\right)\cdots\cdots$$

ne contiennent les termes avec $\frac{1}{\lambda^\rho}$ égaux entre eux. Or dans la première partie on trouve que ce terme est

$$\frac{(-1)^{\lambda-1}\lambda\theta_\lambda}{\lambda^\rho}.$$

En passant à la recherche des termes correspondants dans la seconde partie, nous trouvons que le produit

$$\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{7^\rho}\right)\cdots\cdots$$

se réduit à

$$1-\frac{1}{3^\rho}-\frac{1}{5^\rho}-\frac{1}{7^\rho}-\frac{1}{11^\rho}+\frac{1}{15^\rho}-\cdots\cdots,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \pm\frac{1}{d_p},$$

en désignant par

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\cdots\cdots$$

des nombres impairs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 15,\ 17,\ 19,\cdots\cdots,$$

sans facteur carré, et en supposant qu'on prenne le terme

$$\frac{1}{d_p}$$

avec le signe + ou —, suivant que les diviseurs premiers de d_p sont en nombre pair ou impair. La seconde partie de notre formule se réduit par conséquent à

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty} \pm\tau \frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\tau-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\tau}{4h^\tau\sqrt{z^2-h^2}} \frac{1}{(\tau d_p)^\rho},$$

et par là on trouve que les termes avec $\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}$ sont

$$\lambda\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\lambda-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\lambda}{4h^\lambda\sqrt{z^2-h^2}}\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}+\frac{\lambda}{d_1}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_1}}\sqrt{z^2-h^2}}\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}$$

$$+\frac{\lambda}{d_2}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_2}}\sqrt{z^2-h^2}}\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}+\ldots,$$

en désignant par

$$d_1,\ d_2,\ldots\ldots,$$

ceux des diviseurs impairs du nombre λ qui n'ont aucun facteur carré. Quant aux signes de ces termes, conformément à ce que nous avons vu, on prendra en général

$$\frac{\lambda}{d_p}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_p}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_p}}}{4h^{\frac{1}{d_p}}\sqrt{z^2-h^2}}$$

avec le signe + ou —, suivant que les diviseurs premiers de d_p sont en nombre pair ou impair.

En égalant entre eux les termes avec $\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}$ que nous venons de trouver dans les deux parties de la formule (26), nous obtenons cette équation:

$$\frac{(-1)^{\lambda-1}\theta_\lambda}{\lambda\bar{\rho}}=\lambda\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\lambda-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\lambda}{4h^\lambda\sqrt{z^2-h^2}}\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}+\frac{\lambda}{d_1}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_1}}}\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}$$

$$+\frac{\lambda}{d_2}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4h^{\frac{\lambda}{d^2}}\sqrt{z^2-h^2}}\frac{1}{\lambda\bar{\rho}}+\ldots\ldots,$$

ce qui donne pour la valeur cherchée de la fonction θ_λ

$$\theta_\lambda=(-1)^{\lambda-1}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^\lambda-(z-\sqrt{z^2-h^2})^\lambda}{4h^\lambda\sqrt{z^2-h^2}}+\frac{(-1)^{\lambda-1}}{d_1}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_1}}\sqrt{z^2-h^2}}$$

$$+\frac{(-1)^{\lambda-1}}{d_2}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}-(z-\sqrt{z^2-h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_2}}\sqrt{z^2-h^2}}+\ldots\ldots\ldots$$

§ 38. Par l'expression trouvée de θ_λ on obtient aisément toutes les fonctions

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ldots\ldots\ldots,$$

suivant lesquelles est ordonnée notre formule (23). Ainsi, en remarquant que dans les cas de

$$\lambda = 1,\ 2,\ 4,$$

le nombre λ n'a point de diviseur qui soit impair et en même temps sans facteur carré, nous trouvons pour θ_1, θ_2, θ_4 ces valeurs:

$$\theta_1 = \frac{z+\sqrt{z^2-h^2} - z+\sqrt{z^2-h^2}}{4h\sqrt{z^2-h^2}} = \frac{1}{2h},$$

$$\theta_2 = -\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^2 - (z-\sqrt{z^2-h^2})^2}{4h^2\sqrt{z^2-h^2}} = -\frac{z}{h^2},$$

$$\theta_4 = -\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^4 - (z-\sqrt{z^2-h^2})^4}{4h^4\sqrt{z^2-h^2}} = -\frac{4z^3-2h^2z}{h^4}.$$

Dans les cas de

$$\lambda = 3,\ 5,\ 6,$$

les diviseurs impairs de λ et sans facteurs carrés étant

$$d_1 = 3,\ d_1 = 5,\ d_1 = 3,$$

l'expression trouvée de θ_λ nous donne

$$\theta_3 = \frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^3 - (z-\sqrt{z^2-h^2})^3}{4h^3\sqrt{z^2-h^2}} - \frac{1}{3}\frac{z+\sqrt{z^2-h^2} - z+\sqrt{z^2-h^2}}{4h\sqrt{z^2-h^2}} = \frac{2z^2-\frac{2}{3}h^2}{h^3},$$

$$\theta_5 = \frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^5 - (z-\sqrt{z^2-h^2})^5}{4h^5\sqrt{z^2-h^2}} - \frac{1}{5}\frac{z+\sqrt{z^2-h^2} - z+\sqrt{z^2-h^2}}{4h\sqrt{z^2-h^2}} = \frac{8z^4-6h^2z^2+\frac{2}{5}h^4}{h^6},$$

$$\theta_6 = -\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^6 - (z-\sqrt{z^2-h^2})^6}{4h^6\sqrt{z^2-h^2}} + \frac{1}{3}\frac{(z+\sqrt{z^2-h^2})^2 - (z-\sqrt{z^2-h^2})^2}{4h^2\sqrt{z^2-h^2}} = -\frac{16z^5-16h^2z^3+\frac{8}{3}h^4z}{h^5}.$$

Quant aux quantités

$$\mathcal{J}_0,\ \mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2,\ \mathcal{J}_3,\ \ldots\ldots,$$

contenues dans notre formule (23), remarquons que, d'après le § 32,

$$\mathcal{J}_n f(x) = \int_{-h}^{\eta_1} f(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} f(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^n \int_{\eta_n}^{h} f(x)dx,$$

et d'après les §§ 17, 19,

$$\eta_1 = h\cos\frac{n\pi}{n+1},\quad \eta_3 = h\cos\frac{(n-2)\pi}{n+1},\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\eta_2 = h\cos\frac{(n-1)\pi}{n+1},\quad \eta_4 = h\cos\frac{(n-3)\pi}{n+1},\ \ldots\ldots\ldots,$$

ce qui nous donne

$$\int_n f(x) = \int_{-h}^{h\cos\frac{n\pi}{n+1}} f(x)dx - \int_{h\cos\frac{n\pi}{n+1}}^{h\cos\frac{(n-1)\pi}{n+1}} f(x)dx + \int_{h\cos\frac{(n-1)\pi}{n+1}}^{h\cos\frac{(n-2)\pi}{n+1}} f(x)dx - \ldots\ldots + (-1)^n \int_{h\cos\frac{\pi}{n+1}}^{h} f(x)dx.$$

D'où, en faisant

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\ldots,$$

on obtient

$$\int_0 f(x) = \int_{-h}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_1 f(x) = \int_{-h}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_2 f(x) = \int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x)dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}h}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_3 f(x) = \int_{-h}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x)dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}h}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x)dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}h}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_4 f(x) = \int_{h}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x)dx - \int_{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x)dx + \int_{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x)dx - \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x)dx + \int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_5 f(x) = \int_{-h}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x)dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{-\frac{1}{2}h} f(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}h}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}h} f(x)dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x)dx - \int_{\frac{1}{2}h}^{h} f(x)dx,$$

.....

En vertu des valeurs trouvées de

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4, \ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_0,\ \int_1,\ \int_2,\ \int_3, \ldots\ldots\ldots,$$

notre formule (23) se réduit à ce développement de la fonction $f(z)$:

$$(27)\ldots\ldots f(z)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x)dx-\left[\int_{-h}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{h} f(x)dx\right]\frac{z}{h^2}+\left[\int_{h}^{-\frac{1}{2}h} f(x)dx-\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}h}^{h} f(x)dx\right]\frac{2z^2-\frac{2}{3}h^2}{h^3}$$

$$-\left[\int_{-h}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x)dx-\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}h}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x)dx-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}h}^{h} f(x)dx\right]\frac{4z^3-2h^2z}{h^4}$$

$$+\left[\int_{-h}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x)dx-\int_{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x)dx+\int_{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x)dx-\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x)dx+\int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{h} f(x)dx\right]\frac{8z^4-6h^2z^2+\frac{2}{5}h^2}{h^5}$$

$$-\left[\int_{-h}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x)dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{-\frac{1}{2}h} f(x)dx+\int_{-\frac{1}{2}h}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}h} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}h}^{\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x)dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{h} f(x)dx\right]\frac{16z^5-16h^2z^3+\frac{8}{3}h^4z}{h^6}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui, suivant le nombre de termes qu'on y conserve, donne l'expression $f(z)$ sous la forme d'un polynome de degré plus ou moins élevé.

Quant à l'évaluation approximative des expressions

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_{-h}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{h} f(x)dx,$$

$$\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x)dx-\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}h}^{h} f(x)dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'après les valeurs données de $f(z)$

$$f(z_1),\ f(z_2),\ f(z_3),\ldots\ldots\ldots f(z_i),$$

on y parviendra, comme nous l'avons montré dans le § 22, à l'aide du planimètre, si l'on a la représentation graphique de la courbe

$$y=f(x);$$

dans le cas contraire on les cherchera à l'aide de la formule (15) qui, par le changement de x en z, $F(x)$ en $f(z)$, devient

$$(28)\ldots\ldots\int_{z_1}^{\eta_1} f(z)dz - \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(z)dz + \int_{\eta_2}^{\eta_3} f(z)dz - \ldots\ldots + (-1)^{\nu}\int_{\eta_\nu}^{z_i} f(z)dz =$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} M_1 + M_2 + \ldots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \ldots - M_{i''} + M_{i''+1} + \ldots + M_{i'''} - M_{i'''+1} \\ - M_{i'''+2} - \ldots - (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)}+1} - \ldots - (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)}} + (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)}+1} + \ldots + (-1)^{\nu} M_i \end{array}\right]$$

$$- \frac{(z_{i'+1}-\eta_1)^2 f(z_{i'}) - (z_{i'}-\eta_1)^2 f(z_{i'+1})}{z_{i'+1}-z_{i'}} + \frac{(z_{i''+1}-\eta_2)^2 f(z_{i''}) - (z_{i''}-\eta_2)^2 f(z_{i''+1})}{z_{i''+1}-z_{i''}}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu} \frac{(z_{i^{(\nu)}+1}-\eta_\nu)^2 f(z_{i^{(\nu)}}) - (z_{i^{(\nu)}}-\eta_\nu)^2 f(z_{i^{(\nu)}+1})}{z_{i^{(\nu)}+1}-z_{i^{(\nu)}}},$$

où

$$\begin{array}{l} z_{i'},\ z_{i'+1}, \\ z_{i''},\ z_{i''+1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ z_{i^{(\nu)}},\ z_{i^{(\nu)}+1} \end{array}$$

sont les couples de termes dans la suite

$$z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots\ldots\ldots z_i$$

respectivement les plus proches des quantités

$$\eta_1,\ \eta_2, \ldots\ldots\ldots \eta_\nu,$$

et

$$M_1 = (z_2 - z_1) f(z_1),\ M_2 = (z_3 - z_1) f(z_2), \ldots\ldots,$$
$$M_{i-1} = (z_i - z_{i-2}) f(z_{i-1}),\ M_i = (z_i - z_{i-1}) f(z_i)$$

Dans la formule (27) les limites de la variable sont $-h$ et $+h$, ce qui suppose que dans la suite des valeurs données de $f(z)$

$$f(z_1),\ f(z_2), \ldots\ldots\ldots f(z_i)$$

les quantités z_1 et z_i sont, au signe près, égales. Or, tant que cela n'a pas lieu, on y parvient très aisément par le seul changement de la variable, savoir, en prenant pour la nouvelle variable z la différence $z - \frac{z_1+z_i}{2}$.

§ 39. Pour montrer l'usage de la formule (27) nous allons l'appliquer au même exemple que nous avons traité plus haut (III). Dans cet exemple les valeurs limites de la variable sont $x_1 = 0$, $x_i = 24{,}5$. Donc, conformément à ce que nous avons dit, on prendra pour la nouvelle variable, que nous désignerons par z, la différence

$$x - \frac{0+24.5}{2} = x - 12{,}25.$$

D'après cela, la table des données que nous avons eue dans le § 27 se change dans celle-ci:

m	z_m	$f(z_m)$	m	z_m	$f(z_m)$
1	— 12,25	0,000000	16	1,25	0,000480
2	— 11,35	— 0,000022	17	1,55	0,000568
3	— 10,65	— 0,000098	18	2,75	0,000706
4	— 10,15	— 0,000077	19	3,35	0,000841
5	— 7,05	— 0,000115	20	4,05	0,000927
6	— 6,65	— 0,000134	21	5,15	0,001057
7	— 6,15	— 0,000094	22	6,35	0,001256
8	— 5,95	— 0,000101	23	6,35	0,001298
9	— 5,05	— 0,000047	24	6,95	0,001419
10	— 3,75	— 0,000006	25	7,55	0,001496
11	— 3,65	0,000007	26	8,95	0,001805
12	— 3,15	0,000081	27	9,55	0,001989
13	— 1,05	0,000215	28	9,95	0,002043
14	— 0,35	0,000317	29	11,75	0,002421
15	0,45	0,000352	30	12,25	0,002618

Comme dans cette table les valeurs limites de z sont

$$z_1 = -12{,}25, \quad z_{30} = 12{,}25,$$

on prendra

$$h = 12{,}25,$$

et pour cette valeur de h on aura, d'après la formule (27), ce développement de la fonction $f(z)$:

$$(29)\ldots f(z) = \frac{1}{24{,}5}\int_{-12{,}25}^{12{,}25} f(z)dz - \left[\int_{-12{,}25}^{0} f(z)dz - \int_{0}^{12{,}25} f(z)dz\right]\frac{z}{150{,}06}$$

$$+\left[\int_{-12{,}25}^{-6{,}125} f(z)dz - \int_{-6{,}125}^{6{,}125} f(z)dz + \int_{6{,}125}^{12{,}25} f(z)dz\right]\frac{2z^2-100{,}04}{1838{,}26}$$

$$-\left[\int_{-12{,}25}^{-8{,}662} f(z)dz - \int_{-8{,}662}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{8{,}662} f(z)dz - \int_{8{,}662}^{12{,}25} f(z)dz\right]\frac{4z^3-300{,}13z}{22519}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ 40. Pour évaluer les expressions

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z)dz,$$

$$\int_{-12,25}^{0} f(z)dz - \int_{0}^{12,25} f(z)dz,$$

$$\int_{-12,25}^{-6,125} f(z)dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z)dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z)dz,$$

$$\int_{-12,25}^{-8,662} f(z)dz - \int_{-8,662}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{8,662} f(z)dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z)dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on cherchera préalablement les valeurs de $M_1, M_2, \ldots\ldots M_{30}$, d'après les formules

$$M_1 = (z_2 - z_1)f(z_1),\ M_2 = (z_3 - z_1)f(z_2),\ M_3 = (z_4 - z_2)f(z_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots M_{29} = (z_{30} - z_{28})f(z_{29}),\ M_{30} = (z_{30} - z_{29})f(z_{30}).$$

L'on obtient ainsi

M_1	$= -0,000000,$	M_{16}	$= 0,000528,$
M_2	$= -0,000035,$	M_{17}	$= 0,000852,$
M_3	$= -0,000118,$	M_{18}	$= 0,001271,$
M_4	$= -0,000277,$	M_{19}	$= 0,001093,$
M_5	$= -0,000402,$	M_{20}	$= 0,001668,$
M_6	$= -0,000122,$	M_{21}	$= 0,002431,$
M_7	$= -0,000066,$	M_{22}	$= 0,001507,$
M_8	$= -0,000111,$	M_{23}	$= 0,000779,$
M_9	$= -0,000103,$	M_{24}	$= 0,001703,$
M_{10}	$= -0,000008,$	M_{25}	$= 0,002992,$
M_{11}	$= 0,000004,$	M_{26}	$= 0,003610,$
M_{12}	$= 0,000210,$	M_{27}	$= 0,001989,$
M_{13}	$= 0,000602,$	M_{28}	$= 0,004495,$
M_{14}	$= 0,000475,$	M_{29}	$= 0,005568,$
M_{15}	$= 0,000563,$	M_{30}	$= 0,001309.$

Ces valeurs étant déterminées, l'évaluation des expressions précédentes au moyen de la formule (28) devient très expéditive.

Pour trouver l'intégrale

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z)dz,$$

on prendra dans la formule (28)

$$i=30,\ \upsilon=0,\ z_1=-12,25,\ z_i=12,25,$$

et par là on aura

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z)dz=\tfrac{1}{2}(M_1+M_2+\ldots\ldots\ldots+M_{30}),$$

d'où, en vertu des valeurs trouvées de $M_1, M_2, \ldots\ldots M_{30}$, il résulte

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z)dz=\tfrac{1}{2}\cdot 0,032407=0,016203.$$

Pour trouver la valeur de l'expression

$$\int_{-12,25}^{0} f(z)dz-\int_{0}^{12,25} f(z)dz,$$

on fera dans la formule (28)

$$i=30,\ \upsilon=1,\ z_1=-12,25,\ z_i=12,25,\ \eta_1=0,$$

ce qui nous donne

$$\int_{-12,25}^{0} f(z)dz-\int_{0}^{12,25} f(z)dz=\tfrac{1}{2}(M_1+M_2+\ldots+M_{i'}-M_{i'+1}-\ldots-M_{30})-\frac{z^2_{i'+1}f(z_{i'})-z^2_{i'}f(z_{i'+1})}{z_{i'+1}-z_{i'}},$$

où, suivant notre notation, $z_{i'}$, $z_{i'+1}$ désignent la couple des valeurs de z_m les plus proches de 0. — Comme dans la colonne des valeurs de z_m (§ 39) celles les plus proches de 0 sont

$$z_{14}=-0,35,\ z_{15}=0,45,$$

et que, d'après la table des valeurs de $M_1, M_2, \ldots\ldots M_{30}$,

$$M_1+M_2+\ldots\ldots+M_{14}=0,000049,$$
$$M_{15}+M_{16}+\ldots\ldots+M_{80}=0,032358,$$

la formule précédente se réduit à celle-ci:

$$\int_{-12,25}^{0} f(z)dz-\int_{0}^{12,25} f(z)dz=\tfrac{1}{2}(0,000049-0,032358)-\frac{0,45^2f(-0,35)-0,35^2f(0,45)}{0,45+0,35}.$$

D'où, en ayant égard aux valeurs de $f(-0,35)=0,000317$, $f(0,45)=0,000352$, on obtient

$$\int_{-12,25}^{0} f(z)dz - \int_{0}^{12,25} f(z)dz = \tfrac{1}{2}(0,000049 - 0,032358) - \frac{0,45^2\ 0,000317 - 0,35^2 . 0,000352}{0,45+0,35}$$

$$= -0,016180.$$

En posant dans la formule (28)

$$i=30,\ \nu=2,\ z_1=-12,25,\ z_i=12,25,$$

$$\eta_1=-6,125,\ \eta_2=6,125,$$

on a, pour la détermination de la valeur de

$$\int_{-12,25}^{-6,125} f(z)dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z)dz + \int_{6,125}^{6,125} f(z)dz,$$

$$\int_{-12,25}^{-6,125} f(z)dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z)dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z)dz = \tfrac{1}{2}\left[\begin{matrix} M_1 + M_2 + \ldots\ldots\ldots + M_{i'} + M_{i''+1} \\ - M_{i'} + M_{i''+1} + \ldots\ldots\ldots + M_{30} \end{matrix}\right]$$

$$- \frac{(z_{i'+1}+6,125)^2 f(z_{i'}) - (z_{i'}+6,125)^2 f(z_{i'+1})}{z_{i'+1} - z_{i'}}$$

$$+ \frac{(z_{i''+1}-6,125)^2 f(z_{i''}) - (z_{i''}-6,125)^2 f(z_{i''+1})}{z_{i''+1} - z_{i''}},$$

où

$$z_{i'},\ z_{i'+1},\ z_{i''},\ z_{i''+1}$$

désignent les couples des valeurs de z_m qui sont respectivement les plus proches des quantités

$$-6,125,\quad 6,125.$$

Comme dans la suite des valeurs de z_m les termes le plus proches de

$$-6,125,\quad 6,125$$

sont

$$z_7=-6,15,\quad z_8=-5,95,$$

$$z_{21}=5,15,\qquad z_{22}=6,35,$$

*

cette formule nous donne

$$\int_{-12,25}^{-6,125} f(z)dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z)dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z)dz = \tfrac{1}{2}[M_1 + M_2 + \ldots + M_7 - M_8 - \ldots - M_{21} + M_{22} + \ldots + M_{30}]$$
$$- \frac{(z_8 + 6,125)^2 f(z_7) - (z_7 + 6,125)^2 f(z_8)}{z_8 - z_7}$$
$$+ \frac{(z_{22} - 6,125)^2 f(z_{21}) - (z_{21} - 6,125)^2 f(z_{22})}{z_{22} - z_{21}},$$

et par là, en substituant les valeurs de

$$z_7,\ z_8,\ z_{21},\ z_{22},\ f(z_7),\ f(z_8),\ f(z_{21}),\ f(z_{22}),$$
$$M_1,\ M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ M_{30},$$

on obtient

$$\int_{-12,25}^{-6,125} f(z)dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z)dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z)dz = \tfrac{1}{2}\,0,013457 + 0,000014 - 0,000951$$
$$= 0,005791.$$

En cherchant de la même manière la valeur de

$$\int_{-12,25}^{-8,662} f(z)dz - \int_{-8,662}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{8,662} f(z)dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z)dz,$$

on prendra dans la formule (28)

$$i = 30,\ z_1 = -12,25,\ z_i = 12,25,$$
$$\upsilon = 3,\ \eta_1 = -8,662,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 8,662,$$
$$i' = 4,\ i'' = 14,\ i''' = 25,$$

en vertu de quoi elle devient

$$\int_{-12,25}^{-8,662} f(z)dz - \int_{-8,662}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{8,662} f(z)dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z)dz = \tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l} M_1 + M_2 + \ldots + M_4 - M_5 - \ldots\ldots - M_{14} \\ + M_{15} + \ldots + M_{25} - M_{26} - \ldots\ldots - M_{30} \end{array}\right]$$
$$- \frac{(z_5 + 8,662)^2 f(z_4) - (z_4 + 8,662)^2 f(z_5)}{z_5 - z_4}$$
$$+ \frac{z_{15}^2 f(z_{14}) - z_{14}^2 f(z_{15})}{z_{15} - z_{14}}$$
$$- \frac{(z_{26} - 8,662)^2 f(z_{25}) - (z_{25} - 8,662)^2 f(z_{26})}{z_{26} - z_{25}}.$$

D'où, par la substitution des valeurs de

$$f(z_4),\ f(z_5),\ f(z_{14}),\ f(z_{15}),\ f(z_{25}),\ f(z_{26}),$$
$$M_1,\ M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ M_{30},$$
$$z_4,\ z_5,\ z_{14},\ z_{15},\ z_{25},\ z_{26},$$

on tire

$$\int_{-12,25}^{-8,662} f(z)dz - \int_{-8,662}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{8,662} f(z)dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z)dz = 0,000268.$$

D'après cela on trouve par la formule (29) ce développement de la fonction cherchée:

$$f(z) = \frac{0,016203}{24,5} + \frac{0,016180}{150,06}z + \frac{0,003794}{1838,26}(2z^2 - 100,04) - \frac{0,000268}{22519}(4z^3 - 300,12z) + \ldots.$$

qui donne son expression sous la forme d'un polynome de degré plus ou moins élevé, suivant le nombre de termes qu'on conserve dans cette série. Ainsi, en s'arrêtant au quatrième terme, on trouve, pour son expression sous la forme d'un polynome du troisième degré, cette formule:

$$\frac{0,016203}{24,5} + \frac{0,016180}{150,06}z + \frac{0,003794}{1838,26}(2z^2 - 100,04) - \frac{0,000268}{22519}(4z^3 - 300,12z)$$
$$= 0,0003463 + 0,00011139z + 0,00000630z^2 - 0,0000000475z^3,$$

ce qui ne diffère de l'expression, obtenue dans la section V, que par des quantités tout-à-fait négligeables.

TABLE

des solutions de l'équation

$$\int_{-h}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x)dx - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{\upsilon} \int_{\eta_\upsilon}^{h} F(x)dx = sA_l$$

qui correspondent à la plus grande valeur du facteur s,

$F(x)$ **représentant le polynome** $A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_n x^n$.

—

$n = 0.$

$l = 0.$	$\upsilon = 0.$ $s = 2h.$

$n = 1.$

$l = 0.$	$\upsilon = 0.$ $s = 2h.$
$l = 1.$	$\upsilon = 1.$ $\eta_1 = 0.$ $s = -h^2.$

$n = 2.$

$l = 0.$	$\upsilon = 2.$ $\eta_1 = -0{,}79370h,\ \ \eta_2 = 0{,}79370h.$ $s = -1{,}17480h.$
$l = 1.$	$\upsilon = 1.$ $\eta_1 = 0.$ $s = -h^2.$
$l = 2.$	$\upsilon = 2.$ $\eta_1 = -0{,}5h,\ \ \eta_2 = 0{,}5h.$ $s = 0{,}5h^3.$

$n = 3.$

$l = 0.$	$\upsilon = 2.$ $\eta_1 = -0{,}79370h,\ \eta_2 = 0{,}79370h.$ $s = -1{,}17480h.$
$l = 1.$	$\upsilon = 3.$ $\eta_1 = -0{,}84090h,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 0{,}84090h.$ $s = 0{,}41421h^2.$
$l = 2.$	$\upsilon = 2.$ $\eta_1 = -0{,}5h,\ \eta_2 = 0{,}5h.$ $s = 0{,}5h^3.$
$l = 3.$	$\upsilon = 3.$ $\eta_1 = -0{,}70711h,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 0{,}70711h.$ $s = -0{,}25h^4.$

$n = 4.$

$l = 0.$	$\upsilon = 4.$ $\eta_1 = -0{,}89725h,\ \eta_2 = -0{,}60587h,\ \eta_3 = 0{,}60587h,\ \eta_4 = 0{,}89725h.$ $s = 0{,}83446h.$
$l = 1.$	$\upsilon = 3.$ $\eta_1 = -0{,}84090h,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 0{,}84090h.$ $s = 0{,}41421h^2.$
$l = 2.$	$\upsilon = 4.$ $\eta_1 = -0{,}87305h,\ \eta_2 = -0{,}37305h,\ \eta_3 = 0{,}37305h,\ \eta_4 = 0{,}87305h.$ $s = -0{,}15139h^3.$
$l = 3.$	$\upsilon = 3.$ $\eta_1 = -0{,}70711h,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 0{,}70711h.$ $s = -0{,}25h^4.$
$l = 4.$	$\upsilon = 4.$ $\eta_1 = -0{,}80902h,\ \eta_2 = -0{,}30902h,\ \eta_3 = 0{,}30902h,\ \eta_4 = 0{,}80902h.$ $s = 0{,}125h^5.$

$n = 5.$

	$\nu = 4.$
$l = 0.$	$\eta_{l_1} = -0{,}89725h,\ \eta_{l_2} = -0{,}60587h,\ \eta_{l_3} = 0{,}60587h,\ \eta_{l_4} = 0{,}89725h.$ $s = 0{,}83446h.$
	$\nu = 5.$
$l = 1.$	$\eta_{l_1} = -0{,}91682h,\ \eta_{l_2} = -0{,}67418h,\ \eta_{l_3} = 0,\ \eta_{l_4} = 0{,}67418h.\ \eta_{l_5} = 0{,}91682h.$ $s = -0{,}22772h^2.$
	$\nu = 4.$
$l = 2.$	$\eta_{l_1} = -0{,}87305h,\ \eta_{l_2} = -0{,}37305h,\ \eta_{l_3} = 0{,}37305h,\ \eta_{l_4} = 0{,}87305h.$ $s = -0{,}15139h^3.$
	$\nu = 5.$
$l = 3.$	$\eta_{l_1} = -0{,}89945h,\ \eta_{l_2} = -0{,}55589h,\ \eta_{l_3} = 0,\ \eta_{l_4} = 0{,}55589h,\ \eta_{l_5} = 0{,}89945h.$ $s = 0{,}05901h^4.$
	$\nu = 4.$
$l = 4.$	$\eta_{l_1} = -0{,}80902h,\ \eta_{l_2} = -0{,}30902h,\ \eta_{l_3} = 0{,}30902h,\ \eta_{l_4} = 0{,}80902h.$ $s = 0{,}125h^5.$
	$\nu = 5.$
$l = 5.$	$\eta_{l_1} = -0{,}86602h,\ \eta_{l_2} = -0{,}5h,\ \eta_{l_3} = 0,\ \eta_{l_4} = 0{,}5h,\ \eta_{l_5} = 0{,}86602h.$ $s = -0{,}0625h^6.$

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
Tome I, N° 6.

ESSAI D'UNE DÉTERMINATION

DE LA

VÉRITABLE FIGURE DE LA TERRE.

Par

T. F. de Schubert,
Général de l'Infanterie, membre honoraire de l'Académie.

(Avec une planche.)

Présenté à l'Académie le 8 avril 1859.

St.-PÉTERSBOURG, 1859.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
MM. Eggers et Comp. à St.-Pétersbourg, M. Samuel Schmidt à Riga
et M. Leopold Voss à Leipzig.

Prix: 35 Kop. = 12 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

Mai 1859. C. Vesséłofski, Secretaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

ESSAI D'UNE DÉTERMINATION

DE LA

VÉRITABLE FIGURE DE LA TERRE.

Par **T. F. de Schubert,**

Général de l'infanterie, membre honoraire de l'Académie.

I. Introduction.

Les travaux exécutés depuis un siècle et demi, pour déterminer la figure et la grandeur de la terre, n'ont, jusqu'à présent, amené aucun résultat satisfaisant. Ces opérations, faites par les savans les plus celèbres, avec les instrumens les plus parfaits, enfin avec tous les secours de la science, auraient dû, à ce qu'il paraît, résoudre définitivement cette question si intéressante. Cependant il n'en est pas ainsi. Chaque nouvelle mesure d'un arc de méridien ne fait qu'ajouter aux incertitudes, aux défauts d'accord, même aux contradictions, entre les différentes opérations; et pour écarter en partie ces discordances, on a eu recours, soit à supposer de graves erreurs dans plusieurs de ces mesures, soit à adopter l'existence d'irrégularités considérables dans la figure de la terre. Quoiqu'il n'y ait pas de doute, qu'il existe certainement des irrégularités locales dans la superficie de notre planète, cependant il nous paraît qu'il ne se présente aucun motif pour supposer que sa forme générale ne soit une figure régulière, et d'un autre côté, les noms des savans qui ont conduit les opérations des mesures des arcs de méridiens, ne nous permettent pas de supposer que de graves erreurs s'y soient glissées.

En examinant avec soin les résultats obtenus jusqu'à ce jour, il nous a paru, que le manque d'accord subsistant entre eux, ne provient pas autant de la discordance des mesures des arcs de méridiens entre elles, que de la manière dont on a cherché à en déduire des résultats.

On a toujours suivi un système invariable, celui de faire des rapprochemens entre chaque arc de méridien avec tous les autres, et chacune de ces combinaisons donnant des valeurs séparées pour le grand et le petit axe terrestre, il en résultait qu'on obtint un très grand nombre de déterminations, qui n'offraient cependant point d'ensemble.

Nous avons pensé, qu'en adoptant une marche différente, on pourrait parvenir à la détermination d'une figure de la terre qui satisferait à toutes les bonnes mesures d'arcs de

méridiens, en y admettant seulement des erreurs d'observations qui ne dépasseraient pas les limites permises. Ce travail, que nous présentons au public, ne peut être qu'une approximation; cependant on verra que le résultat en répond suffisamment aux conditions requises; et peut-être trouvera-t-on, que la voie indiquée par nous pourra, si elle est poursuivie avec plus d'habileté et par des méthodes plus rigoureuses, amener à une solution satisfaisante la question de la détermination de la figure et de la grandeur de la terre.

Nous commencerons par donner les résultats obtenus d'après les procédés employés actuellement, et ensuite nous procéderons au développement de la marche suivie par nous.

II. Résultats obtenus jusqu'à présent.

Deux arcs d'un méridien, mesurés sous des latitudes différentes, suffisent pour déterminer exactement son ellipse. Supposant que la terre est un solide de révolution et que par conséquent tous les méridiens sont égaux, on a comparé des arcs de méridiens mesurés sous des longitudes différentes, et par ces différentes combinaisons on a obtenu une quantité de résultats qui diffèrent tous l'un de l'autre.

Everest[1]) nous a donné un tableau complet des résultats obtenus jusqu'alors; mais comme quelques petites négligences s'étaient glissées dans les formules qu'il donne, et que depuis ce tems plusieurs grandes mesures d'arcs de méridiens ont été terminées, lesquelles n'avaient pu entrer dans son travail, nous avons refait tout son calcul, et nous présentons ici le résultat complet de ce qui a été obtenu par la méthode suivie jusqu'à ce jour.

Nous observerons que dans ce mémoire toutes les mesures linéaires sont exprimées en toises.

Faisant abstraction de quelques mesures qui ne paraissaient pas mériter de la confiance ou qui ont été remplacées par des mesures plus récentes, exécutées avec des instrumens plus perfectionnés, nous n'avons employé dans nos combinaisons que les arcs de méridiens suivans:

1. L'arc de Russie mesuré depuis 1820 jusqu'en 1851, par M. M. Hansteen, Selander, Struve et Tenner, sous la longitude de $44^\circ\ 23'\ 14''$.

2. L'arc des Indes orientales, mesuré depuis 1802 jusqu'en 1843, par M. M. Lambton et Everest, sous la longitude de $95^\circ\ 20'\ 0''$.

3. L'arc de France, mesuré depuis 1792 jusqu'à 1806 par M. M. Méchain, Delambre, Biot et Arago, sous la longitude de $20^\circ\ 0'\ 0''$.

4. L'arc du Cap de bonne espérance, terminé récemment par M. Maclear, sous la longitude de $36^\circ\ 8'\ 35''$.

5. L'arc du Pérou, mesuré en 1735 à 1746 par M. M. Bouguer et Condamine, sous la longitude de $298^\circ\ 44'\ 0''$.

[1]) An account of the measurement of two sections of the meridional arc of India, by Everest. 1 vol. 4-to London. 1847. pag. 424 sequ.

6. L'arc de Prusse, mesuré en 1831 à 1834 par M. M. Bessel et Bayer, sous la longitude de 38° 9′ 40″.

7. L'arc d'Angleterre, mesuré par M. M. Roy et Mudge, sous la longitude de 17° 39′ 50″.

8. L'arc de Pennsylvanie, mesuré en 1764 par M. M. Mason et Dixon, sous la longitude de 300° 9′ 50″.

Désignons par

a, le demi grand axe de la terre.

b, le demi petit axe de la terre.

e, l'excentricité de la terre.

γ, l'aplatissement de la terre $= \frac{1}{m}$

β et β', les latitudes des deux extrémités d'un arc mesuré.

S, l'arc du méridien entre les latitudes β et β', exprimé en toises.

$l = \beta - \beta'$.

$L = \beta + \beta'$.

alors nous aurons:

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$m = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\cos L . \sin l}{l . \sin 1''}$$

$$n = \frac{3^2 . 5}{2^6} - \frac{3.5}{2^4} \cdot \frac{\cos L . \sin l}{l . \sin 1''} + \frac{3.5}{2^7} \cdot \frac{\cos 2L . \sin 2l}{l . \sin 1''}$$

$$p = \frac{5^2 . 7}{2^8} - \frac{3.5^2 . 7}{2^9} \cdot \frac{\cos L \sin l}{l . \sin 1''} + \frac{3.5.7}{2^9} \cdot \frac{\cos 2L . \sin 2l}{l . \sin 1''} - \frac{5.7}{3.2^9} \cdot \frac{\cos 3L . \sin 3l}{l . \sin 1''}$$

$$\alpha = \frac{n - n'}{m - m'} - m'$$

$$\xi = \frac{p - p'}{m - m'} - n' - m' . \alpha$$

$$\upsilon = \frac{S . l' - S' . l}{(m - m') S' . l}$$

$$e^2 = \upsilon - \alpha . \upsilon^2 + (2\alpha^2 - \xi)\upsilon^3 . . . . . .$$

$$\gamma = \frac{1}{2} . e^2 + \frac{1}{8} . e^4 + \frac{1}{16} . e^6 . . . . . .$$

$$a = \frac{S . \operatorname{cosec} 1''}{l[1 - (1 - m)e^2 - (m - n)e^4 - (n - p)e^6]}$$

$$b = a - \gamma . a = a . \sqrt{(1 - e^2)}$$

Faisons:

$$k = \frac{1}{l . \sin 1''}$$

$$x = \frac{3}{4} . k . \cos L . \sin l$$

$$y = \frac{13}{128} \cdot k \cdot \cos 2L \cdot \sin 2l$$
$$z = \frac{35}{1536} \cdot k \cdot \cos 3L \cdot \sin 3l$$
$$f = 1 + m \cdot e^2 + n \cdot e^4 + p \cdot e^6$$

Alors les formules précédentes prendront l'expression suivante:

(1.) $m = \frac{3}{4} - x$

(2.) $n = \frac{45}{64} - \frac{3}{4} \cdot x + y$

(3.) $p = \frac{175}{256} - \frac{175}{128} \cdot x + \frac{7}{4} \cdot y - z$

(4.) $\alpha = \frac{n-n'}{m-m'} - m'$

(5.) $\zeta = \frac{p-p'}{m-m'} - n' - m' \cdot \alpha$

(6.) $\upsilon = \frac{1}{m-m'} \cdot \left(\frac{S.k}{S'.k'} - 1 \right)$

(7.) $e^2 = \upsilon - \alpha \cdot \upsilon^2 + (2\alpha^2 - \zeta)\upsilon^3 \ldots .$

(8.) $\gamma = \frac{1}{2} \cdot e^2 + \frac{1}{8} \cdot e^4 + \frac{1}{16} \cdot e^6 \ldots .$

(9.) $a = \frac{1}{(1-e^2)f} \cdot S.k = \frac{1}{(1-e^2)f'} \cdot S'.k'$

(10.) $b = a \cdot \sqrt{(1-e^2)} = a - \gamma . a$

Avec ces formules nous déterminerons d'abord les élémens pour chacun des huit arcs, et ensuite nous calculerons par les différentes combinaisons les résultats pour la figure de la terre.

1. L'ARC DE RUSSIE.

β Fuglenäs $= 70^\circ\ 40'\ 11''{,}3$
β′ Staronekrasofka $= 45\ \ 20\ \ 2{,}8$
$l = 25^\circ\ 20'\ 8''{,}5 = 91208''{,}5$
$L = 116\ \ 0\ 14{,}1$
$S = 1447786{,}783$ log. $S = 6{,}1607046.\ 3$
$m = 1{,}0682127.\ 6$ log. $m = 0{,}0286578.\ 2$
$n = 0{,}9747049.\ 5$ log. $n = 9{,}9888732.\ 2$
$p = 0{,}8489136.\ 2$ log. $p = 9{,}9288635.\ 2$
log. $k = \ 0{,}3543898.\ 0$
log. $x = -9{,}5027175.\ 4$
log. $y = -9{,}1010107.\ 7$
log. $z = +8{,}6894074.\ 6$

2. L'ARC DES INDES ORIENTALES.

β Kaliana $= 29^\circ\ 30'\ 48''{,}895$

β' Punnae$=8^\circ\ 9'\ 32''{,}298$
$l=21^\circ 21' 16''{,}597=76876''{,}597$
$L=37\ 40\ 21{,}193$

$S=1212878{,}1$	log. $S=6{,}0838172.\ 1$
$m=0{,}1700114.\ 5$	log. $m=9{,}2304782.\ 5$
$n=0{,}0320946.\ 0$	log. $n=8{,}5064319.\ 0$
$p=0{,}0065604.\ 1$	log. $p=7{,}8169310.\ 0$

log. $k=\ 0{,}4286309.\ 6$
log. $x=+9{,}7634194.\ 2$
log. $y=+8{,}7320342.\ 4$
log. $z=-8{,}3323968.\ 1$

3. L'ARC DE FRANCE.

β Dunkerque $=51^\circ\ 2'\ 8''{,}50$
β' Formentera$=38\ 39\ 56{,}11$
$l=12^\circ 22' 12''{,}39=44532''{,}39$
$L=89\ 42\ 4{,}61$

$S=705290{,}8$	log. $S=5{,}8483682.\ 0$
$m=0{,}7461201.\ 0$	log. $m=9{,}8728087.\ 6$
$n=0{,}4711280.\ 3$	log. $n=9{,}6731389.\ 3$
$p=0{,}2817777.\ 2$	log. $p=9{,}4499067.\ 1$

log. $k=\ 0{,}6657491.\ 2$
log. $x=+7{,}5888209.\ 4$
log. $y=-9{,}3563071.\ 4$
log. $z=-6{,}9982408.\ 3$

4. L'ARC DU CAP.

β Cape Point $=-34^\circ 21'\ 6''{,}26$
β' extrémité Septentrionale$=-29\ 44\ 17{,}66$
$l=\ 4^\circ 36' 48''{,}60=16608''{,}60$
$L=64\ \ 5\ 23{,}92$

$S=262467{,}64$	log. $S=5{,}4190757.\ 6$
$m=0{,}4226347.\ 2$	log. $m=9{,}6259651.\ 4$
$n=0{,}1496687.\ 2$	log. $n=9{,}1751311.\ 0$
$p=0{,}0497372.\ 4$	log. $p=8{,}6966816.\ 5$

log. $k=\ 1{,}0940921.\ 0$
log. $x=+9{,}5150326.\ 8$
log. $y=-9{,}1591146.\ 8$
log. $z=-8{,}8205305.\ 8$

5. L'ARC DU PÉROU.

β Tarqui $=-3^\circ 4' 32'',068$
β' Cotchesqui $=+0\ 2\ 31,387$
$l=3^\circ 7' 3'',455=11223'',455$
$L=3\ 2\ 0,681$

$S=176875,5$	log. $S=5,2476677.\ 3$
$m=0,0014202.\ 8$	log. $m=7,1523740.\ 0$
$n=0,0000031.\ 8$	log. $n=4,5024271.\ 0$
$p=0,0000001.\ 1$	log. $p=3,0413927.\ 0$

log. $k=\ 1,2642984.\ 7$
log. $x=+9,8752036.\ 6$
log. $y=+9,4308840.\ 5$
log. $z=+8,8280553.\ 1$

6. L'ARC DE PRUSSE.

β Memel $=55^\circ 43' 40'',446$
β' Truntz $=54\ 13\ 11,466$
$l=\ 1^\circ 30' 28'',980=5428'',980$
$L=109\ 56\ 52,912$

$S=86176,975$	log. $S=4,9353912.\ 9$
$m=1,0058462.\ 9$	log. $m=0,0025315.\ 1$
$n=0,8432011.\ 5$	log. $n=9,9259311.\ 8$
$p=0,6598054.\ 0$	log. $p=9,8194158.\ 6$

log. $k=\ 1,5797069.\ 0$
log. $x=-9,4079790.\ 9$
log. $y=-9,2546245.\ 4$
log. $z=+8,7712024.\ 6$

7. L'ARC D'ANGLETERRE.

β Clifton $=53^\circ 27' 31'',130$
β' Dunnose $=50\ 37\ \ 7,633$
$l=\ 2^\circ 50' 23'',497=10223'',497$
$L=104\ \ 4\ 38,763$

$S=162075,93$	log. $S=5,2097184.\ 6$
$m=0,9323500.\ 7$	log. $m=9,9695790.\ 3$
$n=0,7247581.\ 9$	log. $n=9,8601931.\ 1$
$p=0,5260899.\ 3$	log. $p=9,7210599.\ 7$

log. $k=\ 1,3048256.\ 2$
log. $x=-9,2609059.\ 6$

log. y=—9,3145084. 5
log. z=+8,6606549. 4

8. L'ARC DE PENNSYLVANIE.

β extrémité Septentrionale=39° 56′ 22″5
β' » méridionale =38 27 37,5
l = 1° 28′ 45″0=5325″0
L=78 24 0,0

S=84149,24	log. S=4,9250502. 5
m=0,5992083. 2	log. m=9,7775778. 3
n=0,2993087. 3	log. n=9,4761193. 6
p=0,1395861. 8	log. p=9,1448424. 6

log. k= 1,5881055. 0
log. x=+9,1783774. 0
log. y=—9,3330978. 0
log. z=—8,5907820. 0

Après avoir déterminé les valeurs numériques pour chacun des huit arcs mesurés, nous allons les comparer entre eux. Ces 24 combinaisons nous donneront le tableau complet des résultats qu'on pourra obtenir d'après la méthode employée jusqu'à present, et les énormes différences qui existent entre eux, différences qui ne pourront aucunément être mises sur le compte des erreurs d'observations, feront voir que l'on ne pourra se flatter de parvenir par cette méthode à un résultat satisfaisant.

Combinaisons:

de l'arc de Russie	a	b	w	e^2
avec l'arc des Indes.....	3272622,8	3261535,9	295,180	0,0067640. 5
» » de France.....	3272581,8	3261184,6	287,133	0,0069533. 0
» » du Cap.....	3272605,1	3261382,9	291,622	0,0068464. 4
» » du Pérou.....	3272629,4	3261590,5	296,464	0,0067347. 9
» » de Prusse.....	3274118,1	3273905,3	14501,157	0,0001379. 2
» » d'Angleterre....	3272079,7	3256909,4	215,688	0,0092511. 4
» » de Pennsylvanie..	3272034,8	3256515,7	210,839	0,0094634. 3
de l'arc des Indes				
avec l'arc de France.....	3272331,9	3261420,3	299,900	0,0066577. 5
» » du Cap.....	3272046,7	3261307,3	304,678	0,0065535. 2
» » du Pérou.....	3272101,8	3261328,2	303,718	0,0065742. 1
» » de Prusse.....	3274035,7	3262096,5	274,226	0,0072799. 7

	a	b	w	e^2
avec l'arc d'Angleterre	3271399,8	3261049,8	316,078	0,0063175. 4
» » de Pennsylvanie..	3264512,1	3258315,6	526,831	0,0037926. 7
de l'arc de France				
avec l'arc du Cap	3272401,3	3261354,8	296,248	0,0067397. 0
» » du Pérou.....	3272316,6	3261434,6	300,716	0,0066397. 4
» » de Prusse	3274022,5	3259824,6	230,395	0,0086539. 6
» » d'Angleterre	3271158,9	3262535,7	379,380	0,0052648. 1
» » de Pennsylvanie..	3279418,8	3254798,6	133,201	0,0149585. 1
de l'arc du Cap				
avec l'arc du Pérou.....	3272075,6	3261311,2	303,971	0,0065687. 6
» » de Prusse	3274032,3	3261577,8	262,864	0,0075936. 9
» » d'Angleterre	3271371,0	3261214,8	322,105	0,0061995. 3
» » de Pennsylvanie..	3259832,5	3259575,5	12667,850	0,0001578. 8
de l'arc du Pérou				
avec l'arc de Prusse.....	3274038,8	3262292,4	278,727	0,0071626. 1
» » d'Angleterre	3271409,8	3260983,4	313,788	0,0063635. 5
» » de Pennsylvanie..	3265547,3	3258063,3	436,272	0,0045777. 5
de l'arc de Prusse				
avec l'arc d'Angleterre	3273979,0	3245754,3	115,989	0,0171685. 7
» » de Pennsylvanie..	3274069,0	3255953,7	180,745	0,0110347. 2
de l'arc d'Angleterre				
avec l'arc de Pennsylvanie..	3272228,8	3256401,2	206,738	0,0096507. 3

III. Détermination du petit axe.

Les rapprochemens precédens ont tous été faits dans trois suppositions:

a. Que les méridiens terrestres sont des ellipses.

b. Que leur petit axe est en même tems l'axe de rotation de la terre.

c. Que la terre est un solide de révolution, c'est-à-dire que tous les méridiens sont égaux.

Aucune de ces trois suppositions n'est prouvée; mais si nous sommes forcés d'admettre les deux premières pour avoir une base pour nos calculs, et parceque nos observations ne sont ni assez nombreuses ni assez exactes pour pouvoir établir une hypothèse différente, il n'en est pas de même de la troisième. Trop de faits nous font voir que les méridiens ne

sont pas égaux; or dès que l'on admet que les méridiens peuvent être des ellipses différentes, toutes les comparaisons faites entre des arcs de méridiens mesurés sous différentes longitudes, ne peuvent donner que des résultats tout à fait illusoires, et il faudra chercher une autre voie pour déterminer la véritable figure de la terre.

Il est évident que quelle que soit la différence de la figure des différens méridiens, le petit axe de la terre sera le petit axe commun de toutes leurs ellipses. Nous essayerons de déterminer ce petit axe, non par un rapprochement de différentes mesures, mais par chaque arc séparément, et nous choisirons à cet effet les trois arcs les plus grands et qui ont été mesurés avec le plus d'exactitude: ce sont les arcs de Russie, des Indes, et de France. Nous diviserons chacun de ces arcs en deux parties, autant que possible, égales, et la comparaison de ces parties entre elles et avec l'arc total, nous donnera pour chaque arc trois déterminations du petit axe indépendantes des déterminations obtenues par l'un des autres arcs. Les mêmes formules nous serviront à cet effet:

1. ARC DE RUSSIE.

β Fuglenäs $= 70^\circ\,40'\,11''{,}3$
β' Dorpat $= 58\;\;22\;\;47{,}6$ $\Big\}\; S = 703022{,}299$
β'' Staronekrasofka $= 45\;\;20\;\;2{,}8$ $\Big\}\; S = 744764{,}484$

A. Arc septentrional.

$l = 12^\circ\,17'\,23''{,}7 = 44243''{,}7$
$L = 129\;\;2\;\;58{,}9$

$S = 703022{,}299$	log. $S = 5{,}8469690.\ 8$
$m = 1{,}2188806.\ 6$	log. $m = 0{,}0859612.\ 4$
$n = 1{,}2423631.\ 9$	log. $n = 0{,}0942485.\ 2$
$p = 1{,}1859159.\ 0$	log. $p = 0{,}0740539.\ 7$

log. $k = \quad 0{,}6685736.\ 0$
log. $x = -\,9{,}6710623.\ 2$
log. $y = -\,8{,}6708267.\ 2$
log. $z = +\,8{,}7537034.\ 4$

B. Arc méridional.

$l = 13^\circ\;\;2'\,44''{,}8 = 46964''{,}8$
$L = 103\;\;42\;\;50{,}4$

$S = 744764{,}484$	log. $S = 5{,}8720189.\ 9$
$m = 0{,}9262742.\ 9$	log. $m = 9{,}9667396.\ 3$
$n = 0{,}7225546.\ 3$	log. $n = 9{,}8588706.\ 8$
$p = 0{,}5314516.\ 1$	log. $p = 9{,}7254637.\ 0$

log. $k = \quad 0{,}6426526.\ 0$
log. $x = -\,9{,}2461889.\ 3$

log. $y = -9{,}3030085.\ 0$
log. $z = +8{,}6185072.\ 9$

C. Arc total.

$l = 25^\circ\ 20'\ 8''{,}5 = 91208''{,}5$
$L = 116\quad 0\ 14{,}1$
$S = 1447786{,}783$ log. $S = 6{,}1607046.\ 3$
$m = 1{,}0682127.\ 6$ log. $m = 0{,}0286578.\ 2$
$n = 0{,}9747049.\ 5$ log. $n = 9{,}9888732.\ 2$
$p = 0{,}8489136.\ 2$ log. $p = 9{,}9288635.\ 2$
log. $k = 0{,}3543898.\ 0$
log. $x = -9{,}5027175.\ 4$
log. $y = -9{,}1010107.\ 7$
log. $z = +8{,}6894074.\ 6$

Par la combinaison de A et B on trouve:

$e^2 = 0{,}0068218.\ 4$ log. $e^2 = 7{,}8339015.\ 0$
$\gamma = 0{,}0034167.\ 6$ log. $\gamma = 7{,}5336144.\ 0$
$w = 292{,}675$
$a = 3272610{,}1$ log. $a = 6{,}5148942.\ 1$
$b = 3261428{,}0$ log. $b = 6{,}5134078.\ 6$

Par la combinaison de A avec C on trouve:

$e^2 = 0{,}0068208.\ 4$ log. $e^2 = 7{,}8338379.\ 0$
$\gamma = 0{,}0034162.\ 6$ log. $\gamma = 7{,}5335509.\ 0$
$w = 292{,}718$
$a = 3272610{,}4$ log. $a = 6{,}5148942.\ 5$
$b = 3261430{,}0$ log. $b = 6{,}5134081.\ 0$

Par la combinaison de B avec C, on trouve:

$e^2 = 0{,}0068229.\ 5$ log. $e^2 = 7{,}8339722.\ 0$
$\gamma = 0{,}0034173.\ 2$ log. $\gamma = 7{,}5336856.\ 0$
$w = 292{,}627$
$a = 3272610{,}5$ log. $a = 6{,}5148942.\ 7$
$b = 3261426{,}7$ log. $b = 6{,}5134076.\ 9$

La moyenne de ces trois déterminations sera:

$e^2 = 0{,}0068218.\ 8$ log. $e^2 = 7{,}8339038.\ 7$
$\gamma = 0{,}0034167.\ 8$ log. $\gamma = 7{,}5336169.\ 7$
$w = 292{,}674$
$a = 3272610{,}3$ log. $a = 6{,}5148942.\ 4$
$b = 3261428{,}7$ log. $b = 6{,}5134078.\ 8$

2. ARC DES INDES.

β Kaliana $= 29° 30' 48'',895$
β' Damargida $= 18 \quad 3 \quad 15,864$ $\Big\}\ S = 651188,25$
β'' Punnae $= \quad 8 \quad 9 \quad 32,298$ $\Big\}\ S = 561690,14$

A. Arc septentrional.

$l = 11° 27' 33'',031 = 41253'',031$
$L = 47 \quad 34 \quad 4,759$
$S = 651188,25$ log. $S = 5,8137065.\ 1$
$m = 0,2473306.\ 8$ log. $m = 9,3932780.\ 0$
$n = 0,0543621.\ 4$ log. $n = 8,7352965.\ 2$
$p = 0,0117810.\ 4$ log. $p = 8,0711836.\ 8$
log. $k = \quad 0,6989692.\ 7$
log. $x = +\ 9,7012823.\ 8$
log. $y = -\ 8,3101863.\ 6$
log. $z = -\ 8,7090688.\ 6$

B. Arc méridional.

$l = \quad 9° 53' 43'',566 = 35623'',566$
$L = 26 \quad 12 \quad 48,162$
$S = 561690,14$ log. $S = 5,7494967.\ 6$
$m = 0,0804736.\ 0$ log. $m = 8,9056534.\ 0$
$n = 0,0063081.\ 0$ log. $n = 7,7998986.\ 0$
$p = 0,0005147.\ 4$ log. $p = 6,7115879.\ 0$
log. $k = \quad 0,7626877.\ 0$
log. $x = +\ 9,8257676.\ 6$
log. $y = +\ 9,1464102.\ 0$
log. $z = +\ 8,1095913.\ 7$

C. Arc total.

$l = 21° 21' 16'',597 = 76876'',597$
$L = 37 \quad 40 \quad 21,193$
$S = 121287,3$ log. $S = 6,0838172.\ 1$
$m = 0,1700114.\ 3$ log. $m = 9,2304782.\ 0$
$n = 0,0320945.\ 8$ log. $n = 8,5064316.\ 9$
$p = 0,0065604.\ 2$ log. $p = 7,8169316.\ 0$
log. $k = \quad 0,4286309.\ 6$
log. $x = +\ 9,7634194.\ 3$
log. $y = +\ 8,7320342.\ 4$
log. $z = -\ 8,3323967.\ 9$

Par la combination de A avec B, on trouve:

$e^2 = 0{,}0067744.\ 1$ log. $e^2 = 7{,}8308714.\ 0$
$\gamma = 0{,}0033929.\ 7$ log. $\gamma = 7{,}5305801.\ 0$
$w = 294{,}727$
$a = 3272651{,}0$ log. $a = 6{,}5148997.\ 3$
$b = 3261547{,}3$ log. $b = 6{,}5134236.\ 3$

Par la combinaison de A avec C, on trouve:

$e^2 = 0{,}0067746.\ 5$ log. $e^2 = 7{,}8308869.\ 0$
$\gamma = 0{,}0033930.\ 9$ log. $\gamma = 7{,}5305954.\ 0$
$w = 294{,}707$
$a = 3272651{,}8$ log. $a = 6{,}5148998.\ 3$
$b = 3261547{,}7$ log. $b = 6{,}5134237.\ 2$

Par la combinaison de B avec C, on trouve:

$e^2 = 0{,}0067740.\ 7$ log. $e^2 = 7{,}8308497.\ 0$
$\gamma = 0{,}0033928.\ 0$ log. $\gamma = 7{,}5305583.\ 0$
$w = 294{,}742$
$a = 3272650{,}05$ log. $a = 6{,}5148996.\ 1$
$b = 3261547{,}1$ log. $b = 6{,}5134236.\ 4$

La moyenne de ces trois combinaisons sera:

$e^2 = 0{,}0067743.\ 8$ log. $e^2 = 7{,}8308693.\ 3$
$\gamma = 0{,}0033929\text{-}\ 5$ log. $\gamma = 7{,}5305779.\ 3$
$w = 294{,}725$
$a = 3272650{,}9$ log. $a = 6{,}5148997.\ 2$
$b = 3261547{,}4$ log. $b = 6{,}5134236.\ 6$

3. ARC DE FRANCE.

β Dunkerque $= 51^\circ\ 2'\ 8''{,}50$
β' Carcassonne $= 43\ \ 12\ 54{,}30$ } $S = 446109{,}6$
β'' Formentera $= 38\ \ 39\ 56{,}11$ } $S = 259181{,}2$

A. Arc septentrional.

$l = 7^\circ\ 49'\ 14''{,}20 = 28154''{,}20$
$L = 94\ \ 15\ \ 2{,}80$
$S = 446109{,}6$ log. $S = 5{,}6494415.\ 9$
$m = 0{,}8054190.\ 6$ log. $m = 9{,}9060219.\ 3$
$n = 0{,}5434675.\ 6$ log. $n = 9{,}7351736.\ 5$
$p = 0{,}3440609.\ 5$ log. $p = 9{,}5366354.\ 0$
log. $k = 0{,}8648819.\ 0$

log. $x = -8{,}7436592.\ 1$
log. $y = -9{,}3597050.\ 8$
log. $z = +8{,}1664678.\ 3$

B. Arc méridional.

$l = 4^\circ\ 32'\ 58''{,}19 = 16378''{,}19$
$L = 81\ \ 52\ \ 50{,}41$
$S = 259181{,}2$ log. $S = 5{,}4136035.\ 3$
$m = 0{,}6441848.\ 7$ log. $m = 9{,}8090104.\ 9$
$n = 0{,}3467761.\ 9$ log. $n = 9{,}5400492.\ 4$
$p = 0{,}1747126.\ 9$ log. $p = 9{,}2423245.\ 1$
log. $k = 1{,}1001591.\ 1$
log. $x = +9{,}0245477.\ 8$
log. $y = -9{,}3504029.\ 5$
log. $z = -8{,}4460400.\ 1$

C. Arc total.

$l = 12^\circ\ 22'\ 12''{,}39 = 44532''{,}39$
$L = 89\ \ 42\ \ 4{,}61$
$S = 705290{,}8$ log. $S = 5{,}8483682.\ 0$
$m = 0{,}7461201.\ 0$ log. $m = 9{,}8728087.\ 6$
$n = 0{,}4711280.\ 4$ log. $n = 9{,}6731389.\ 4$
$p = 0{,}2817777.\ 4$ log. $p = 9{,}4499067.\ 4$
log. $k = 0{,}6657491.\ 2$
log. $x = +7{,}5888201.\ 8$
log. $y = -9{,}3563071.\ 4$
log. $z = -6{,}9982408.\ 3$

Par la combinaison de A avec B, on trouve:

$e^2 = 0{,}0079778.\ 0$ log. $e^2 = 7{,}9018831.\ 0$
$\gamma = 0{,}0039968.\ 9$ log. $\gamma = 7{,}6017222.\ 0$
$w = 250{,}195$
$a = 3273448{,}1$ log. $a = 6{,}5150054.\ 7$
$b = 3260364{,}4$ log. $b = 6{,}5132661.\ 8$

Par la combinaison de A avec C, on trouve:

$e^2 = 0{,}0079771.\ 0$ log. $e^2 = 7{,}9018450.\ 0$
$\gamma = 0{,}0039965.\ 3$ log. $\gamma = 7{,}6016891.\ 0$
$w = 250{,}217$
$a = 3273447{,}75$ log. $a = 6{,}5150054.\ 2$
$b = 3260365{,}2$ log. $b = 6{,}5132663.\ 0$

Par la combinaison de B avec C, on trouve:

$e^2 = 0{,}0079780.\ 8$	$\log.\ e^2 = 7{,}9018984.\ 0$
$\gamma = 0{,}0039970.\ 3$	$\log.\ \gamma = 7{,}6017374.\ 0$
$w = 250{,}186$	
$a = 3273448{,}9$	$\log.\ a = 6{,}5150055.\ 8$
$b = 3260364{,}6$	$\log.\ b = 6{,}5132662.\ 1$

La moyenne de ces trois combinaisons sera:

$e^2 = 0{,}0079776.\ 6$	$\log.\ e^2 = 7{,}9018755.\ 0$
$\gamma = 0{,}0039968.\ 2$	$\log.\ \gamma = 7{,}6017162.\ 3$
$w = 250{,}199$	
$a = 3273448{,}2$	$\log.\ a = 6{,}5150054.\ 9$
$b = 3260364{,}7$	$\log.\ b = 6{,}5132662.\ 3$

En examinant ces trois résultats, nous voyons d'abord que l'arc de Russie s'accorde très bien avec celui des Indes, mais que l'arc de France donne un résultat dont la différence avec les deux autres est tellement considérable qu'elle ne peut aucunement être mise sur le compte d'une erreur dans l'opération de la mesure. Mais une legère erreur dans la latitude de Carcasson ne suffirait pour expliquer ce désaccord. En effet, tout en supposant que l'arc total entre Dunkerque et Formentera soit parfaitement juste, ainsi que les latitudes des deux extrémités, chaque petite variation dans la latitude de Carcassonne, qui divise l'arc total en deux arcs partiels, donnerait une ellipse différente pour le méridien terrestre, et des valeurs différentes pour a et b. Ainsi, dans le cas présent, il suffirait pour annuler toute différence et mettre l'arc de France en parfait accord avec les deux autres, de supposer que la latitude de Carcassonne fut $= 43^\circ\,12'\,56''{,}26$ au lieu de $43^\circ\,12'\,54''{,}30$, et certainement cette différence de $1''{,}96$ ne dépasse ni les limites des erreurs d'observations, ni celle des attractions locales qui pourraient avoir eu lieu à la détermination de la latitude de cet endroit. Cependant nous préferons écarter entièrement l'arc de France dans la détermination du petit axe, et nous la baserons uniquement sur les deux arcs: de Russie et des Indes.

Nous avons trouvé par:

	l'arc de Russie.	l'arc des Indes.
$e^2 =$	$0{,}0068218.\ 8$	$0{,}0067743.\ 8$
$\gamma =$	$0{,}0034167.\ 8$	$0{,}0033929.\ 5$
$w =$	$292{,}674$	$294{,}725$
$a =$	$3272610{,}3$	$3272650{,}9$
$b =$	$3261428{,}2$	$3261547{,}4$
$\log. b =$	$6{,}5134078.\ 8$	$6{,}5134236.\ 6$

Si nous donnons à l'arc de Russie un poids = 2, et à celui des Indes un poids = 1, nous obtenons pour moyenne:

$$b = 3261467{,}9$$
$$\log. b = 6{,}5134131.\ 5$$

et le logarithme de correction sera:

pour l'arc de Russie = + 0,0000052. 7
pour l'arc des Indes = — 0,0000105. 1

ou pour la longueur totale des deux arcs mesurés la correction sera:

pour l'arc de Russie = + 17,623 toises
pour l'arc des Indes = — 25,808 »

Ces erreurs ne paraîtront pas trop grandes si on prend en considération qu'elles expriment non seulement la totalité des erreurs géodésiques, mais aussi la totalité des erreurs astronomiques commises et des attractions locales; enfin qu'une différence de 1″ dans l'amplitude de l'arc de Russie, et de 1″,5 dans celle de l'arc des Indes, ferait entièrement disparaître ce désaccord. Nous nous arrêterons donc à la valeur trouvée du petit demi-axe:

$$b = 3261467{,}9$$

et avec elle nous trouverons les élémens pour les ellipses des deux méridiens de Dorpat et de Kaliana.

Méridien de Dorpat.

$e^2 = 0{,}0068218.\ 8$	$\log. e^2 = 7{,}8339038.\ 7$
$\gamma = 0{,}0034167.\ 8$	$\log. \gamma = 7{,}5336169.\ 7$
$w = 292{,}674$	
$a = 3272650{,}13$	$\log. a = 6{,}5148995.\ 1$
$b = 3261467{,}9$	$\log. b = 6{,}5134131.\ 5$

Méridien de Kaliana.

$e^2 = 0{,}0067743.\ 8$	$\log. e^2 = 7{,}8308693.\ 3$
$\gamma = 0{,}0033929.\ 5$	$\log. \gamma = 7{,}5305779.\ 3$
$w = 294{,}725$	
$a = 3272581{,}32$	$\log. a = 6{,}5148892.\ 1$
$b = 3261467{,}9$	$\log. b = 6{,}5134131.\ 5$

IV. Détermination de l'équateur.

En supposant que l'équateur soit une ellipse, et nous ne pouvons supposer autre chose dès que nous admettons que la terre soit un corps régulier et que l'équateur ne soit pas un cercle; en faisant cette supposition, disons nous, il est évident que, si nous connaissions la figure et la grandeur de cette ellipse et le petit axe terrestre, toute la figure de la terre serait déterminée. Nous venons de trouver le petit axe, il s'agit donc maintenant de trouver la courbe de l'équateur.

Nous avons trouvé au paragraphe précédent deux demi-diamètres de l'équateur, appartenans aux méridiens de Dorpat et de Kaliana. Mais deux points ne suffisant pas pour déterminer une courbe, nous devrons nécéssairement en déterminer un troisième.

Nous choisirons à cet effet le méridien de l'arc du Pérou, qui présente le plus d'avantages, tant à cause de ce qu'il est situé le plus à l'occident, et parceque cet arc se trouve sous l'équateur même.

Nous connaissons du § II les valeurs de S, l, L, et k pour le méridien du Pérou, et nous connaissons encore, b; avec ces données on trouvera aisément, e^2, γ, et a, d'après les formules suivantes. On commencera par trouver approximativement e^2, en négligeant les puissances élèvées de e, d'après la formule:

$$(11.)\quad e'^2 = 4 \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{k} - \frac{S}{b}}{3 \cdot \sin l \cdot \cos L - \frac{1}{k}} \right\}$$

ensuite nous trouverons:

$$(12.)\quad K = \frac{1}{k} + \frac{13}{64} \cdot e'^4 \cdot \frac{1}{k} - \frac{9}{16} \cdot e'^4 \cdot \sin l \cdot \cos L + \frac{15}{128} \cdot e'^4 \cdot \sin 2\,l \cdot \cos 2\,L$$

$$(13.)\quad e^2 = 4 \cdot \left\{ \frac{K - \frac{S}{b}}{3 \cdot \sin l \cdot \cos L - \frac{1}{k}} \right\}$$

$$(8.)\quad \gamma = \frac{1}{2} \cdot e^2 + \frac{1}{8} \cdot e^4 + \frac{1}{16} \cdot e^6 \ldots .$$

$$(14.)\quad a = \frac{b}{1-\gamma}$$

Nous aurons donc:

$b = 3261467{,}9$ log. $b = 6{,}5134131.\ 5$
$S = 176875{,}5$ log. $S = 5{,}2476676.\ 3$
$l = 3^\circ\ 7'\ 3''{,}455$
$L = 3\ \ 2\ \ 0{,}681$
log. $k = 1{,}2642984.\ 7$

d'où nous trouvons:

$$\frac{1}{k} = 0{,}0544128.\ 7$$

$K = 0{,}0544125.\ 4$

$e^2 = 0{,}0066596.\ 5$ $\quad \log.\ e^2 = 7{,}8234515.\ 0$

$\gamma = 0{,}0033353.\ 8$ $\quad \log.\ \gamma = 7{,}5231453.\ 0$

$w = 299{,}816$

$1 - \gamma = 0{,}9966646.\ 2$ $\quad \log.\ (1-\gamma) = 9{,}9985490.\ 7$

$a = 3272382{,}8$ $\quad \log.\ a = 6{,}5148640.\ 8$

Nous connaissons donc à présent trois rayons de l'équateur, qui suffisent pour déterminer cette courbe, leurs longitudes étant également connues, et par suite les angles entre ces rayons. En les désignant par r, r', r''..... et leurs points d'intersection avec l'équateur par m, m', m''....., nous avons:

			Longitude.	
	$m.$	Arc de Pérou	$298°\ 44'\ 0''$	$r = 3272382{,}8$
Fig. I.	$m^{\text{VIII}}.$	Arc de Russie	$44\ \ 23\ 10$	$r^{\text{VIII}} = 3272650{,}13$
	$m^{\text{IX}}.$	Arc des Indes	$95\ \ 20\ \ 0$	$r^{\text{IX}} = 3272581{,}32$

Si l'on connaît deux diamètres conjugués d'une ellipse, on peut en déduire son grand et son petit axe. Nous chercherons donc à trouver par les valeurs connues deux diamètres conjugués.

Dans le triangle mOm^{VIII}, sont connus:

$$mOm^{\text{VIII}} = 105°\ 39'\ 10''$$
$$mO = r = 3272382{,}8$$
$$m^{\text{VIII}}O = r^{\text{VIII}} = 3272650{,}1$$

d'où nous trouvons:

$$mm^{\text{VIII}}O = 37°\ 10'\ 18''{,}594$$
$$m^{\text{VIII}}mO = 37\ \ 10\ \ 31{,}406$$
$$mm^{\text{VIII}} = 5215137{,}1$$

Si nous faisons $m^{\text{VII}}p = \frac{1}{2}.\, mm^{\text{VII}}$, nous aurons dans le triangle $m^{\text{VII}}pO$

$$pm^{\text{VII}}O = 37°\ 10'\ 18''{,}594$$
$$m^{\text{VII}}p = y' = 2607568{,}6$$
$$m^{\text{VII}}O = r^{\text{VII}} = 3272650{,}1$$

d'où nous trouvons:

$$pOm^{\text{VII}} = 52°\ 49'\ 23''{,}77$$
$$m^{\text{VII}}pO = 90\ \ 0\ 17{,}63$$
$$pO = x' = 1977360{,}0$$

Si par le centre O nous menons une parallèle à mm^{VII}, cette ligne avec la ligne pO, seront deux diamètres conjugués,

$$A'B' = 2\,a' \quad \text{et} \quad C'D' = 2\,c'$$

menant ensuite par le point m^{IX} une parallèle à mm^{VII}, nous aurons dans le triangle qOm^{IX}

$$m^{IX}qO = 89^\circ\ 59'\ 42''37$$
$$qOm^{IX} = 76\ \ 13\ \ 46{,}23$$
$$qm^{IX}O = 13\ \ 46\ \ 31{,}40$$
$$m^{IX}O = r^{IX} = 3272581{,}3$$

d'où l'on trouve:

$$qm^{IX} = y'' = 3178517{,}4$$
$$qO\ \ = x'' = \ \ 779255{,}0$$

Ayant trouvé les valeurs de x', x'', y' et y^b, nous trouverons les demi-diamètres conjugués, a' et c', par les formules suivantes:

$$(15.)\quad a' = \tfrac{1}{2}\,.\,A'B' = \sqrt{\frac{x'^2.y''^2 - y'^2.x''^2}{y''^2 - y'^2}}$$

$$(16.)\quad c' = \tfrac{1}{2}\,.\,C'D' = \sqrt{\frac{x'^2.y''^2 - y'^2.x''^2}{x'^2 - x''^2}}$$

$$a' = 3272670{,}1 \qquad \log.\ a' = 6{,}5149022.\ 2$$
$$c' = 3272251{,}5 \qquad \log.\ c' = 6{,}5148467.\ 0$$

et la longitude de $a' = 81^\circ\ 33'\ 29''$.

Nommons α l'angle aigu formé par les deux diamètres conjugués, et mettons:

$$(17.)\quad a'^2 + c'^2 = d^2, \text{ et}$$
$$(18.)\quad a'.c'.\sin\alpha = h^2$$

alors, en désignant par:

$$AB = 2\,a, \text{ et } CD = 2\,c$$

le grand et le petit axe de l'équateur, nous trouverons:

$$(19.)\quad a = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 + 2\,h^2} + \sqrt{d^2 - 2\,h^2}\right)$$
$$(20.)\quad c = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 + 2\,h^2} - \sqrt{d^2 - 2\,h^2}\right)$$

et nous aurons:

$$a = 3272645{,}2 \qquad \log.\ a = 6{,}5148989.\ 0$$
$$c = 3272277{,}0 \qquad \log.\ c = 6{,}5148500.\ 3$$

Pour connaître exactement la position de l'équateur, il nous reste encore à déterminer l'angle entre le grand axe de l'équateur et l'un des deux diamètres conjugués; nommons cet angle θ, alors:

$$(21.)\quad \operatorname{tang}\theta = -\tfrac{1}{2}\,.\operatorname{tang}\alpha\left(1 - \tfrac{c^2}{a^2}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,.\operatorname{tang}^2\alpha\left(1 - \tfrac{c^2}{a^2}\right)^2 - \tfrac{c^2}{a^2}}$$

d'où nous trouvons:

$\theta = 26° 16' 48''{,}1$, et la longitude du grand axe de l'équateur $= 55° 16' 40''$.

La méthode que nous avons suivie pour la détermination de l'équateur, quoique tout-à fait rigoureuse en théorie, ne peut, dans le cas présent, donner qu'une approximation, l'ellipse en question ne s'écartant que très peu d'un cercle, et les deux diamètres conjugués étant toujours presque perpendiculaires l'un à l'autre. Mais nous avons un moyen pour vérifier les résultats obtenus, et pour les corriger.

Par le petit axe, b, nous avons déterminé trois rayons de l'équateur: r, r^{VII} et r^{IX}; si, avec les valeurs trouvées de a, c et θ nous calculons les valeurs de ces mêmes rayons, ces dernières déterminations devront donner les mêmes résultats dans le cas que a, c et θ fussent exacts. Dans le cas contraire il-y-aurait une différence entre les deux déterminations, et nous pourrons alors par tâtonnement changer les valeurs de a, c et θ jusqu'à ce que les deux résultats coincident.

Soit r un rayon de l'équateur, et φ l'angle qu'il fait avec le grand axe a; alors nous avons:

$$(22.) \quad r = \frac{a \cdot c}{\sqrt{(a^2 \cdot \sin^2\varphi + c^2 \cdot \cos^2\varphi)}}$$

Nous connaissons:

$a = 3272645{,}2$	log. $a = 6{,}5148989.\ 0$
$c = 3272277{,}0$	log. $b = 6{,}5148500.\ 3$
$\varphi = 63° 27' 20''$	
$\varphi^{\text{VII}} = 169\ \ 6\ 30$	
$\varphi^{\text{IX}} = 220\ \ 3\ 20$	

d'où nous trouverons:

$$r = 3272349{,}9$$
$$r^{\text{VII}} = 3272631{,}8$$
$$r^{\text{IX}} = 3272491{,}8$$

Ces résultats diffèrent des premières déterminations, et sont tous trop petits; les différentes erreurs sont:

pour $r = -32{,}9$ toises
» $r^{\text{VII}} = -18{,}3$ »
» $r^{\text{IX}} = -89{,}5$ »

Si nous faisons aux mesures linéaires une correction dont le logarithme serait:

log. Corr. $= 0{,}0000035.\ 0$

et que nous supposons la longitude du grand axe de l'équateur $= 58° 44' 0''$ nous parviendrons à un résultat qui laissera peu à désirer. Nous aurons alors:

$a = 3272671.\ 5$ log. $a = 6{,}5149024.\ 6$ $\varphi = 0° 0' 0''$

$r = 3272395{,}0$	log. $r = 6{,}5148657.\ 7$	$\varphi = 60°\ 0'\ 0''$
$c = 3272303{,}0$	log. $c = 6{,}5148535.\ 3$	$\varphi = 90\ 0\ 0$
$r^{\text{VIII}} = 3272650{,}1$	log. $r^{\text{VIII}} = 6{,}5148996.\ 1$	$\varphi^{\text{VIII}} = 165\ 39\ 10$
$r^{\text{IX}} = 3272540{,}4$	log. $r^{\text{IX}} = 6{,}5148850.\ 5$	$\varphi^{\text{IX}} = 216\ 36\ 0$

et les différences avec les premiers résultats sont:

pour $r = +12{,}2$ toises
» $r^{\text{VIII}} = 0{,}0$ »
» $r^{\text{IX}} = -40{,}9$ »

Cet accord nous paraît être très satisfaisant, et nous nous y arrêterons.

V. Détermination des méridiens.

Nous allons actuellement déterminer les ellipses des méridiens des arcs mesurés ainsi que de ceux de quelques autres points dont nous nous servirons dans la suite. Tous ces méridiens ont en commun le petit axe, b, qui est le petit axe de la terre, et leur grand axe sera le rayon de l'équateur, r, r', r''..... de leurs intersections avec cette courbe, dont les longitudes sont connues. Nous avons dont toutes les données nécessaires pour calculer leurs élémens, et nous nous bornerons à en donner le tableau, sans entrer dans les détails du calcul.

Fig. II.

A. Méridien du grand axe de l'équateur.

Longitude $= 238°\ 44'\ 0''$.
$\varphi = 0°\ 0'\ 0''$.

$a = 3272671{,}5$	log. $a = 6{,}5149024.\ 6$
$e^2 = 0{,}0068351.\ 3$	log. $e^2 = 7{,}8347468.\ 0$
$\gamma = 0{,}0034233.\ 8$	log. $\gamma = 7{,}5344551.\ 4$
$w = 292{,}109$	

m. Méridien de l'arc du Pérou.

Longitude $= 298°\ 44'\ 0''$.
$\varphi = 60°\ 0'\ 0''$.

$r = 3272395{,}0$	log. $r = 6{,}5148657.\ 7$
$e^2 = 0{,}0066674.\ 0$	log. $e^2 = 7{,}8239565.\ 0$
$\gamma = 0{,}0033391.\ 7$	log. $\gamma = 7{,}5236391.\ 3$
$w = 299{,}475$	

m'. Méridien de l'arc de Pennsylvanie.

Longitude $= 300°\ 9'\ 50''$. (Washington.)

$\varphi' = 61° 25' 50''.$

$r' = 3272387,7$	log. $r' = 6,5148647.\ 2$
$e'^2 = 0,0066624.\ 0$	log. $e'^2 = 7,8236307.\ 0$
$\gamma' = 0,0033369.\ 5$	log. $\gamma' = 7,5233499.\ 8$
$w' = 299,675$	

C. Méridien du petit axe de l'équateur.

Longitude $= 328° 44' 0''.$

$\varphi = 90° 0' 0''.$

$c = 3272303,2$	log. $c = 6,5148535.\ 3$
$e^2 = 0,0066112.\ 3$	log. $e^2 = 7,8202823.\ 0$
$\gamma = 0,0033112.\ 2$	log. $\gamma = 7,5199873.\ 7$
$w = 302,004$	

m^{II}. Méridien de l'arc d'Angleterre.

Longitude $= 17° 39' 50''.$ (Greenwich)

$\varphi^{\text{II}} = 138° 55' 50''.$

$r^{\text{II}} = 3272512,8$	log. $r^{\text{II}} = 6,5148813.\ 7$
$e^{\text{II}2} = 0,0067384.\ 0$	log. $e^{\text{II}2} = 7,8285568.\ 0$
$\gamma^{\text{II}} = 0,0033750.\ 5$	log. $\gamma^{\text{II}} = 7,5282804.\ 3$
$w^{\text{II}} = 296,292$	

m^{III}. Méridien de l'arc de France.

Longitude $= 20° 0' 0''.$ (Paris.)

$\varphi^{\text{III}} = 141° 16' 0''.$

$r^{\text{III}} = 3272527,7$	log. $r^{\text{III}} = 6,5148833.\ 1$
$e^{\text{III}2} = 0,0067475.\ 8$	log. $e^{\text{III}2} = 7,8291480.\ 0$
$\gamma^{\text{III}} = 0,0033795.\ 9$	log. $\gamma^{\text{III}} = 7,5288639.\ 9$
$w^{\text{III}} = 295,894$	

m^{IV}. Méridien de l'arc du Cap.

Longitude $= 36° 8' 35''.$

$\varphi^{\text{IV}} = 157° 24' 35''.$

$r^{\text{IV}} = 3272617,8$	log. $r^{\text{IV}} = 6,5148952.\ 4$
$e^{\text{IV}2} = 0,0068019.\ 5$	log. $e^{\text{IV}2} = 7,8326334.\ 0$
$\gamma^{\text{IV}} = 0,0034070.\ 3$	log. $\gamma^{\text{IV}} = 7,5323758.\ 6$
$w^{\text{IV}} = 293,511$	

m^{V}. Méridien de l'arc de Prusse.

Longitude $= 38° 9' 40''.$ (Königsberg.)

$\varphi^{v} = 159° 25' 40''.$

$r^{v} = 3272625,8$ log. $r^{v} = 6,5148963.\ 7$

$e^{v2} = 0,0068071.\ 8$ log. $e^{v2} = 7,8329672.\ 0$

$\gamma^{v} = 0,0034094.\ 7$ log. $\gamma^{v} = 7,5326862.\ 3$

$w^{v} = 293,301$

m^{vi}. Méridien de Varsovie.

Longitude $= 38° 41' 42''28$

$\varphi^{vi} = 159° 57' 40''.$

$r^{vi} = 3272628,4$ log. $r^{vi} = 6,5148967.\ 2$

$e^{vi2} = 0,0068086.\ 3$ log. $e^{vi2} = 7,8330597.\ 0$

$\gamma^{vi} = 0,0034102.\ 6$ log. $\gamma^{vi} = 7,5327869.\ 8$

$w^{vi} = 293,233$

m^{vii}. Méridien de l'arc de Russie.

Longitude $= 44° 23' 13''94$ (Dorpat).

$\varphi^{vii} = 165° 39' 10''.$

$r^{vii} = 3272650,1$ log. $r^{vii} = 6,5148996.\ 1$

$e^{vii2} = 0,0068221.\ 3$ log. $e^{vii2} = 7,8339200.\ 0$

$\gamma^{vii} = 0,0034168.\ 7$ log. $\gamma^{vii} = 7,5336276.\ 9$

$w^{vii} = 292,666$

m^{viii}. Méridien de Pulkowa.

Longitude $= 47° 59' 30''71$

$\varphi^{viii} = 169° 15' 30''.$

$r^{viii} = 3272658,9$ log. $r^{viii} = 6,5149007.\ 8$

$e^{viii2} = 0,0068274.\ 6$ log. $e^{viii2} = 7,8342591.\ 0$

$\gamma^{viii} = 0,0034195.\ 4$ log, $\gamma^{viii} = 7,5339681.\ 2$

$w^{viii} = 292,437$

m^{ix}. Méridien de l'arc des Indes.

Longitude $= 95° 20' 0''$. (Kaliana.)

$\varphi^{ix} = 216° 36' 0''.$

$r^{ix} = 3272540,4$ log. $r^{ix} = 6,5148850.\ 5$

$e^{ix2} = 0,0067555.\ 6$ log. $e^{ix2} = 7,8296613.\ 0$

$\gamma^{ix} = 0,0033834.\ 6$ log. $\gamma^{ix} = 7,5293608.\ 5$

$w^{ix} = 295,556$

VI. Accord de ces méridiens avec les arcs mesurés.

Pour pouvoir juger si la figure des méridiens que nous venons de trouver réponde aux mesures exécutées, il nous paraît que le meilleur moyen est celui, de calculer d'après les élémens des méridiens la longueur des arcs mesurés, et de comparer ensuite cette valeur calculée avec la valeur trouvée par la mesure.

Il s'agit donc de trouver l'arc du méridien pour une latitude donnée; soit S l'arc du méridien depuis l'équateur jusqu'à la latitude β; alors, d'après la formule de M. Pasquich, nous aurons:

$$(23.)\ S = a \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{1}{4}\cdot e^2 - \frac{3}{64}\cdot e^4 - \cdot\frac{5}{256}\cdot e^6 - \frac{175}{16384}\cdot e^8 \ldots\ldots\right)\frac{\pi\cdot\beta}{180^\circ} \\ -\left(\frac{3}{4}\cdot e^2 + \frac{3}{64}\cdot e^4 - \frac{5}{256}\cdot e^6 - \frac{175}{16384}\cdot e^8 \ldots\right)\sin\beta\cdot\cos\beta \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{45}{64}\cdot e^4 - \frac{5}{256}\cdot e^6 - \frac{175}{16384}\cdot e^8 \ldots\ldots\right)\sin^3\beta\cdot\cos\beta \\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{175}{256}\cdot e^6 - \frac{175}{16384}\cdot e^8 \ldots\ldots\ldots\right)\sin^5\beta\cdot\cos\beta \\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{11025}{16384}\cdot e^8 \ldots\ldots\ldots\ldots\right)\sin^7\beta\cdot\cos\beta \end{array} \right\}$$

Si nous calculons d'après cette formule les valeurs de S et S' pour les extrémités d'un arc dont les latitudes sont β et β', leur différence, $L = S - S'$, représentera la longueur de l'arc calculé, dont la différence avec l'arc mesuré nous offrira un moyen de pouvoir juger de la justesse de la figure trouvée du méridien.

a. Arc du Pérou.

$\beta = -3^\circ\,4'\,32''{,}068$ $\qquad$ $\beta' = +0^\circ\,2'\,31''{,}387$

$a = r = 3272395{,}0$ $\qquad$ log. $a = 6{,}5148657.\ 7$

$e^2 = 0{,}0066674.\ 0$ $\qquad$ log. $e^2 = 7{,}8239565.\ 0$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9983311.\ 1\,\frac{\pi\cdot\beta}{180^\circ} - 0{,}0050025.\ 7\sin\beta\cdot\cos\beta \\ -0{,}0000208.\ 0\sin^3\beta\cdot\cos\beta - 0{,}0000001.\ 1\sin^5\beta\cdot\cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$S = 175365{,}64 - 877{,}057 - 0{,}010 - 0{,}000 = 174488{,}573$

$S' = \quad 2397{,}75 - \ 12{,}015 - 0{,}000 - 0{,}000 = \quad 2385{,}735$

$L = 176874{,}308$

L'arc mesuré $= 176875{,}5$

Différence $= \quad - \quad 1{,}2$

*

b. Arc de Pennsylvanie.

$$\beta = 39^\circ 56' 22'',5 \qquad \beta' = 38^\circ 27' 37'',5$$
$$a = r^{\text{I}} = 3272387,7 \qquad \log.\ a = 6,5148647.\ 2$$
$$e^{\text{I}2} = 0,0066624.\ 0 \qquad \log.\ e^{\text{I}2} = 7,8236307.\ 0$$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0,9983322.\ 6 \frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0,0049988.\ 6 \sin\beta \,.\, \cos\beta \\ - 0,0000207.\ 7 \sin^3\beta \,.\, \cos\beta - 0,0000001.\ 1 \sin^5\beta \,.\, \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$$S = 2277303,42 - 8051,832 - 13,788 - 0,030 = 2269237,770$$
$$S' = 2192962,61 - 7966,923 - 12,806 - 0,026 = 2184982,855$$

$$L = 84254,915$$
$$\text{L'arc mesuré} = 8\ 149,24$$
$$\text{Différence} = + 105,68$$

c. Arc d'Angleterre.

$$\beta = 53^\circ 27' 31'',13 \qquad \beta' = 50^\circ 37' 7'',63$$
$$a = r^{\text{II}} = 3272512,8 \qquad \log.\ a = 6,5148813.\ 7$$
$$e^{\text{II}2} = 0,0067384.\ 0 \qquad \log.\ e^{\text{II}2} = 7,8285568.\ 0$$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0,9983132.\ 1 \frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0,0050558.\ 7 \sin\beta \,.\, \cos\beta \\ - 0,0000212.\ 5 \sin^3\beta \,.\, \cos\beta - 0,0000001.\ 1 \sin^5\beta \,.\, \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$$S = 3048193,1 - 7914,704 - 21,473 - 0,072 = 3040256,85$$
$$S' = 2886272,0 - 8114,091 - 20,375 - 0,006 = 2878137,53$$

$$L = 162119,32$$
$$\text{L'arc mesuré} = 162075,93$$
$$\text{Différence} = + 43,39$$

Ayant reçu après l'impression de ce mémoire l'ouvrage: Ordnance trigonometrical survey, London 1858, qui comprend tout l'arc anglais mesuré de 10° 12′ depuis Saxafjord jusqu'à Dunnose, nous ajouterons les résultats que nous donne cet arc, résultats que nous accepterons comme résultats définitifs pour l'arc d'Angleterre.

$$\beta = 60^\circ 49' 38'',58 \qquad \beta' = 50^\circ 37' 7'',07$$
$$a = r^{\text{II}} = 3272512,8 \qquad \log.\ a = 6,5148813.\ 7$$
$$e^{\text{II}2} = 0,0067384.\ 0 \qquad \log.\ e^{\text{II}2} = 7,8285568.\ 0$$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9983132.1\,\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0{,}0050558.7 \sin\beta \cdot \cos\beta \\ -0{,}0000212.5 \sin^3\beta \cdot \cos\beta - 0{,}0000001.1 \sin^5\beta \cdot \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$$S = 3468383{,}0 \quad -7041{,}935 - 22{,}565 - 0{,}098 = 3461318{,}402$$
$$S' = 2886263{,}47 - 8114{,}053 - 20{,}375 - 0{,}063 = 2878128{,}979$$
$$L = \quad 583189{,}423$$
L'arc mesuré = 583201,10

Différence = — 11,677

d. Arc de France.

$\beta = 51^\circ\,2'\,8''{,}50$ $\qquad$ $\beta' = 38^\circ\,39'\,56''{,}11$

$a = r^{\mathrm{III}} = 3272527{,}7$ $\qquad$ log. $a = 6{,}5148833.1$

$e^{\mathrm{III}\,2} = 0{,}0067475.8$ $\qquad$ log. $e^{\mathrm{III}\,2} = 7{,}8291480.0$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9983109.2\,\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0{,}0050506.2 \sin\beta \cdot \cos\beta \\ -0{,}0000213.8 \sin^3\beta \cdot \cos\beta - 0{,}0000001.1 \sin^5\beta \cdot \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$$S = 2910050{,}2 - 8081{,}408 - 20{,}682 - 0{,}064 = 2901948{,}05$$
$$S' = 2204708{,}1 - 8062{,}946 - 13{,}323 - 0{,}027 = 2196631{,}80$$
$$L = \quad 705316{,}25$$
L'arc mesuré = 705290,8

Différence = + 25,45

e. Arc du Cap.

$\beta = 34^\circ\,21'\,6''{,}26$ $\qquad$ $\beta' = 29^\circ\,44'\,17''{,}66$

$a = r^{\mathrm{IV}} = 3272617{,}8$ $\qquad$ log. $a = 6{,}5148952.4$

$e^{\mathrm{IV}\,2} = 0{,}0068019.5$ $\qquad$ log. $e^{\mathrm{IV}\,2} = 7{,}8326334.0$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9982973.3\,\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0{,}0051036.2 \sin\beta \cdot \cos\beta \\ -0{,}0000216.8 \sin^3\beta \cdot \cos\beta - 0{,}0000001.1 \sin^5\beta \cdot \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$S = 1958760{,}314 - 7780{,}829 - 10{,}524 - 0{,}017 = 1950968{,}944$
$S' = 1695695{,}662 - 7193{,}807 - 7{,}519 - 0{,}009 = 1688494{,}327$

$L = 262474{,}617$
L'arc mesuré $= 262467{,}64$

Différence $= +\ 6{,}98$

f. Arc de Prusse.

$\beta = 55^\circ\,43'\,40''{,}446$ $\qquad$ $\beta' = 54^\circ\,13'\,11''{,}466$
$a = r^{\nu} = 3272625{,}8$ $\qquad$ log. $a = 6{,}5148963.\ 7$
$e^{\nu 2} = 0{,}0068071.\ 8$ $\qquad$ log. $e^{\nu 2} = 7{,}8329672.\ 0$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9982960.\ 3\,\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0{,}0051075.\ 4 \sin\beta \,.\, \cos\beta \\ - 0{,}0000217.\ 1 \sin^3\beta \,.\, \cos\beta - 0{,}0000002.\ 3 \sin^5\beta \,.\, \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$S = 3177661{,}813 - 7778{,}358 - 22{,}578 - 0{,}163 = 3169860{,}714$
$S' = 3091657{,}786 - 7928{,}434 - 22{,}175 - 0{,}155 = 3083707{,}022$

$L = \quad 86153{,}692$
L'arc mesuré $= \quad 86176{,}975$

Différence $= \quad -\ 23{,}283$

g. Arc de Russie.

$\beta = 70^\circ\,40'\,11''{,}3$ $\qquad$ $\beta' = 45^\circ\,20'\,2''{,}8$
$a = r^{\nu\text{m}} = 3272650{,}1$ $\qquad$ log. $a = 6{,}5148996.\ 1$
$e^{\nu\text{m}2} = 0{,}0068221.\ 3$ $\qquad$ log. $e^{\nu\text{m}2} = 7{,}8339200.\ 0$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9982922.\ 8\,\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - 0{,}0051187.\ 7 \sin\beta \,.\, \cos\beta \\ - 0{,}0000218.\ 1 \sin^3\beta \,.\, \cos\beta - 0{,}0000001.\ 2 \sin^5\beta \,.\, \cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$S = 4029662{,}465 - 5232{,}496 - 19{,}852 - 0{,}097 = 4024410{,}020$
$S' = 2584996{,}236 - 8375{,}403 - 18{,}010 - 0{,}050 = 2576602{,}773$

$L = 1447807{,}25$
L'arc mesuré $= 1447786{,}78$

Différence $= +\ 20{,}47$

h. Arc des Indes.

$\beta = 29^\circ\ 30'\ 48''{,}895$ $\qquad$ $\beta' = 8^\circ\ 9'\ 32''{,}298$

$a = r^{IX} = 3272540{,}4$ $\qquad$ $\log.\ a = 6{,}5148850.\ 5$

$e^{IX\,2} = 0{,}0067555.\ 7$ $\qquad$ $\log.\ e^{IX2} = 7{,}8296613.\ 0$

$$S = a \left\{ \begin{array}{l} 0{,}9983089.\ 6\,\frac{\pi \,.\, \beta}{180^\circ} - 0{,}0050688.\ 0\,\sin\beta\,.\,\cos\beta \\ -\,0{,}0000213.\ 9\,\sin^3\beta\,.\,\cos\beta - 0{,}0000001.\ 1\,\sin^5\beta\,.\,\cos\beta \end{array} \right\}$$

donc:

$S = 1682865{,}350 - 7111{,}307 - 7{,}283 - 0{,}009 = 1675746{,}751$

$S' = \ 465224{,}711 - 2330{,}323 - 0{,}198 - 0{,}000 = \ 462894{,}190$

$L = 1212852{,}56$

L'arc mesuré $= 1212878{,}1$

Différence $= \ -\ 25{,}54$

Par conséquent la mesure des arcs de méridiens s'écarte de la figure de la terre que nous avons trouvée, des valeurs suivantes:

	en toises	en arc	en parties de l'arc total.
Arc du Pérou	+ 1,2	+ 0″,077	+ 0,0000067. 8
» de Pennsylvanie	— 105,68	— 6,687	— 0,0012558. 6
» d'Angleterre	+ 11,68	+ 0,736	+ 0,0000200. 3
» de France	— 25,45	— 1,607	— 0,0000360. 8
» du Cap	— 6,98	— 0,442	— 0,0000265. 9
» de Prusse	+ 23,28	+ 1,267	+ 0,0002333. 8
» de Russie	— 20,47	— ,289	— 0,0000141. 4
» des Indes	+ 25,54	+ 1,619	+ 0,0000210. 6

ou en d'autres mots, si nous admettions que les arcs mesurés fussent affectés des erreurs que nous venons de déterminer, toutes les mesures seraient d'un parfait accord avec la figure de la terre que nous avons établie. Les différences ne dépassent pas les limites des erreurs d'observations admissibles, à l'exception de l'arc de Pennsylvanie; mais cette mesure a été reconnue depuis longtems pour avoir été exécutée avec peu d'exactitude, d'après des principes peu rigoureux et avec des moyens non suffisans. Elle ne mérite donc aucune confiance, est c'est seulement par un sentiment de curiosité, pour ainsi dire, que nous l'avons insérée parmi les arcs que nous avons employés pour la détermination de la figure de la terre, où, au fond, elle ne devrait pas figurer.

---

*

VII. Vérification de la longitude de Varsovie.

Nous avons, à la rigueur, terminé notre tâche; mais il nous a paru offrir quelque intérêt d'examiner, si notre hypothèse sur la figure de la terre, ne pourrait pas servir à l'éclaircissement de quelques anomalies qui se sont présentées depuis peu dans les positions de Varsovie et de Dorpat. Nous commencerons par le premier de ces points.

Varsovie est liée avec l'observatoire de Pulkowa, chronométriquement et par une série de triangles[1]).

La longitude de Pulkowa étant

$$= 47^\circ\ 59'\ 30''{,}71$$

la longitude chronométrique de Varsovie a été trouvée

$$= 38^\circ\ 41'\ 42''{,}28$$

et la longitude par les triangles

$$= 38^\circ\ 41'\ 29''{,}47.$$

La différence chronométrique des longitudes de ces deux points, est donc

$$= 9^\circ\ 17'\ 48''{,}43$$

et la différence géodésique des deux longitudes

$$= 9^\circ\ 18'\ 1''{,}24.$$

Les calculs des positions géodesiques en Russie n'ont pas tous été faits d'après les mêmes élémens pour la figure de la terre; mais sans se tromper sensiblement on pourra supposer qu'on y a employé:

$$a = 3271601{,}6 \qquad \log.\ a = 6{,}5147608.\ 1$$
$$w = 310{,}000$$

La latitude de Varsovie étant:

$$\beta = 52^\circ\ 13'\ 5''{,}0$$

on trouvera avec ces données, la normale de Varsovie[2])

$$\log.\ r = 6{,}5156361.\ 7$$

et le rayon du parallèle de Varsovie, étant:

$$R = r\ .\ \cos\beta$$

on trouvera:

$$\log.\ R = 6{,}3028542.\ 7$$

---

1) Exposé des travaux astronomiques et géodésiques en Russie, par T. F. de Schubert. St.-Pétersbourg. 1858. 1 vol. 4-to pag. 53.

2) Шуберта, руководство для начислений тригонометрической съемки. Ст. Петербургъ. 1826. 1 vol. 8. T. VIII.

Alors, dans le parallèle de Varsovie:

$$9^\circ\ 17'\ 48''\!,43 \text{ seront} = 325885{,}1 \text{ toises}$$
$$9\ \ 18\ \ 1{,}24\ \ \text{»}\ \ = 326009{,}8\ \ \text{»}$$

La différence des déterminations, astronomique et géodésique, est donc pour Varsovie = 124,7 toises.

Nous allons déterminer actuellement l'ellipse parallèle de Varsovie. Les formules pour la normale r, étant dans le méridien du grand axe de l'équateur

$$(24.)\quad r = a\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4}.e^2 + \frac{9}{64}.e^4 - \left(\frac{1}{4}.e^2 + \frac{3}{16}.e^4\right)\cos 2\beta \\ \quad + \frac{3}{64}.e^4.\cos 4\beta \end{array}\right\}$$

et dans le méridien du petit axe de l'équateur:

$$(25.)\quad r' = c\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4}.e^2 + \frac{9}{64}.e^4 - \left(\frac{1}{4}.e^2 + \frac{3}{64}.e^4\right)\cos 2\beta \\ \quad + \frac{3}{64}.e^4.\cos 4\beta \end{array}\right\}$$

nous aurons:

$$r = 3279744{,}9 \qquad \log.\ r = 6{,}5158400.\ 6$$
$$r' = 3279086{,}2 \qquad \log.\ r' = 6{,}5157528.\ 3$$

et les deux axes de l'ellipse parallèle de Varsovie étant:

$$a' = r.\cos\beta$$
$$c' = r'.\cos\beta$$

nous trouverons les élémens de cette ellipse:

$$a' = 2009361{,}6 \qquad \log.\ a' = 6{,}3030581.\ 6$$
$$c' = 2008958{,}5 \qquad \log.\ c' = 6{,}3029709.\ 3$$
$$e^2 = 0{,}0004014.\ 5 \qquad \log.\ e^2 = 6{,}6036315.\ 0$$

Nous connaissons de même les angles des deux méridiens de Varsovie et de Pulkowa avec le grand axe a':

$$\varphi^{\text{VI}} = 159^\circ\ 57'\ 42''\!,28 = 20^\circ\ \ 2'\ 17''\!,72$$
$$\varphi^{\text{VIII}} = 169\ \ 15\ 30{,}71 = 10\ \ 44\ 29{,}29$$

Pour trouver l'arc $L = S - S'$ de l'ellipse parallèle entre ces deux méridiens, nous pourrons employer la formule (23); mais comme nous avons besoin de connaître pour cela l'angle β formé par la normale avec le grand axe, nous déterminerons cet angle, par l'angle connu φ et par l'expression:

$$(26.)\quad \text{tang}\,\beta = \frac{a'^2}{c'^2}.\text{tang}\,\varphi$$

Alors nous aurons:

$$\beta = 10^\circ 44' 44''{,}46$$
$$\beta' = 20\ \ 2\ 44{,}396$$
$$S = 376778{,}17 \ -110{,}828 - 0{,}001 = 376667{,}341$$
$$S' = 702930{,}732 - 194{,}818 - 0{,}005 = 702735{,}909$$
$$L = 326068{,}568$$

Nous avions trouvé plus haut, que la différence géodésique entre les longitudes de Varsovie et de Pulkowa, était sur le parallèle de Varsovie

$$= 326009{,}8$$

maintenant nous trouvons que la différence astronomique entre les longitudes de ces points sur l'ellipse parallèle de Varsovie

$$= 326068{,}57$$

par conséquent 183,4 toises plus grande quelle n'avait été trouvée sur le parallèle.

Si nous désignons δ^* la distance astronomique des deux méridiens sur le parallèle de Varsovie, et par δ^Δ lenr distance géodésique, nous avions trouvé par le calcul ordinaire employé jusqu'à présent:

$$\delta^* = \delta^\Delta - 124{,}7 \text{ toises}$$

d'après notre hypothèse de la terre nous avons sur l'ellipse parallèle de Varsovie

$$\delta^* = \delta^\Delta + 58{,}8 \text{ toises.}$$

VIII. Vérification de la longitude de Dorpat.

Examinons de la même manière la position de Dorpat[1]).

La longitude de Dorpat a été déterminée:

par des chronomètres $= 44^\circ 23' 13''{,}94$
par les triangulations $= 44\ \ 23\ \ 6{,}998$

La distance astronomique entre les méridiens de Dorpat et de Pulkowa, est donc

$$= 3^\circ 36' 16''{,}77$$

et la distance géodésique entre ces méridiens:

$$= 3^\circ 36' 23''{,}712.$$

La latitude de Dorpat étant

$$= 58^\circ 22' 47''{,}56$$

nous trouvons ainsi qu'au § précédent et avec les mêmes données:

$$\log. R = 6{,}2353447.\ 4.$$

1) Schubert. Exposé des travaux astronomiques et géodésiques en Russie. St.-Pétersbourg. 1858. 1 vol. 4. p. 46.

Donc au parallèle de Dorpat on aura:

$$3^\circ\,36'\,16''{,}77 = 108164{,}9$$
$$3\;\;36\;\;23{,}71 = 108222{,}8$$

et la différence entre les longitudes astronomique et géodésique de Dorpat, est

$$= 57{,}9 \text{ toises.}$$

Pour déterminer les élémens de l'ellipse du parallèle de Dorpat, nous suivrons la même méthode qu'au § précédent, et nous trouverons:

$r = 3280812{,}1$ log. $r = 6{,}5159813.\ 7$
$r' = 3280175{,}5$ log. $r' = 6{,}5158970.\ 2$
$a' = 1720080{,}8$ log. $a' = 6{,}2355488.\ 1$
$c' = 1719746{,}6$ log. $c' = 6{,}2354644.\ 6$
$e^2 = 0{,}0003883.\ 0$ log. $e^2 = 6{,}5891674.\ 0$

$\varphi^{\text{vm}} = 169^\circ\,15'\,30''{,}71 = 10^\circ\,44'\,29''{,}29$
$\varphi^{\text{m}} = 165\;\;39\;\;13{,}94 = 14\;\;20\;\;46{,}06$
$\beta = \;\;10\;\;44\;\;43{,}94$
$\beta' = \;\;14\;\;21\;\;5{,}295$
$S = 322561{,}296 - \;\;91{,}767 - 0{,}001 = 322469{,}528$
$S' = 430804{,}840 - 120{,}301 - 0{,}002 = 430684{,}537$

$$L = 108215{,}01$$

D'après le calcul usité nous avions trouvé

$$\delta^* = \delta^\Delta - 57{,}9 \text{ toises}$$

d'après notre hypothèse, nous trouvons sur l'ellipse parallèle de Dorpat

$$\delta^* = \delta^\Delta - 7{,}8 \text{ toises.}$$

Nous ne pouvons passer sous silence qu'une idée que nous avions mise en avant dans le même ouvrage précité[1]) pour expliquer les anomalies qui s'étaient présentées aux positions de Varsovie et de Dorpat, se trouve maintenant pleinement justifiée par la figure de la terre que nous avons trouvée.

IX. Conclusion.

Nous croyons avoir établi dans les pages précédentes avec quelque vraisemblance les faits suivants:

1. Les méridiens sont des ellipses qui ont toutes le même petit axe en commun, lequel petit axe est en même tems l'axe de rotation de la terre.

2. La valeur numérique du demi petit axe est:

$$b = 3261467{,}9 \text{ toises.}$$

1) Schubert. Exposition etc. pag. 57.

3. L'équateur est une ellipse dont le demi grand axe

$$a = 3272671{,}5 \text{ toises}$$

et le demi petit axe

$$c = 3272303{,}2 \text{ toises.}$$

4. La longitude du grand axe de l'équateur est

$$\lambda a = 58^\circ 44' \qquad 238^\circ 44'$$

et la longitude du petit axe de l'équateur est

$$\lambda c = 148^\circ 44' \qquad 328^\circ 44'$$

5. L'aplatissement des ellipses des méridiens a son maximum dans le méridien du grand axe de l'équateur, où il est

$$= \frac{1}{292{,}109}$$

et son minimum dans le méridien du petit axe de l'équateur, où il est

$$= \frac{1}{302{,}004}$$

6. Pour établir une harmonie parfaite entre notre hypothèse de la figure de la terre et les principales mesures des arcs de méridiens, il suffit d'admettre que les amplitudes de ces derniers, comme somme totale des erreurs géodésiques et astronomiques qui pourront y avoir été commises, et des attractions locales qui auraient pu y exercer quelque influence, soyent affectées des erreurs suivantes:

l'arc du Pérou	+	0″,077
» d'Angleterre	+	0,736
» de France	—	1,607
» du Cap	—	0,442
» de Prusse	+	1,267
» de Russie	—	1,289
» des Indes	+	1,619

7. Par notre hypothèse de la figure de la terre, les grandes anomalies trouvées entre les longitudes astronomiques et géodésiques de Varsovie et de Dorpat, seront en majeure partie annulées. La première sera réduite de 12″,81 à 6″,04, et la seconde de 7″,0 à 0″,93.

8. Cette détermination de la figure de la terre n'est qu'une approximation, laquelle avec plus de données et à l'aide de méthodes plus rigoureuses, pourra recevoir beaucoup de rectifications. Mais elle démontre au moins, que de cette manière on peut arriver à une concordance des résultats que jusqu'à présent on n'avait pas atteinte.

9. La détermination de la figure générale de la terre n'exclut pas des irrégularités partielles et locales de sa surface.

10. Si avec le tems, après un examen approfondi, notre hypothèse sur la figure de la terre fût adoptée, il faudrait soumettre toutes les positions des lieux, déduites d'opérations géodésiques, à une correction qui affecterait principalement les longitudes.

Fig. I

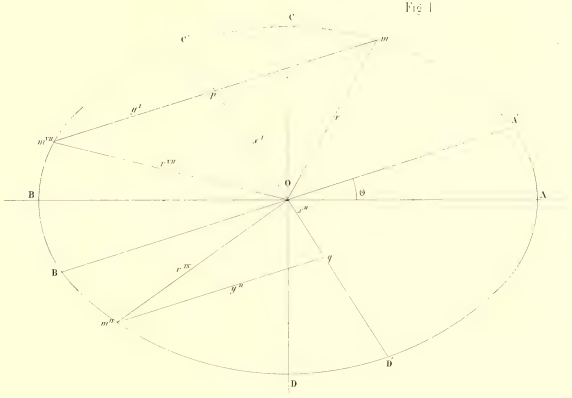
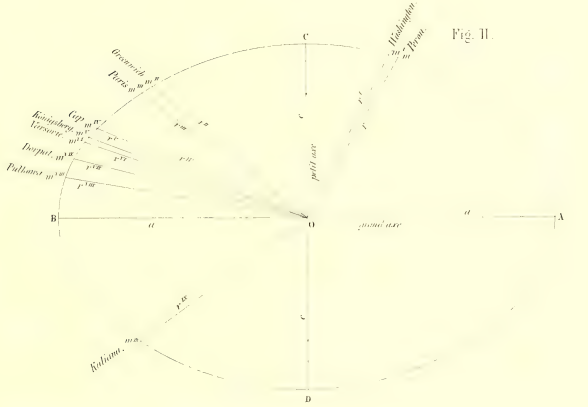

C
C'
m
p
g'
r
A'
m^VII
r^VII
x'
O
θ
B
A
x''
B
q
r^IX
g''
m''
D
D

Fig. II.


C
Greenwich
Paris
Gap
Königsberg
Varsovie
Dorpat
Pulkowa
Hindenburg
Brou
petit axe
B
a
O
grand axe
a
A
Kalianu
D

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 7.

ZUR

MORPHOLOGIE DER SPRACHE.

VON

August Schleicher,
Correspondierendem Mitgliede der Akademie.

Der Akademie vorgelegt am 27. August 1858.

St. PETERSBURG, 1859.
Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:
EGGERS und COMP. in St. Petersburg, SAMUEL SCHMIDT in Riga und LEOPOLD VOSS in Leipzig.

Preis: 35 Kop. = 12 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

C. Vesselofski, beständiger Secretär.

Im Juni 1859.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

ZUR

MORPHOLOGIE DER SPRACHE.

VON

August Schleicher.

Die Lautform ist hauptsächlich dasjenige, wodurch der Unterschied der Sprachen begründet wird. Wilh. v. Humboldt.

Den gegenstand der morphologie der sprache bildet die lautliche form des wortes, seine äußere gestalt, d. h. das vorhandensein oder felen seiner teile und die stellung, welche dise teile ein nemen; unberüksichtigt laßen wir das material, auß dem das wort gebildet ist, den klang der zum aufbau desselben verwanten lautelemente.

Eine ergänzung der morphologie, der lere von der äußeren lautlichen form der sprache, bildet die lere von der function der einzelnen teile des wortes und des wortes selbst; namentlich der nachweis, wie sich in jeder sprache der gegensatz von nomen und verbum entwickelt hat. In den kreiß diser ins innerste wesen der sprache vor dringenden forschung zu treten, wage ich zur zeit noch nicht, da es mir hier an leitenden grundanschauungen und an methode noch gebricht. Im folgenden wird nur in so ferne auf die function der lautlichen elemente rüksicht genommen, als diß zur sonderung von wurzel und beziehungslaut und ferner von stammbildungselementen und declinations- und conjugationszusätzen unumgänglich nötig ist.

Die veränderungen, welche im laufe der zeit in den sprachen ein treten, die sprachengeschichte laßen wir einstweilen völlig bei seite; wir sehen davon ab, daß die höheren und complicierteren wortformen in vorgeschichtlicher urzeit auß einfacheren hervor gegangen sind und denken uns eben so, auf der andern seite, die im späteren leben der sprache ein tretenden veränderungen und abschleifungen hier hinweg. Bei den höheren sprachformen, die im laufe der zeit am meisten verloren haben, sind es also die ältesten erschließbaren zustände derselben, die wir der beobachtung unterziehen. Daß übrigens auch die formen, die eine sprache im gange irer geschichte durch macht, ins gebiet der morphologie fallen, ist klar; für jezt schließen wir aber die sprachengeschichte, das nach einander auftreten verschidener formen bei ein und derselben sprache, von unserer untersuchung auß.

Obgleich mir das studium viler sprachen, die für die morphologie von bedeutung sind, noch ab geht, auch für manche sprachgebiete die nötigen hilfsmittel teils überhaupt noch felen, teils mir wenigstens nicht zu gebote stehen[1]), so will ich doch disen versuch einer morphologie einstweilen an dem mir zur verfügung stehenden materiale an stellen, eine weitere verarbeitung und außdenung desselben fernerem studium vor behaltend; ist doch der gegenstand der art, daß in nur jarelang fort gesezte arbeiten irgend wie genügend zu erfaßen vermögen.

Das folgende gibt sich eben nur als einen vorläufigen, in jeder beziehung fragmentarischen versuch, von dem ich erst ab warten will, ob er sich als der erkentnis förderlich und weiterer außbildung fähig und wert erweist.

I.

Apriorische entwickelung der formen des wortes und darstellung derselben mittels morphologischer formeln.

Die sprache besteht auß worten; es handelt sich also zunächst darum: welcherlei form kann das wort haben und wie bezeichnen wir dise formen in einer algemeinen, für alle worte gültigen weise.

Wir zerlegen das wort und demnach die sprache überhaupt in zwei elemente, in bedeutung und beziehung; beide kommen in der sprache nur vereint vor und bilden zusammen das wort. Wir haben hier nun zu ermitteln: welche lautlichen elemente muß eine sprache haben, d. h. welches ist das geringste maß irer lautlichen wortform und welche elemente kann sie haben und in welcher weise können sie ire stellung wechseln und combinationen ein gehen. Ob dise formen und welche davon in wirklichkeit vor kommen, geht uns vor der hand noch gar nichts an.

Den lautlichen außdruck der bedeutung nent man wurzel. Zur algemeinen bezeichnung der wurzeln wälen wir *A B C D* u. s. f. Lautlicher außdruck der beziehung ist der beziehungslaut; wir bezeichnen die beziehungslaute mit *a b c d* u. s. f. oder auch, nach einer unten bei zu bringenden unterscheidung, mit α β γ δ u. s. f.

1) So habe ich z. b. für das malayische und polynesische keine anderen quellen, als das Kawiwerk. Da nun in disem werke die function der worte und irer teile in den vordergrund tritt, ire äußere lautform, ire morphologische bildung und zusammensetzung aber nur in so weit behandelt ist, als diß zur characteristik des inneren wesens der sprachen erforderlich war, demnach keine eigentlichen grammatiken malayischer und polynesischer sprachen gegeben werden, so konte ich es nicht unternemen, auß diser quelle die morphologischen formen der in ir besprochenen sprachen zu entwickeln. Wie schäzbar wäre mir das genante werk gewesen, hätte ich neben im für einzelne malayische und polynesische sprachen grammatische hilfsmittel beseßen! Ich betauere ser ein so gewaltiges sprachgebiet, das überdiß vil morphologisch interessantes zu bergen scheint, hier unberücksichtigt laßen zu müßen.

I. classe. Möglicher weise kann der lautliche aufdruck der beziehung (wenn auch niemals dise selbst[1]) völlig felen; die unveränderliche wurzel kann als solche zugleich wort sein. Die formel für das wort diser art fält also mit der bezeichnung, die wir für die wurzel gewält haben, zusammen und ist demnach A. Ein auf lauter solchen worten bestehender satz würde also algemein zu bezeichnen sein mit $A\ B\ C\ D\ldots\ldots$

Die beziehung kann aber durch wurzeln (worte) algemeinerer bedeutung umschriben werden; solche wurzeln, die oft mer algemeine, abstracte verhältnisse, als bestimte, concrete anschauungen auf drücken und schon im übergange zu beziehungslauten begriffen sind, bezeichnen wir dann, wenn sie sich als beziehungsaufdrücke anderen wurzeln bei gesellen, mit $\acute{A}\ \grave{B}\ \hat{C}$ u. s. f. Sie können als mer oder minder selbständige worte teils vor den bedeutungslaut treten, teils demselben folgen oder auch, wenn sie in größerer anzal, mindestens aber zu zweien auf treten, den bedeutungslaut in ire mitte nemen. Das lose antreten diser elemente an die wurzel und an einander bezeichnen wir durch $+$, das additionszeichen; so erhalten wir die formeln 1. $\acute{A}+A$, 2. $A+\acute{A}$, 3. $\acute{A}+A+\grave{B}$ oder, bei mereren beziehungswurzeln, 1. $\acute{A}+\grave{B}\ldots.+A$, 2. $A+\acute{A}+\grave{B}\ldots.$, 3. $\acute{A}+\grave{B}\ldots.+A+\hat{C}, \acute{A}+A+\grave{B}+\hat{C}\ldots., \acute{A}+\grave{B}\ldots.+A+\hat{C}+\acute{D}\ldots.$

Die häufung der beziehungselemente an einer stelle des bedeutungslautes werden wir im folgenden meist unbezeichnet laßen und mit dem setzen des zeichens für einen beziehungslaut zugleich an deuten, daß anstatt eines auch merere gedacht werden können (in der eben besprochenen classe gilt z. b. $\acute{A}+A$ zugleich für $\acute{A}+\grave{B}+A$; $\acute{A}+\grave{B}+\hat{C}+A$ u. s. f.). Im anschluße an W. v. Humboldts allerdings nicht zunächst von der morphologischen beschaffenheit der sprache gebildete benennung der sprachen, welche diser form zu zu teilen sind, nennen wir dise classe die isolierende.

II. classe. Der beziehungslaut kann mit der wurzel verwachsen, wobei er in der regel von seiner ursprünglichen, vollen wurzelform verliert; durch dises festere verwachsen zu einem worte und die verkürzung des lautlichen aufdruckes der beziehung ist die möglichkeit gegeben, eine bisher nicht zugängliche stelle des bedeutungslautes dem beziehungslaute zu eröfnen, nämlich das innere desselben, wodurch nun eine bei weitem größere anzal von combinationen entspringt. Der beziehungslaut kann 1. vor die wurzel treten: aA (bei mereren beziehungslauten also $ab\ldots A$); 2. sich an die wurzel an hängen: Aa; 3. in die wurzel selbst hinein treten was wir graphisch entsprechend bezeichnen, nämlich: A; merere beziehungslaute können hier 4. die wurzel umfaßen: aAb; 5. zugleich vor dieselbe und in dieselbe treten: $b\,A$; 6. zugleich in derselben und nach derselben stehen: $A\,b$; 7. zugleich in die wurzel eintreten und sie umfaßen: $b\,A\,c$.

Dise classe nennen wir die zusammen fügende.

III. classe. Die wurzel selbst kann sich zum zwecke des beziehungsaufdruckes regel-

1) Den nachweis der beziehung zu füren ist hier sache der functionslere. Da wo sie nicht in lautliche erscheinung tritt, fält sie nicht ins gebiet der morphologie.

mäßig verändern, so daß also die beziehung nunmer symbolisch bezeichnet wird, die bisher stets nur durch einen ursprünglichen bedeutungslaut zum außdrucke kam. Diß verändern der wurzel selbst zum zwecke des beziehungsaußdruckes bezeichnen wir durch exponenten: A^a A^b u. s. f. Da hier jede form der wurzel, auch die scheinbare grundform derselben, eine stufe in der reihe der von ir durchlaufenen veränderungen dar stelt, so können wir jede hier mögliche form der wurzel als eine durch den beziehungsaußdruck potenzierte faßen und stellen also jede solcher veränderung fähige wurzel als A^a dar. Dise Art der wurzelveränderung nennen wir flexion.

Denkbarer weise kann eine sprache nur auß flexionsfähigen wurzeln bestehen, demnach erhalten wir für das wort hier zunächst die form A^a (ein satz einer solchen sprache könte etwa durch A^a B^a C^b D^c u. s. f., je nach umständen, dar zu stellen sein).

Ferner sind hier aber möglich die drei combinationen von I, wenn nämlich an wurzeln der form A^a noch wurzeln $\acute{A}$, $\acute{B}$ näher bestimmend lose an treten und eben so alle formen von II, wenn die beziehungslaute sich fest mit derselben verbinden. Wir erhalten also durch die combination von I. und II. mit der diser classe eigentümlichen wurzelform A^a eilf formeln, welche die unten folgende übersichtstabelle entwickelt; wir sondern sie in III. a. (die vier ersten formeln) und III. b. (die siben lezten nach dem principe von cl. II. gebildeten). Durch substituierung von $\acute{A}^a$, $\acute{B}^a$, d. h. flexionsfähiger beziehungswurzeln, erhalten wir für III. a. noch fernere 10 combinationen, zusammen also 14 (s. u. die zweite übersichtstabelle).

IV. classe. Bisher namen wir an, dass in einem worte nur ein princip der äußeren anfügung des beziehungsaußdruckes zur anwendung komme, entweder lose anfügung oder festere verschmelzung zu einem ganzen. Beides kann aber auch zugleich statt finden; von mereren beziehungselementen können einige fest mit der wurzel verschmelzen, andere als selbständige wurzellaute ir zur seite treten. Leztere, als selbständige mit der bedeutungswurzel nicht zur einheit des wortes verschmelzende wurzellaute, brauchen aber nicht in diser einfachheit zu verharren, sie können andre beziehungen sich fest verbinden und sich so zu einem gegliderten beziehungsworte gestalten. Die bedeutungswurzel kann dabei sowol unveränderlich, als flectierend gedacht werden. Wir erhalten so eine fast unabsehbare fülle von möglichkeiten, deren große anzal darauf beruht, daß hier merere weisen des anfügens des beziehungslautes combiniert erscheinen, weshalb wir dise classe die combinierende nennen. Leicht läßt sie sich in zwei hauptgruppen scheiden. IV, a. Einfache beziehungswurzeln combiniert mit classe II. also $\acute{A} + aA$ u. s. f. gibt ein und zwanzig formeln. Nemen wir hier regelmäßig veränderte wurzel an (cl. III.) so entstehen fernere ein und zwanzig formeln ($\acute{A} + aA^a$ u. s. f.). Durch substituierung von $\acute{A}^a$ und $\acute{B}^a$ erhalten wir zusammen 112 formeln. IV, b. Beziehungswurzeln, mit anderen beziehungslauten verbunden, treten lose zu einer unveränderlichen oder flectierenden, nakten oder mit beziehungselementen versehenen bedeutungswurzel (z. B. $\acute{A}a + A$ u. s. f. oder $\acute{A}a + Ab$ u. s. f. oder $\acute{A}a + A^a$ u. s. f.). Nemen wir nun noch an, daß außer den

zusammen gesezten beziehungslauten auch einfache zugleich vor kommen können (z. b. $\acute{A}a + A + \acute{B}$ u. dergl.) so eröfnet sich eine solche flut von combinationen für IV, b. daß wir ire anzal genauer zu ermitteln unterlaßen müßen, obschon, wie wir im zweiten teile diser untersuchung sehen werden, formen diser art in der tat vor kommen, die formeln diser classe demnach von practischer bedeutung sind. Die möglichkeit, daß auch hier überall für $\acute{A}$ auch $\acute{A}^a$ (eine flectierende beziehungswurzel) ein treten könne, bringt einen neuen factor zu den bisherigen hinzu, durch welchen natürlich die anzal aller bisherigen combinationen verdoppelt wird.

Übersicht der im bisherigen besprochenen morphologischen formeln.

I.		1. A	
	2. $\acute{A} + A$		3. $A + \acute{A}$
		4. $\acute{A} + A + \acute{B}$	
II.	1. aA	3. $\dot{A}$	2. Aa
		4. aAb	
	5. $b\dot{A}$	7. $b\dot{A}c$	6. $\dot{A}b$
III,a.[1])		1. A^a	
	2. $\acute{A} + A^a$		3. $A^a + \acute{A}$
		4. $\acute{A} + A^a + \acute{B}$	
III,b.	1. aA^a	3. $\dot{A}^a$	2. $A^a a$
		4. $aA^a b$	
	5. $b\dot{A}^a$	7. $b\dot{A}^a c$	6. $\dot{A}^a b$
IV,a.[2])	1. $\acute{A} + aA$	15. $\acute{A} + aA + \acute{B}$	8. $aA + \acute{A}$
	2. $\acute{A} + Aa$	16. $\acute{A} + Aa + \acute{B}$	9. $Aa + \acute{A}$
	3. $\acute{A} + \dot{A}$	17. $\acute{A} + \dot{A} + \acute{B}$	10. $\dot{A} + \acute{A}$
	4. $\acute{A} + aAb$	18. $\acute{A} + aAb + \acute{B}$	11. $aAb + \acute{A}$
	5. $\acute{A} + b\dot{A}$	19. $\acute{A} + b\dot{A} + \acute{B}$	12. $b\dot{A} + \acute{A}$
	6. $\acute{A} + \dot{A}b$	20. $\acute{A} + \dot{A}b + \acute{B}$	13. $\dot{A}b + \acute{A}$
	7. $\acute{A} + b\dot{A}c$	21. $\acute{A} + b\dot{A}c + \acute{B}$	14. $b\dot{A}c + \acute{A}$
	22. $\acute{A} + aA^a$	36. $\acute{A} + aA^a + \acute{B}$	29. $aA^a + \acute{A}$
	u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.

1) Substituirt man für $\acute{A}$ und $\acute{B}$ flectierende beziehungswurzeln, also $\acute{A}^a$, $\acute{B}^a$, so ergeben sich noch fünf fernere formeln; mit A combiniert also noch 10 möglichkeiten, s. u.

2) Auch hier kann man dem $\acute{A}$ und $\acute{B}$ ein $\acute{A}^a$ und $\acute{B}^a$ substituieren, wodurch im ganzen 112 formeln entstehen würden.

IV, b. 1. $a\acute{A} + A$ 8. $a\acute{A} + bA$ 15. $a\acute{A} + Ab$ 22. $a\acute{A} + \mathring{A}$ u. s. f.
2. $\acute{A}a + A$ 9. $\acute{A}a + bA$ 16. $\acute{A}a + Ab$ 23. $\acute{A}a + \mathring{A}$
3. $\mathring{A} + A$ u. s. f. u. s. f. u. s. f.
4. $a\acute{A}b + A$
5. $b\mathring{A} + A$ zusammen 56 formeln.
6. $\mathring{A}b + A$
7. $b\mathring{A}c + A$

$A + a\acute{A}$	$aA + b\acute{A}$	$\mathring{A} + b\acute{A}$	aAb u. s. f.
$A + \acute{A}a$	$aA + \acute{A}b$	$\mathring{A} + \acute{A}b$	
u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.	
$a\acute{A} + \acute{B} + A$	$a\acute{A} + A + \acute{B}$	$A + a\acute{A} + \acute{B}$	
u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.	
$\acute{A} + a\acute{B} + A$	$\acute{A} + A + a\acute{B}$	$A + \acute{A} + a\acute{B}$	
u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.	
$a\acute{A} + b\acute{B} + A$	$a\acute{A} + A + b\acute{B}$	$A + a\acute{A} + b\acute{B}$	
u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.	

Auf die combinationen mit A^a für A und mit $\acute{A}^a$ und $\acute{B}^a$ für $\acute{A}$ und $\acute{B}$ will ich nur hin weisen; dise und überhaupt alle denkbaren combinationen dürften wol gegen 1000 variationen der classe IV, b. ergeben.

Eine übersichtlichere zusammenstellung der gewonnenen formeln, bei der allerdings nur die algebraische form berüksichtigt und die bedeutung derselben für das wesen der sprache völlig bei seite gelaßen ist, dürfte die folgende sein, welche auf der einen seite die formeln mit der wurzelform A, auf der andern die mit A^a zeigt.

I.	A		III, a.	A^a	
$\acute{A} + A$		$A + \acute{A}$	$\acute{A} + A^a$		$A^a + \acute{A}$
	$\acute{A} + A + \acute{B}$			$\acute{A} + A^a + \acute{B}$	
$\acute{A}^a + A$	$\acute{A}^a + A + \acute{B}$	$A + \acute{A}^a$	$\acute{A}^a + A^a$	$\acute{A}^a + A^a + \acute{B}$	$A^a + \acute{A}^a$
	$\acute{A} + A + \acute{B}^a$			$\acute{A} + A^a + \acute{B}^a$	
	$\acute{A}^a + A + \acute{B}^a$			$\acute{A}^a + A^a + \acute{B}^a$	

II.	aA	$\mathring{A}$	Aa	III, b.	aA^a	$\mathring{A}^a$	$A^a a$
		aAb				$aA^a b$	
	$b\mathring{A}$	$b\mathring{A}c$	$\mathring{A}b$		$b\mathring{A}^a$	$b\mathring{A}^a c$	$\mathring{A}^a b$

IV, a. $\acute{A} + aA$ u. s. f. $\acute{A}^a + aA$ u. s. f.	IV, a. $\acute{A} + aA^a$ u. s. f. $\acute{A}^a + aA^a$ u. s. f.
IV, b. $a\acute{A} + A$ u. s. f. $a\acute{A}^a + A$ u. s. f.	IV, b. $a\acute{A} + A^a$ u. s. f. $a\acute{A}^a + A^a$ u. s. f.

Anstatt der einfachen wurzel kann aber auch die mit sich selbst oder mit andern wurzeln zusammen gesezte erscheinen, was in cl. I. durch $A + A$ und $A + B$ in cl. II. (und IV.) durch AA und AB in cl. III. (und IV.) durch A^aA^a und A^aB^a dar zu stellen ist. Zusammen gesezte worte bezeichnen wir der bisher dar gelegten art und weise entsprechend; ein solches zusammen gesetztes wort auß classe III, z. b. νομοξέτης, würden wir morphologisch durch A^aaB^abc wider geben.

Ein nicht gar seltner fall ist im bisherigen nicht vor gesehen; man findet nämlich veränderung der wurzel in manchen sprachen, aber nicht sowol zum zwecke des beziehungsauβdruckes, als vilmer um die bedeutung in gewisser weise zu ändern, z. b. um das wort negativ zu machen, um einen gegensatz zu bezeichnen u. a.; solche offenbar verwante wurzelformen können wir etwa durch einen strich unter dem wurzelauβdrucke unterscheiden: $\underline{A}$. Desselben zeichens mag man sich einstweilen auch bedienen, um eine, zwar dem beziehungsauβdrucke dienende, aber nicht als durchgreifend und regelmäβig erkante veränderungsfähigkeit der wurzel an zu deuten.

Wo sich die den wortstamm bildenden elemente von den casussuffixen, personalbezeichnungen des verbi und verwantem leicht und scharf scheiden laβen, da tut man wol daran, für leztere die griechischen minuskeln zu benützen, um so eine gröβere genauigkeit der morphologischen bezeichnung zu erzilen und wenigstens einiger maβen auch die function der lautelemente zu berüksichtigen. Wir können demnach *védmi*, φλόξ, φλογός u. s. f. mit $A^a\alpha$; *vědájámi*, νόμος mit $A^a a\alpha$ bezeichnen; eben so z. b. magy. *irat* mit Aa, *iratsz* mit $Aa\alpha$ u. s. f.

Indem ich mich nun zu der betrachtung der wirklich vor kommenden sprachformen wende, bemerke ich, daβ ich die reihenfolge derselben nur einiger maβen den im algemeinen systeme der morphologischen formen gefundenen classen an zu passen gesucht habe. Da die sprachen oft nicht durchauβ dieselbe morphologische form zeigen (das nomen hat z. b. nicht selten eine andre form als das verbum), so habe ich, um die betrachtung einer sprache nicht zu zerreiβen, nicht überall streng systematisch verfaren zu müβen geglaubt. Das so eben von mir in seinen grundzügen dar gelegte system der sprachlichen formen ist ein rein morphologisches; es versteht sich also, daβ seine verschiedenen classen nicht zugleich die stufen der sprachlichen volkommenheit bezeichnen, die ja zum groβen teile, villeicht auβschliesslich, von der function abhängig ist, welche der laut hat, so daβ eine sprache der einfachsten classe I. möglicher weise vil höher stehen kann, als eine sprache der zusammengeseztesten formen der classe IV. Meine formeln stellen nur die

lautliche form dar, und es ist natürlich, daß die einfachste form voran gestelt ward und die zusammengesezteren formen, je nach dem grade der zusammensetzung, folgen. Alle natürlichen systeme befolgen ja dise anordnung.

In der folgenden betrachtung beschränke ich mich auf nomina und verba, da ja überall die andern redeteile sich auf dise beiden zurück füren laßen. Gar nicht in betracht kommen die echten interjectionen, weil sie weder in form noch in function zu den worten gehören; irer form nach nicht, wie der erste blick auf dieselben (z. b. *hm*, *pst* u. dergl.) lert, irer function nach nicht, weil sie nicht das denken, sondern das fülen und wollen unmittelbar auß drücken; sie sind dem tierlaute entsprechende lautgebärden, die wir neben der sprache besitzen (diß nach Heyses vortreflichen außfürungen[1]); system der sprachwißenschaft § 14, § 29).

II.

Anwendung des morphologischen systemes und seiner formeln auf eine reihe von sprachen.

I. classe.

Finden sich sprachen der formel *A*? d. h. gibt es sprachen, in welchen die wurzel one allen durch andre wurzeln vermittelten lautlichen außdruck der beziehung gelaßen wird? Obschon wir uns die sprache bei irer entstehung auf diser stufe zu denken haben, so dürfte sie doch nirgend so lange auf derselben gebliben sein, um das sie redende volk bis zur aufzeichnung schriftlicher denkmale gelangen zu laßen; eben so wenig steht zu erwarten, daß wir noch heutigen tages ein volk auf diser stufe sprachlicher entwickelung betreffen solten. Soll dise urform *A* außchließlich statt finden, dann darf die sprache noch keine wurzeln besitzen, die von irer ursprünglichen concreten bedeutung zu einer mer algemeinen, abstracteren, die beziehung auß drückenden bedeutung herab gesunken sind; denn so wie einer sprache dergleichen wurzeln zu gebote stehen, deren bedeutung durch eine beziehung gebildet wird, wird sie dieselben in den dienst concreter bedeutungswurzeln verwenden und somit die reine form I, 1 (*A*) auf geben und in die formen I, 2—4 um schlagen.

Am nächsten der form I, 1 steht wol noch das chinesische und einzelne sätze diser sprache zeigen sie noch rein, sind also durch *A B C* u. s. f. darstellbar. So z. b. das folgende:

toúy[2]) respondere, coram, par u. s. w. } d. h. (er) antwortete (und) sprach (häufig

yoŭe verba, dicere, vocare u. s. w. } im Meng Tse);

1) Ich brauche wol kaum zu bemerken, daß nicht alle teile des Heyseschen werkes mir in gleicher weise vortreflich scheinen; je weiter nach dem schluße des werkes zu, desto weniger belerendes und befridigendes fand ich in demselben.

2) Franz. umschreibung auß De Guignes lexicon.

und, wenn wir die negation als eine volle selbständige wurzel gelten laßen, auch der folgende satz:

民 *min* volk
可 *k'o* sollen
近 *kiu* nah
不 *pŭ* [1]) nicht
可 *k'o* sollen
下 *hià* unten

d. h. man soll das volk sich nahe bringen, nicht es herab drücken (auß Schott's abhandlung über chines. verskunst).

Ser häufig macht aber das chinesische gebrauch von wurzeln, die ire concrete bedeutung mer oder minder auf gegeben haben und so zum außdrucke der beziehung tauglich geworden sind. Streng genommen gehören die pronomina, namentlich demonstrativa, relativa, interrogativa diser schon abstracteren art von wurzeln an, die mer eine beziehung als eine bedeutung auß drücken; wir können sagen, daß solche wurzeln eine beziehung zu irer bedeutung gemacht haben. So weit sie sich nicht enge an andere wurzeln an schließen, gelten sie morphologisch natürlich als volle wurzeln der Form *A*, *B* u. s. f. Oft kann man im chinesischen beobachten, wie ganz concrete begriffe zu allgemeineren herab sanken, wie z. b. 夫 *fu* «mann» als demonstrativ gebraucht wird; 以 *ỳ* «gebrauchen, ursache» als präposition zur bezeichnung des instrumentalis dient; 兒 *yí* [2]) «kind» deminutiva bildet z. b.

石 *ši* stein
兒 *yí* kind

d. h. steinchen.

Bei der größeren menge der chinesischen hilfsworte ist jedoch eine concrete urbedeutung nicht mer nachweisbar.

Demnach ist das chinesische durchauß nicht mer der form I, 1 (*A*) an gehörig, sondern es macht bereits vilfach gebrauch von den elementen, die wir mit *Á 'B 'C* u. s. f. bezeichnen, d. h. von lose an tretenden, die beziehung umschreibenden hilfswurzeln. Es kent so wol die form I, 2 (*A* + *A*) z. b.

於 *iu*
人 *žin*

homini (oder hominibus).

als die verbindung I, 3 (*A* + *Á*) z. b.

民 *min*
之 *či*

populi

1) Bei De Guignes erklärt durch «non, ne, nolo». — 2) Phonetische umschreibung, wie sie mir geeignet scheint.

Ueberhaupt treten im chinesischen oft worte näher an einander, so daß wir eine art von zusammensetzung an nemen müßen; wir erhalten so die formen $A + A$ für eine chinesische reduplication, z. b.

人 *žin*
人 *žin* } homines; omnes, multi homines;

und $A + B$ für eine zusammensetzung verschidener worte, z. b.

水 *šuĭ*, waßer
手 *šeù*, hand } steuermann.

Besonders bemerkenswert sind hier die synonymen zusammensetzungen (vgl. Endlichers chin. gramm. § 132 flg.).

Die sprache, besonders die neuere, kann auch merere beziehungslaute an einen bedeutungslaut fügen, so entsteht z. b. $A + \acute{A} + \grave{B}$ (also I, 3), z. b.

我 *ngò*
們 *men*
的 *ti* } noster;

und I, 4, z. b.

把 *pà*, capere, bezeichnet den accus.
我 *ngò*, ego
們 *men*, pluralzeichen } nos;

so dass also sämtliche für I. denkbare formeln im chinesischen vor kommen.

Eine besonders beachtenswerte seite diser in so vilen beziehungen merkwürdigen sprache kann hier nicht übergangen werden, da sie von besondrer morphologischer bedeutung ist. Es wird nämlich in den wörterbüchern und grammatiken einstimmig gelert, daß in nicht seltenen fällen verschidenheit der außsprache, d. h. der wechsel des so genanten accents der in irer lautlichen qualität völlig unwandelbaren wurzeln oder worte, mit einer verschidenheit der beziehung hand in hand gehe, bei übrigens gleich bleibender bedeutung. Wäre hier ein wirklicher wechsel in der lautmaterie, so hätten wir fürs chinesische geradezu wurzeln der classe III. an zu nemen; da aber der wechsel nur in der quantität der außsprache besteht, an der qualität des lautes aber nichts ändert, so ziehe ich vor, für dise besonderheit nicht die bezeichnung A^a A^b u. s. f. zu verwenden, sondern sie entweder unbezeichnet zu laßen oder durch zalenexponenten an zu deuten, also mit A^1, A^2 u. s. f.; in die schematische übersicht habe ich jedoch die bezeichnung dises feinen unterschides nicht auf genommen. Beispile:

好 *haò*, gut; *háo*, lieben.

下 *hià*, unterteil; *hia*, hinab steigen.

女 *nǜ*, weib; *nù*, ein weib nemen (Schott, chines. gramm. p. 11), filiam alicui in uxorem dare (De Guignes s. v.).

湯 *thāng*, kochendes wasser; *thàng*, brühen.

來 *lai*, kommen; *lài*, ein laden, kommen machen.

聞 *wen*, hören (lit. *klaus-ýti*); *wén*, fragen (lit. *kláus-ti*) u. s. f.

One zweifel sind hierher auch solche fälle zu rechnen, in denen die chinesische schrift den unterschid ebenfals dar stelt, was für uns, die wir uns nur an die lautsprache halten, völlig gleichgiltig ist, z. b.

家 *kia*, familie, haus; 嫁 *kiá*, heiraten, von der frau; also etwa: familie machen (Schott: «gleichsam sich ein häusen» chines. gramm. p. 22 flg.).

子 *tsè*, filius; 子子 *tse*, gemelli; 字 *tsé*, filios excolere, lactare. Hier ligt sogar eine dreifache abstufung desselben wortes vor. Namentlich häufig ist also der ton *khiu* mit transitiver beziehung verbunden.

Nicht nur nach classe II. sondern auch nach classe III. neigt also das chinesische hin und vereinigt demnach, trotz seiner isolierung, in sich die andeutungen höherer und höchster sprachentwickelung: es enthält die keime der anfügung und die der flexion. Nicht nur seinem innern wesen nach, was nicht hierher gehört, sondern auch in seiner lautlich grammatischen form gehört es zu den fein gebildeten sprachen, so paradox eine solche behauptung auf den ersten blick auch scheinen mag. Freilich gebürt seiner lautform in lexicalischer beziehung nicht das gleiche lob, da in diser richtung das chinesische seine aufgabe nur höchst unvolkommen löst (wegen der geringen anzal lautlich verschidener worte), weshalb im eine zeichenschrift notwendiger weise zur seite treten muste.

Fürs siamesische und annamitische gehen mir leider hilfsmittel und also auch kentnis ab; vom barmanischen wird weiter unten einiges bei gebracht werden.

Mit einem merkwürdigen beispil für die aufschließlich fest gehaltene form $\acute{A}+A$ (I, 2) hat uns so eben von der Gabelentz in dankenswertester weise bekant gemacht durch seine grammatik und wörterbuch der Kassia-sprache, Lpz. 1858 (Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1858; philol. histor. classe I.). Alle bestimmenden, beziehung auß drückenden wurzeln treten hier vor das bestimte, vor die bedeutungswurzel, so daß hier $\acute{A}+\grave{B}+A$, $\acute{A}+\grave{B}+\acute{C}+A$ ja sogar $\acute{A}+\grave{B}+\acute{C}+\acute{D}+\grave{E}+A$ vor komt, z. b. *ia u ba la pyn-lih*, wörtl.: «zu (*ia* zeichen des dativs) dem (*u* männlicher artikel im singular) welcher (*ba* relativ, bildet participia) haben (*la* possessiv, bildet das präteritum) machen (*pyn*, bildet causativa) weiß (*lih* weiß, weiß sein)», d. h. dem geweißten, dealbato.

Die wurzel allein, one eine beziehungswurzel vor sich, erscheint nur als imperativ, z. b. *shah*, erlaube; *shìm*, *bám*, nemet, eßet (§ 64); außerdem haben alle verbalformen mindestens das pronomen, alle nominalformen one außname den artikel als beziehungsbezeichnung vor sich. Der artikel wird in weitester außdenung gebraucht und da er im

singular das genus und außerdem auch den plural vom singular scheidet, so ersezt er zimlich genügend die endungen höher organisierter sprachen, z. b. *u kún*, filius, *ka kún*, filia; *la* (s. o.) *long* (sein) *u briu* (mensch) *u ba* (s. o.) *u trai* (herr) *üng* (haus), d. h. es war ein mensch, welcher (war) ein hausherr; *u kún u briu u long u trai ka sabbath*, der son des menschen (er) ist der herr des (wörtlich: die, femin. der casus bleibt unbezeichnet) sabbaths; würden wir diß mit indogermanischen worten wider geben, so würde es etwa zu lauten haben: *sa su sa man sa as sa pa sá s.;* denn wortbildungselemente und casussuffixe müßen bei einer getreuen übertragung weg bleiben, ein umstand, der es uns so schwer macht, wörtlich auß sprachen der classe I. zu übersetzen und überhaupt uns in sie völlig hinein zu versetzen. Beispile fürs verbum: *nga shim*, ich neme; *nga la shim*, ich habe genommen u. s. f.

Dise sprache ist auch dadurch besonders merkwürdig, daß sie bei dem auch als artikel gebrauchten pronomen der dritten person und beim pronomen der zweiten person das genus unterscheidet: *u*, er, *ka*, sie; *mé*, du masc., *phá*, du fem.; ferner dadurch, daß sie beim pronomen durch die wandlung des außlautenden vocals in *i* — und zwar ligt hier stets die form des feminins zu grunde — den plural desselben bildet: *nga*, ich, *ngi*, wir; *ka*, sie, *ki*, sie pl.; *phá*, du fem., *phi*, ir. Der plural gilt für alle geschlechter. An ein an geschmolzenes pluralzeichen ist nicht zu denken, das würde dem organismus der sprache gemäß vorauß gehen; wir haben demnach hier eine vereinzelte außname von der sonst durchweg festgehaltenen form *A* vor uns. Eine regelmäßige veränderung zum zwecke des beziehungsaußdruckes, wie in III, findet nicht statt, die form A^a ist also hier nicht an zu nemen; es ward für den plural (so haben wir uns wol die sache zu denken) ein besonderes dem femininum (das ja mit dem plural in so vilen sprachen verwant ist) änliches wort geschaffen und demnach nemen wir, nach dem was oben im algemeinen teile bemerkt ward, für das pronomen des Kassia die form $\underline{A}$ an. Ein accentwechsel wie im chinesischen (A^1 A^2 u. s. f.) findet sich hier nicht.

In einem auffallenden gegensatze zu dem außschließlichen vortreten der beziehungswurzeln vor die bedeutungswurzeln steht der nach dem regierenden worte stehende genitiv; eine wortfolge, die in änlichen verhältnissen ebenfals fest gehalten wird; man sagt z. b. *mih-ngi*, aufstehn-sonne, d. i. sonnenaufgang; *trai-üng*, herr-haus, d. i. hausherr u. s. f. eben so *rang-bah*, mann groß, d. i. hauptmann (das adjectiv ist hier wol als abstractum zu faßen: mann der größe); *riu-hok*, mensch gerecht oder gerechtigkeit, d. h. gerechter, justus.

Eine auf der stufe der isolierung (cl. I.) stehende sprache der entgegengesezten form, also nach der formel $A + \acute{A}$ (genauer $A + \acute{A} + \acute{B}\ldots$, I, 3) gebaut, ein wares gegenstück zum Kassia, ist die sprache der Namaqua (Wallmann, die Formenlehre der Namaquasprache etc. Berlin 1857). Wenigstens läßt der ganze durchauß ans Kassia erinnernde und alle characterzüge der isolierung an sich tragende bau die form $A + \acute{A}$ (I, 3) als die allein treffende erscheinen, nicht *Aa* (II, 2). Daß ser oft elemente an gewant werden, die als selbständige worte nicht erscheinen, steht unserer ansicht durchauß nicht im wege.

Die wurzel (in deren zerlegung Wallmann wol vil zu weit geht) ist in der regel einsilbig; nur nach den auſslauten *-r*, *-n*, *-w* folgt noch ein vocal, one daſs man an zusammensetzung zu denken hätte. Disen vocal halte ich für einen phonetischen nachschlag, bedingt durch bestimte consonanten und an sie gebunden; einen beweis für dise anname finde ich darin, daſs auch dise wurzeln, wie die einsilbigen, oft reduplicirt werden. Wie z. b. von |*o* (die striche bezeichnen die verschidenen schnalzlaute), eng, |*o*-|*o*, ängstigen, so wird z. b. von‖ *anu*, rein, ‖*anu*-‖*anu*, reinigen, gebildet. Auch die zusammensetzung verschidener wurzeln ist in diser sprache beliebt, z. b. *ā*, trinken, ‖*ō*, sterben; *ā*-‖*ō*, ersaufen. Die wurzeln diser sprache haben also die form *A* (*A* + *A*, *A* + *B*).

Dise wurzeln gelten zugleich als verba und zwar als jede person und jedes tempus; das verbum fält also mit der wurzel zusammen und ist durch dieselbe formel dar zu stellen.

Imperfectum, perfectum und futurum werden zwar durch *go*, *ge*, *nĭ* bezeichnet, doch können dise elemente auch vom verbum durch andre sazglider getrent werden, vor demselben oder nach demselben stehen und sind also nicht als teile desselben, sondern als zeit an deutende partikeln zu betrachten, z. b. *ǩoi-ba ma*, wörtl.: «mensch-er geben» d. h. «der mensch gibt»; *ǩoi-ba go ma*, der mensch hat gegeben; *ǩoi ba nĭ ma*, der mensch wird geben.

Das personalpronomen steht im angefürten beispile am nomen, das (s. u.) nur in verbindung mit im erscheint; es kann aber auch an conjunctionen treten, z. b. *zĭ-b ǩoi-ba ma*, wörtlich «und-er mensch-er geben» d. h. «und der mensch gibt». Wir dürfen deshalb erwarten, das personalpronomen gelegentlich am verbum selbst zu finden; diſs geschiht wenn ein pronomen subject ist. Man kann z. b. sagen: *ti-ta ma*, ich gebe; aber auch *ma-ta*, (geben-ich) ich gebe; *ma-ta go*, ich gab u. s. f. In disem falle kann also auch das verbum die form *A* + *Á* (bei reduplicierter und zusammen gesezter wurzel also die formen *A* + *A* + *Á*, *A* + *B* + *Á*) haben. Zum verbum gesellen sich ferner gerne die hilfsverba *ge*, *a*, *ra*, auch *ge ra* zusammen, one etwas an der beziehung zu ändern und one, wie es scheint, mit im in zusammensetzung zu treten, z. b. *ti-ta ge ra ma* oder *ma-ta ge ra*, ich gebe.

Das passivum wird durch an die wurzel an tretendes *he* gebildet, also *ma-he*, gegeben werden; *ti-ta ma-he* oder *ma-he-ta*, ich werde gegeben; die natur dises *he* wäre genauer zu untersuchen, um fest zu stellen, ob wir hier *A* + *B* oder *A* + *Á* an zu nemen haben. Eben so bildet an tretendes *sẹn* (*ẹ* ist verhallendes *e*) reflexiva, z. b. |*hau*-|*hau*, sammeln, |*hau*-|*hau-sẹn*, sich sammeln. Ein an tretendes *ba* bildet «transitive verba» z. b. *ti-ta* (ich) *ge* (hilfsverbum) *sa-z* (du) *mi-ba* (sagen, transit.), ich sage dir. Ich vermute, daſs dises *ba* ein pronomen der dritten person ist und dise form also dem bestimten (das object enthaltenden) verbum, z. b. des magyarischen, entspreche. Man bildet nun mit an gehängtem pronomen *mi-ba-bi* (sagen-es-er) im sagen, *mi-ba-ti* (sagen-es-ich) mir sagen (wofür man jedoch auch one *ba* sagen kann; *mi-ti* u. s. f.). Auch hier haben wir also die form *A* + *Á* + *B*.

Die stämme der nomina unterscheiden sich nicht von denen der verba, sie sind aber wol noch häufiger auſs mereren wurzeln zusammen gesezt als dise. Adjectiva haben jedoch auch inen eigentümliche stamformen; so tritt z. b. *-sa* an: |*nam*, lieben, |*nam-sa*, lieblich;

|gei, stark, *|gei-sa*, kräftig; *!gai*, gut, *!gai-sa*, gütig; auch *-si*, z. b. *||gũ*, zeugen, vater, *||gũ-si*, väterlich; *||oa* nicht können, *||oa-si*, impotens; auch *-xa*, z. b. *||gũ-xa*, väterlich. Ein *-o* ist privativ, eben so *-o-si*, z. b. *|gam*, waßer, *|gam-o* und *|gam-o-si*, waßerlos. Ein an gehängtes *-se* macht auß allen stämmen adverbia. Wir nemen auch hier überall $A + \acute{A}$... als außdruck diser bildungen an.

Das adjectivum bleibt stets unverändert, z. b. *gai au-b* (groß maun-er) der große mann; *gai au-ta* (groß mann-ich) ich großer mann.

Anders verhält es sich mit den substantiven, den pronominibus, die ja auch substantiva sind, und den adjectiven, wenn sie als substantiva gebraucht werden. Dise setzen nämlich stets ein pronomen an, welches verschiden ist, je nach der zal (sing., plur., dual) und nach dem genus. Das genus ist masc., fem. und unentschiden, commune; lezteres fält öfters mit dem femininum zusammen. Dasselbe nomen kann nach bedürfnis in jedem genus erscheinen wie z. b. *k'oi*, mensch, je nachdem vom menschen im algemeinen oder von einem männlichen oder weiblichen menschen die rede ist, z. b. *k'oi-i* comm., *k'oi-s* fem., *k'oi-b* masc. Hier entschid das natürliche geschlecht, bisweilen aber dienen dise genusunterschide auch dazu, andre beziehungen auß zu drücken, die man sexuell faßt, z. b. *|gam-i* comm. ist waßer schlechthin, *|gam-s* fem. ein besonderes waßer, z. b. taufwaßer, *|gam-b* masc. ist bedeutendes waßer, fluß u. s. f. Das pronomen hat natürlich immer dise genuszeichen an sich und besteht also, wie alle substantiva (als sazteile genommen, nicht bloß irem stamme nach), auß zwei teilen, auß der wurzel und dem an gehängten pronomen, z. b. *sa-se* oder *sa-s* comm. und fem., du; *sa-ze* oder *sa-z* masc., du; *sa-dǫ* plur. comm., ir; das femin. plur. ist *sa-so*, das masc plur. *sa-go*, eben so gebildet, wie z. b. *au-ze* sg. 2. prs. msc., du mann, *au-ba* oder *au-b* 3. msc., der mann, *au-ta* 1. msc. ich mann, *au-gu* 3. pl. msc., die männer, oder comm.: *k'oi-na*, die menschen, *k'oi-se*, du mensch, *k'oi-dǫ*, ir menschen u. s. w. Durch disen pronominalen zusatz unterscheiden sich also die substantiva von den verben und adjectiven und haben daher stets die form $A + \acute{A}$ ($A + A + \acute{A}$, $A + B + \acute{A}$), z. b. *|nam*, lieben, aber mit dem suffix *i* des comm.: *nam-i*, liebe (amor). Wie im Kassia der vor gesezte, so gilt hier der an gehängte artikel zugleich als bestimter und unbestimter artikel. Er felt nur bei dem ersten substantiv zweier eng verbundener substantiva, z. b. *|u zĩ ã-s*, eßen und trinken, und im praedicat z. b. *|eĩ-b* (er-er) *ge* (esse) *sa-da* (du-ich, d. h. wir) *||gũ* (vater, zeugen), d. h. er ist unser vater.

Die casus haben keine bezeichnung; der genitiv steht voran, oder er wird durch eine partikel an gedeutet.

Anstatt der präpositionen des Kassia erscheinen hier postpositionen, dem algemeinen charakter der sprachform entsprechend, auch die conjunctionen stehen meist am ende des satzes.

Wir haben im Namaqua also nur folgende wortformen A ($A + A$, $A + B$) verbum, adjectiv, lezteres auch A ($A + A$, $A + B$) $+ \acute{A}$; A ($A + A$, $A + B$) $+ \acute{A}$ substantivum (und pronomen).

Mit einer einzigen außname gilt die formel *A* + *Á*... auch fürs Barmanische, von welchem W. v. Humboldt in der einleitung zur Kawisprache § 24 eine so genaue beschreibung gibt, daß sich die morphologischen formeln diser überauß einfach gebauten sprache darauß entnemen laßen.

Das barmanische ist isolierend, trent die einzelnen elemente, die wurzeln, auß denen es besteht, in der außsprache (mit einer einzigen außname a. a. o. pg. CCCLXV) und es hat auch darin mit dem chinesischen die gröste änlichkeit, daß es außer der lautmateriellen substanz der silben (oder wurzeln) noch die außsprachsweise derselben als differenzierungsmittel derselben kent, die so genanten accente, deren man im barmanischen dreierlei unterscheidet.

Die wurzel, die hier ebenfals zugleich wort ist, verhält sich wie im chinesischen, sie ist durchauß unveränderlich, z. b. *mai*, schwarz sein, indigopflanze; *né*, bleiben, fort wären; sonne u. s. f. Ire form ist also *A*. Zusammensetzung von wurzeln ist häufig, z. b. *chì:* [1]) und *chì:-naǹ*, auf etwas reiten oder faren (*naǹ*, auf etwas treten); *lak-tat* (*lak*, hand, *tat*, etwas verstehen, geschikt) künstler u. a., demnach *A* + *B*.

Alle eine beziehung auß drückenden elemente treten hinter den bedeutungslaut, auß genommen hiervon ist nur die bildung der substantiva, welche durch ein vor geseztes *a* geschehen kann, one daß alle substantiva dises *a* bedürften. Dise im widerspruche gegen den sonstigen bau der sprache stehende erscheinung erinnert auffallend an das im südlichen China den nominibus propriis vor geschlagene *a* (vgl. Schott, chines. gram. p. 144, anm. 2); villeicht sind beide *a*, das des barmanischen und das des chinesischen mer phonetischer natur; vor der hand aber ziehe ich vor, es als beziehungslaut zu faßen und dise substantiva der form *Á* + *A* zu zu teilen, z. b. *chá*, eßen, *a-chá*, speise. Außerdem kommt für substantiva auch die form *A* + *Á* vor, z. b. *ché*, senden, *ché-hkyaǹ:* sendung (*hkyaǹ:* bildet abstracta).

Alle casuszeichen stehen nach, geschlechts- und pluralzeichen stehen zwischen nomen und casuszeichen; fürs nomen erhalten wir so die formen *A* + *Á*, *A* + *Á* + *B*... oder, wenn *a* vor dem nomen steht, *Á* + *A* + *B*...

Das verbum hat durchauß die form *A* + *Á*... da plural (so weit er vorhanden), modus und tempus am ende der wurzel bezeichnet werden. Bezeichnung der person findet nicht statt, das personalpronomen bildet ein getrentes wort für sich. So bildet z. b. *thang* (ein wort algemeinster bedeutung) nicht nur den nominativ und andre casus, sondern auch den indicativ; richtiger scheint zu sein, daß *thang* nur nominalformen bilde, casus und modus aber unbezeichnet bleiben, z. b. *ñá-thang pru-thang*, ich tue, wol so vil als «ich tu-end»; *lú-tat-thang hchauk-thang-im*, wörtlich: mann-geschikt-*thang* bauen-*thang*-haus (das mir unübersezbare *thang* muste bei behalten werden), das heißt: das von einem geschikten manne (*lú-tat* ist *A* + *B;* eine componierte wurzel, die durch *thang* zu einem

1): bedeutet eine gewisse außsprachsweise.

adjectiv oder particip wird) gebaute haus (*hchauk-thang* ist ein adjectiv oder particip von *hchauk*, bauen, das mit dem folgenden *im*, haus, in zusammensetzung steht). Das adjectiv wird nämlich durch *thang* gebildet und tritt dann vor das substantiv, z. b. *kauñ:-thang-lă*, der gute mann; *kauñ:-thang* allein kann heißen «gut ist» oder «gut seiend», *lă*, mann, tritt damit in zusammensetzung; *thang* scheint ein pronomen algemeinster bedeutung, ein demonstrativ oder relativ zu sein; da es adjectiva und verba bildet, so ist also nomen und verbum hier deutlich gleichförmig. Das adjectiv kann aber auch one *thang* seinem substantiv nach treten: *mwă:-kauñ*, kuh-gute (gute kuh). Am schluße des satzes wird beim verbum nicht *thang* sondern anstatt desselben *éng* gebraucht, z. b. *pru-éng* (ich) tue (oder auch: du tust, er tut), *pru-prî:-éng* (ich, du u. s. f.) habe getan. Wir sehen demnach überall die form $A + \acute{A}$ ....

II. classe.

In der zweiten classe, in der sprachform, welche bei unveränderlicher wurzel die beziehungselemente nicht mer als selbständige, volkommene wurzeln neben die bedeutungswurzel hin stelt, sondern sie mit derselben, meist verkürzt, zu einem worte verbindet, tritt uns vor allem die form entgegen, welche die beziehungselemente außnamslos am ende der wurzel suffigiert; sprachen der formel II, 2, *Aa* (*Aabc*...). Diß geschiht im drawidischen sprachstamme, von welchem mir das Tamil auß Grauls Bibliotheca Tamulica II, Lpz. 1855 bekant ist; ferner in jener großen kette von sprachen und sprachstämmen, die man hauptsächlich diser übereinstimmung in irem baue wegen unter dem namen der finnisch-tatarischen oder altaischen oder ural-altaischen zusammen faßt. Genauer studiert habe ich von disen vor allem das Magyarische, ferner das Türkische mit dem Jakutischen (nach Kasem-Beg, allgemeine Grammatik der Türkischen Sprache, übersetzt von Zenker, Lpz. 1848, und Dieterici, Chrestomathie Ottomane, Berlin 1854; Böhtlingk über die Sprache der Jakuten, St. Petersburg 1851, einem werke, dem ich außer reicher positiver belehrung vilfache anregung verdanke) und das Mandschu (nach Kaulen, linguae Mandshuricae institutiones, Ratisbonae 1856). Denselben bau zeigt das durch Castréns aufopfernden forschereifer unsrer kentnis erschloßene Samojedische.

In disen sprachen erscheint aber nicht selten auch noch die bloße wurzel, namentlich oft als nomin. sing. der nomina, z. b. magy. *ir*, salbe, *vágy*, das verlangen, jakut. *ac* (spr. *ás*) hunger und hungrig, aber auch als verbalform, z. b. als 3te pers. des unbest. praesens, so magy. *ir*, er schreibt, *vágy*, er begert und nicht wenige andere. An einen wegfall eines suffixes ist hier nicht zu denken, wol aber sind dise formen den andern gegenüber durch abwesenheit aller suffixa characterisiert und sie tragen also gewisser maßen ein negatives suffix. Characteristisch bleibt diß erscheinen der nakten wurzel als wort aber immerhin. Natürlich können auch stämme mit bildungselementen eben so auf treten, z. b. magy. *írat*, die schrift, *irat*, er läßt schreiben.

Hier können wir nun von der im ersten teile pg. 7 vor geschlagenen genaueren bezeichnung der beziehungselemente gebrauch machen und die wortbildenden elemente von den suffigierten pronominibus (personalendungen), so wie wo von pluralzeichen und casuselementen (postpositionen) scheiden. Wie schon gesagt, treten alle dise elemente, oft in ser großer anzal, an die wurzel hinten an, z. b. magy. *kés*, meßer, sing., *kés-ek* plur., *Aα*; dat. pl. *kés-ek-nek: Aαβ*; *bátya*, älterer bruder, diß wort enthält aber (wie *atya*, vater, *anya*, mutter) bereits ein suffix der 3ten person, also eigentl.: «sein bruder» u. s. f. also *Aα*; *bátyám*, mein ält. bruder, ebenfals *Aα*; *bátyámé*, meinem ä. b. angehörig, *Aαβ*; *bátyámék* plur. davon, die angehörigen meines älteren bruders, *Aαβγ*; *bátyáméknál*, bei den angehörigen meines älteren bruders, also *Aαβγδ*; *iratok*, ich laße schreiben, *Aaα*; *iratom*, ich laße es schreiben, enthält, wenn auch jezt nicht mer deutlich erkenbar, das object, also *Aaαβ*; *iratnak*, der schrift[1]), *Aaα* u. s. f.; türkisch z. b. سوندشه مملك, *sev-in-iš-e-me-mek* (*sev* lieben, freuen, *in* reflex., *iš* gegenseitig, *e-me* nicht können, *mek* infinitivelement), sich gegenseitig einer über den andern nicht freuen können, also *Aabcde*.

Eine eigentümlichkeit der meisten oben genanten sprachen dieser form ist das streben nach worteinheit auf dem wege der vocalharmonie; der vocal von *A* ist nämlich nach gewissen gesetzen maßgebend für die vocale von *abc*...; eine bemerkenswerte erscheinung, die wol am stärksten und ungetrübtesten im Jakutischen hervor tritt.

Der bedeutungslaut ist auch hier, außer der rein lautmechanischen einwirkung der an tretenden elemente, unveränderlich.

Jener wechsel im laute zwischen form- und bedeutungsverwanten wurzeln und worten (s. o. pg. 7), von dem wir beim pronomen des Kassia schon ein merkwürdiges beispil fanden, zeigt sich vereinzelt auch hier, doch meist mer als vermitler eines unterschides in der bedeutung, denn als beziehungsaußdruck. So ist z. b. im tamulischen *a* auf die ferne hin weisend, *i* auf die nähe und *e* fragt, z. b. அந்த *anta*, that, இந்த *inta*, this, எந்த *enta*, what? அன்ன *aṉṉa*, of that kind, இன்ன *iṉṉa*, of this kind, என்ன *eṉṉa*, of what kind? magy. *ez*, diser, dise, dises, *az*, jener u. s. f.; *ott*, hier, *ott*, dort, und so in allen ableitungen von disen stämmen; so verneint tahitisch (Humb. Kawispr.) *aima*, *aina*, *aita* die vergangenheit, *eima*, *eina*, *eita* die zukunft. Eine zusammenstellung solcher fälle gibt Pott in Kuhns Zeitschrift für vergl. Sprachforschung u. s. w. II, pg. 420. Auf dise art wird bisweilen das genus unterschiden, wie mandschu *khakha* vir, *khekhe* mulier; *ama* pater, *eme* mater (oft angefürte beispile); tungusisch (Castrén gramm. pg. VIII.) *atirkan* greisin, *ätirkän* greis; Dakota (v. d. Gabelentz gramm.) *cinkxi* (sprich *čiṅksi*, *tschiṅkschi*) son, *conkxi* (*čoṅksi*) tochter. Öfters werden so auch entgegengesezte oder sonst correlate bedeutungen geschiden, wie magy. *enni* eßen, *inni* trinken; mandschu *wasime* descendere, *wesime* ascendere; *ganggan*

1) Der magyarische artikel ist ein ganz selbständiges wort, nämlich das ab geschwächte demonstrativum *az*, jener, und ist stets mit unserem bestimten artikel zu übersetzen. Er steht in keiner festeren verbindung mit dem worte vor dem er steht, wenn er auch durch den anlaut desselben lautliche modification erleidet; er ist also ja nicht etwa mit dem artikel des Kassia zu vergleichen, der, genusanzeigend, enge zum wesen des wortes gehört und von im untrenbar ist. Der magyarische artikel bildet also keine außname von der form *Aa*.

esprit fort, *genggen* esprit faible (Kaulen pg. 8). So wird im südafricanischen bisweilen durch stärkere aussprache einer silbe das verbum negativ gemacht, diß geschiht im Hereró in mereren fälen durch betonung des anlautenden vocals (Hahn, grammatik des Hereró Berl. 1857, tab. E); ferner gehört wol hierher der so genante «flat vowel» amerikanischer indianersprachen (z. b. in Howse, grammar of the Cree language, London 1844), wodurch die indefinite form des verbum bezeichnet wird. Beispile auß dem jakutischen und verwanten sprachen findet man bei Böhtlingk jakut. gramm. § 229 pg. 105 z. b. jakut. *абыс* (*abys*) weibliche scham, *өбүс* (*öbüs*) männliche scham; *алын* (*alyn*) unterteil, *илин* (*ilin*) vorderteil; *кыс* (*kys*) winter, *күс* (*küs*) herbst; hier zeigt das türkische قيش und كوز daß das jakutische ursprünglich verschidene worte einander änlich gemacht hat, wie auch in *быар* (*byar*) leber, und *бүөр* (*büör*) niere; hier haben wir also eine wirkung der analogie zu erkennen, die uns in solchen fällen immer als möglich erscheinen muß. Da auch consonantenwechsel solche correlate bedeutungen scheidet, z. b. türk. آلت vorderseite, آرت hinterseite (a. a. o.) so ligt es klar vor, daß wir hier an keine der classe III. entsprechende flexion zu denken haben. Änlich verhalten sich im indogermanischen die pronominalwurzeln *a* jener, *i* diser, ferner *ta*, *ja*, *ka*, demonstr., relat., interr.; reich ist an solchen erscheinungen das koptische, z. b. ⲥⲩⲣⲉ filius, ⲥⲩⲣⲉ filia s. u.

In reduplicationen differenziert sich oft die mit sich selbst zusammen gesezte wurzel, offenbar auß rein phonetischen gründen. Eine genaue untersuchung diser nicht flectierenden wurzelveränderung dürfte eben so wichtig für die wißenschaft, als schwirig sein.

Einen gegensatz zu den eben besprochenen sprachen der form *Aa*.... bilden die sprachen, welche dem noch nicht mit einem algemein anerkanten namen belegten sprachstamme an gehören, der weitauß den größeren teil des südlichen Afrikas inne hat und den wir in ermangelung einer genaueren bezeichnung einstweilen den südafrikanischen nennen wollen. Der mutige fleiß der missionare versiht uns von jar zu jar mit reicheren und beßeren hilfsmitteln für das studium diser interessanten sprachformen; hier beschränke ich mich auf zwei derselben, nämlich auf das Zulu (Lewis Grout, the Zulu and other dialects of southern Africa, im Journal of the American oriental Society vol I. und eben das. pg. 385 flg. J. C. Bryant, the Zulu language) und das Hereró (H. Hahn, Grundzüge einer Grammatik des Hereró. Berlin 1857).

In disen südafrikanischen sprachen treten nämlich bei nomen und verbum die beziehungslaute zum größeren teile vor die wurzel; dem verbum treten sie als besondere worte vor, indem z. b. die tempus- und moduselemente mit dem vor das verbum tretenden personalpronomen verschmelzen (IV, b), wärend beim nomen die dasselbe in gewisse, unserem genus und numerus entsprechende zalreiche classen scheidenden pronominalen elemente unmittelbar vors nomen treten. Alle zu einem solchen nomen gehörigen adjectiva und pronomina richten sich, wie bei uns in der endung, so hier in irem anlaute nach dem nomen, eben so das personalpronomen des zum nomen gehörigen verbum.

Die nakte wurzel erscheint nur in wenigen verben, da sogar der imperativ die stamm-

endung *a* bewart (wenn wir anders mit recht in disem *a* ein wortbildendes element erkennen), alle nomina haben praefixe [1]), alle verbalformen die vor tretenden pronomina.

Beispile fürs nomen: Zulu *umu-ti*, Hereró *omu-ti*, baum, plur. *imi-ti*, Her. *omi-ti*, also *a.A;* Hereró *oku-sut-a* infinitiv, bezalen, also *aAb;* natürlich können die beziehungselemente in größerer anzal vorhanden sein, z. b. Her. *oku-ri-sut-a* (*ri* reflexiv), sich bezalen, Zulu: *uku-zi-bek-el-is-a* (*uku* nominalpraefix des infin.; *zi* reflexiv, *bek* wurzel, auf bewaren, *el* für jemanden, *is* causativ, *a* infinitivendung), für sich selbst auf bewaren (to lay up) laßen.

Casusbildung durch relativpronomen und präpositionen, die keine wesentlich abweichenden morphologischen formen bedingen.

Die abwandlung des verbum nach personen geschiht durch vorsetzen der pronomina, an welche die elemente an treten, die das tempus bezeichnen, das übrigens auch durch zusätze hinter der wurzel auß gedrükt wird. Dise pronomina werden als pronomina separata außdrüklich bezeichnet und geschriben, sie stehen aber, wie auß irer function sich ergibt, im innigsten anschluße ans verbum, so daß wir hier wol one zweifel die formen IV, a und IV, b vor uns haben, z. b. Hereró *tu sut-a*, wir bezalen, *Á* + *Aa* (IV, a, 2), bei Hahn participialer aorist, nach der erklärung etwa ein durativum one zeitbestimmung; *a-tu sut-u*, wir bezalten, indicativer aorist bei Hahn, scheint das eintreten der handlung zu bezeichnen, *aÁ* + *Ab* (IV, b, 15); *tu-a sut-u*, wir bezalten, imperfectes praesens, *Áa* + *Ab* (IV, b, 16) u. s. f. Reine verbalwurzeln haben wir offenbar vor uns in fällen wie *tu ri*, wir sind (*ǵi ri*, ich bin u. s. f.), *tu ya*, wir gehen (*ǵi ya*, ich gehe); *ǵi i*, *tu i*, ich kenne, wir kennen u. s. f.; demnach ligt hier *Á* + *A* (I, 2) vor.

Nur die 2. imperat. affirm. hat kein praefix: *sut-a*, bezale; *sut-e*, *sut-ee*, *sut-eye*, bezalet; *sut-is-a*, laß bezalen, *sut-is-e*, laßet bezalen; diser wechsel des außlautes zwischen *a* und *e* komt auch sonst noch vor, z. b. im singular: *ka sut-e*, geh, bezale. Die an gefürten imperative zeigen also die form *Aa*, *Aab* (II, 2). In entsprechender weise zeigt das Zulu praes. *gi tand-a*, ich liebe, *si tand-a*, wir lieben u. s. f. (*Á* + *Aa*, IV, a, 2) oder auch *gi ya* (hilfsverbum, eigentlich «gehen» bedeutend) *tand-a*, also *Á* + *B* + *Aa* (dieselbe form IV, a, 2); imperfect 1. sg. *g-a tand-a*, 1. pl. *s-a tand-a;* futurum 1. sg. *g-o tand-a*, 1. pl. *s-o tand-a* (*Áa* + *Ab*, IV, b, 16) und der imperativ *tand-a* (dafür aber auch *ma u tand-e*); daneben finden sich vilfach mit formen der hilfsverba umschribene außdrukswesen, die wir hier übergehen können.

Characteristisch für dise sprachen ist also vor allem die vorliebe für den beziehungsaußdruck vor der wurzel, der namentlich beim nomen sich in höchst eigentümlicher weise entwickelt hat; auß derselben neigung entspringt die bezeichnung der verbalformen am pronomen. Namentlich bei der bildung der ab geleiteten verba findet sich daneben auch die anfügung des beziehungsaußdruckes ans ende der wurzel in einer an den bau der sogen. tatarisch-finnischen sprachen erinnernden weise.

1) Nur im vocativ kann das praefix im Zulu weg fallen. Vgl. was unten über den vocativ bemerkt ist.

Große schwirigkeiten sezt das koptische der morphologischen betrachtung entgegen; trotz aller an gewanten mühe ist es mir nicht gelungen, mir einen sicheren blick in den bau des koptischen wortes zu eröfnen. Benützt habe ich Schwartzes koptische grammatik Berl. 1850 und M. A. Uhlemanns linguae copticae grammatica etc. Lpz. 1853. Lezteres buch bot mir auch die erwünschte gelegenheit texte zu lesen; längst habe ich es mir zur pflicht gemacht auch da, wo es sich mir nur um einsicht in den morphologischen bau einer sprache handelt, wenigstens einiger maßen texte in derselben zu lesen, so weit eben die mittel dazu vorhanden sind. Die einsicht in das wesen einer sprache, so zu sagen, das gefül für eine sprache, wird dadurch wesentlich gefördert.

Gleich die erste frage nach der wurzelform des koptischen stößt auf erhebliche bedenken; so kann bei dem dermaligen stande der forschung die außnamslose einsilbigkeit der wurzeln des koptischen zwar vermutet, nicht aber überall durch zergliderung der stamformen auf gezeigt werden; eine umfaßende und sichere einsicht in die bildung der wortstämme ist meines wißens noch nicht gewonnen. Klar zu tage ligt jedoch der auß gedente gebrauch, den die koptische sprache von volständiger und teilweiser reduplication macht.

Eine zweite die wurzelform betreffende frage ist folgende: Sind die wurzeln des koptischen flectierend oder nicht, sind sie mit *A* oder mit A^a morphologisch zu bezeichnen? Diser punkt ist von Schwartze mit großer außfürlichkeit behandelt und nach der darstellung dises forschers sind die häufigen vocalveränderungen koptischer wurzeln und stämme nur phonetischer art, vocalschwächungen, wie z. b. ϣⲱϩ (wo nichts bemerkt ist, sind die worte in der form memphitischen dialectes an gefürt), ϩⲟⲩⲣ, ϩⲁϩ, ϩⲉⲩⲣ, sämtlich one unterschid «schaben»; ϫⲱ, ϫⲁ, ϫⲉ, sagen, u. a. Diß tritt auch deutlich in den häufigen reduplicationen hervor, z. b. ϣⲉⲣϣⲱⲣ neben ϣⲟⲣϣⲉⲣ «zerstören» u. s. f. Dise veränderungen des wurzelvocals dienen entschiden nicht zum zwecke des beziehungsauß-druckes, so daß es scheint, daß da, wo für bestimte beziehungen bestimte lautabstufungen des wurzelvocals sich fest gesezt haben, eine ununsprüngliche benutzung an sich nur phonetischer vocalveränderungen zu sehen ist. So ist ⲏ als wurzelvocal vorherschend mit passiver beziehung verbunden, z. b. ϥⲉϣ frangere, ϥⲏϣ frangi; ϫⲱ ponere, ϫⲏ poni, u. s. f. Darneben sehen wir aber one irgend welche beziehungsänderung sowol ⲓⲙⲉ als ⲓⲱⲥ festinare, festinatio bedeuten und eben so ϣϥⲏⲣ und ϣϥⲉⲣ socius. Dasselbe gilt von den phonetischen wechseln, wo sie sich an genus und numerus knüpfen. Änliche lautveränderungen treten auch im gebiete des consonantismus häufig auf. Das koptische ligt uns als auß gestorbene schriftsprache auß einer späten epoche des sprachlebens vor; verschidene zeiten und verschidene mundarten mögen (wie diß bei schriftsprachen zu geschehen pflegt) spuren in die sprache ab gesezt haben, die nun neben einander erscheinen und auf dise art ist villeicht ein teil jener lautwechsel zu erklären. Im koptischen, als einer jüngeren sprachform, ist auch an jene veränderungen, wie sie sprachen im laufe der zeit zu erfaren pflegen, an geltend machung der analogie u. dergl. zu denken. Genug, es ist ein nur schwer zur durchsichtigkeit zu präparierendes object, über das wir vor der

hand mer nur vermutungen auf stellen, als mit bestimtheit und entschidenheit urteilen können. Eine flexion, eine regelmäßige veränderung der wurzel zum zwecke des beziehungsaußdruckes, finden wir demnach im koptischen unseres bedünkens nicht, und wir bezeichnen seine wurzeln also mit *A*, *B* u. s. f. (nicht mit A^a, B^a), die reduplicierte wurzel mit *AA*, die zusammen gesezte (z. b. ⲉⲣⲥⲟϫ [1]) esse stultum auß ⲉⲣ esse, habere und ⲥⲟϫ stultus, stultum fieri) mit *AB*.

Die erkentnis der morphologischen verhältnisse des koptischen wortes wird teilweise vereitelt durch die unsicherheit in der abgrenzung der worte. So schreibt Uhlemann vieles in ein wort, was Schwartze (der mir hier allerdings bisweilen zu weit zu gehen scheint) in merere worte trent. Eine übereinstimmung in disem für morphologische untersuchungen maßgebenden punkte scheint unter den forschern auf disem gebiete nicht ob zu walten [2]). Nur die einsicht in den bau der sprache kann hier entscheiden, da uns die beobachtung an der lebenden sprache ab geht, und die handschriften, wie es scheint, bedeutend von einander ab weichen. Indessen ist die entscheidung oft ser schwer, auch wenn wir uns durch die überliferte schreibung in keiner weise für gebunden erachten. Ein beispil möge diß zeigen. Ein praeteritum wird gebildet durch vorsetzen von ⲁ vor den verbalstamm. Dises ⲁ erscheint als eine wurzel, esse bedeutend; villeicht ist es ein ursprüngliches demonstrativum, wie ja auch die andern demonstrativa ⲛⲉ sg. masc., ⲧⲉ sg. fem., ⲛⲉ pl. comm. im koptischen, wie in so manchen sprachen, die function des verbi substantivi übernemen. An dises ⲁ treten die pronomina personalia, um die subjecte des verbi zu bezeichnen, wärend das die bedeutung tragende verbum von der conjugation unberürt bleibt. Die wurzel ⲙⲉϥⲧ migrare (villeicht ist sie zusammen gesezt oder ab geleitet, nemen wir sie indes einstweilen als einfache wurzel) z. b. bildet in diesem praet. die 3. sg. msc. ⲁϥ-ⲙⲉϥⲧ migravit, worin wir also, ganz änlich wie im südafrikanischen die formel $Aa \dashv A$ (IV, b) erkennen; im koptischen werden die beiden teile aber stets zusammen geschriben, auch stelt sich hier das hilfsverbum (nicht, wie im südafrikanischen, das pronomen) als hauptelement des beziehungsaußdruckes dar; ⲁϥ gibt sich schon durch die form des auf einen consonanten beschränkten pron. 3. sg. msc. ϥ als ein wort zu erkennen. Allein gerade für diß pronomen kann das nomen selbst ein treten; so heißt es Gen. XII, 6 in der Uhlemanns grammatik bei gegebenen chrestomathie ⲁⲁⲃⲣⲁⲙ ⲙⲉϥⲧ Abram migravit. Uhlemann schreibt hier das praeteritumbildende ⲁ mit dem nomen zusammen (nach analogie von ⲁϥ) und die verbalwurzel als besonderes wort; Schwartze (§ 148) schreibt in disem falle alle teile als einzelne worte, z. b. (Sahidisch) ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϯ ⲛⲁϩ, es hat gott gegeben (ϯ dare) inen; dieselbe stelle lautet memphitisch ⲁ ⲫϯ ⲁϥϯ ⲛⲱⲟϩ, wo ⲁ widerholt ist; einmal steht es vor dem nomen ⲫϯ, gott, welches das subject des satzes ist, und sodann in dem verbum ⲁϥϯ, welches hier auch das im Sahid. durch

1) Vgl. weiter unten über die verbindung von ⲉⲣ mit andern wurzeln.

2) Uhlemann l. l. vorrede pg. VI.: «dum alii nimis laborant in jungendis singularum vocum partibus, alii easdem praeter consuetudinem dissolvunt et separatim scribunt.»

das nomen verdrängte pronomen ϥ enthält. Wo haben wir nun hier die grenzen des wortes zu setzen? Ich wage nicht zu entscheiden; mir machen aber dise formen den eindruck, als stehe das koptische auf einer morphologischen stufe, die von der isolierung noch nicht alzuweit entfernt ist; auß disem grunde scheint mir Schwartzes schreibung annembarer.

Wärend uns hier die abschließung der zusammen ein wort constituierenden elemente zu einem lautlich compacten ganzen noch nicht volzogen scheint, finden wir auf der andern seite manche wortbildende elemente fest mit der wurzel verschmolzen und nie von ir getrent geschriben. So vor allem die ans ende der wurzel tretenden bildungen (vgl. Schwartze § 98 flg., Uhlemann § 8) wie Sahid. ϱⲟ-ⲧⲉ neben Memphit. Sahid. ϱⲟ vultus; ϥϣⲓ-ⲓ dimidium von ϥⲱϣ dividere; ϱⲱϣⲓ-ⲓ mensura von ϱⲱϣ metiri; ⲧⲱⲙ-ⲥ sepelire, doch wol von ⲧⲱⲙ claudere u. s. f., ferner die pluralbildungen durch äußere zusätze, wie ϥⲉ coelum, pl. ϥⲛ-ⲟⲩⲓ u. a. Für dise bildungen können wir also mit sicherheit die formel *Aa* an setzen; für solche substantiva mit vor geseztem artikel, so wie für dergleichen verba mit dem im praesens vor tretenden personalpronomen (z. b. für ϯ-ⲧⲱⲙ-ⲥ) demnach die formel *αAa* (II, 4).

Eine fernere schwirigkeit ist die, daß man oft darüber im zweifel sein kann, ob zusammensetzung zweier bedeutungslaute oder anfügung eines beziehungslautes an einen bedeutungslaut vor lige. Diser zweifel tritt namentlich da ein, wo die beiden elemente in unverkürzter wurzelform erscheinen; ist ⲛⲉ-ϫⲉ, dixit, *AB* oder *aB?* d. h. sind beide wurzeln des wortes gleich selbständige elemente oder dient ⲛⲉ (demonstr., dann esse) nur zur bestimmung der beziehung des folgenden ϫⲉ (dicere)? Eben so verhält es sich mit den zalreichen zusammensetzungen, deren erstes glid ⲉϥ (esse) ist, von denen wir pg. 21 ein beispil angefürt haben. Wie verhält es sich mit worten wie ⲙⲁⲓⲥⲱ caupona (Uhlemann § 11)? ⲙⲁ locus, ⲛ̀ relativum und zeichen des genitivs so wie andrer casus, ⲥⲱ bibere, potare (davon z. b. ⲡⲓⲥⲱ potus, potio). Haben wir hier drei worte vor uns (*A B C*) oder zwei (*A αB*) oder eines der form *abA* oder eine zusammensetzung der form *AaB?* Das vernemen der lebendigen außprache, vor allem die betonung würde hier wol entscheidung bringen können; vor der hand kommen wir wol schwerlich zu der bestimmung einer auffaßung als der allein richtigen.

Ab gesehen von disen vilfachen zweifeln läßt sich über die morphologische beschaffenheit der koptischen sprache etwa folgendes sagen.

Die reine wurzel one zusätze erscheint als imperativ (sing. und plur.), als infinitiv und als 3. person sg.; lezteres in den wenigen verben, welche die personalsuffixa ans ende nemen, z. b. ⲧⲱⲙ (neben ⲁ-ⲧⲱⲙ, ⲙⲁ-ⲧⲱⲙ) claude, claudite; ⲛⲉ-ϫⲉ msc., fem. dixit; ⲉϥⲉ msc., fem. facit (beide neben msc. ⲛⲉ-ϫⲁ-ϥ, ⲉϥⲉ-ϥ, fem. ⲛⲉ-ϫⲁ-ⲥ, ⲉϥⲉ-ⲥ; Schwartze pg. 422, § 140). Das nomen besteht häufig auß der bloßen wurzel, hat aber den artikel als unterscheidungszeichen. Die form *A* (*AA*, *AB*, I, 1) kommt also in der sprache als die wirklicher worte vor.

Wortbildungszusätze treten teils ans ende der wurzeln s. o., teils vor dieselben, z. b. ϣⲟⲧ und ⲉⲛϣⲟⲧ durus; ⲧⲱⲙ und ϣⲧⲁⲙ claudere (Uhlem. § 8); ⲛⲁ misericordia, ⲁⲧ-ⲛⲁ immisericors; ⲙⲟⲩ mors, mori, ⲁⲧ-ⲙⲟⲩ immortalis, immortalitas; ϫⲓⲛ- bildet das nomen verbale, also mit artikel z. b. ⲡ-ϫⲓⲛ-ⲧⲱⲙ. Wir haben hier also die formeln *Aa* und *aA;* mit dem artikel demnach *αAa* und *αaA* (cl. II.).

Die artikel, unbestimter (das verkürzte zalwort I.) und bestimter, lezterer im singular das genus unterscheidend (hauptelemente fürs masc. sg. *p*, fürs fem. sg. *t*, für den plural beider *n*) stehen stets vor dem nomen.

Decliniert wird durch präpositionen, namentlich mittels des relativen ⲛ̇, ⲙ̇, ⲉ̇, das Schwartze getrent, Uhlemann aber mit dem nomen zusammen schreibt.

Als possessiva treten die pronomina vor das nomen, nur in gewissen fällen ans ende desselben; also auch hier, wie in der wortbildung, stehen die zwei grundformen *aA* und *Aa* neben einander (*A* stelt uns hier jedes nomen dar) z. b. ⲧⲉ-ⲕ-ϫⲟⲙ (die-dir-kraft), ϫⲟⲙ kraft, mit artikel ϯϫⲟⲙ = *αA;* ⲧⲉⲕϫⲟⲙ also = *Ά*α + *A* (IV, b). Selten treten sie ans ende; so bei den substantiven, welche man, ires gebrauches wegen, pronominalsubstantiva nent; dise haben aber auch dann, wenn ire bedeutung, die sie als nomina haben, klar hervortritt, die pronomina suffixa am ende und zwar one artikel, z. b. ⲣⲱ-ϥ sein mund, ⲧⲟⲧ-ⲕ deine hand; dasselbe tun einige worte die als adjectiva gelten, z. b. ⲧⲏⲣ-ⲕ omnis tu, ⲧⲏⲣ-ϥ omnis ille u. s. f. Formel *Aα* (II, 2).

Eben so verhält es sich mit dem pronomen am verbum als auſsdruck der handelnden person, des subjectes verbi. Nur auſsnamsweise steht das pronomen am ende, z. b. ⲁ-ⲕ es, ⲁ-ϥ est und die oben an gefürten wie ⲡⲉϫⲁ-ϥ dixit, ⲑⲣⲉ-ϥ facit; demnach *Aα* (*ABα*). Ans ende des verbum treten ferner die pronomina als accusative (verbum mit suffixen), z. B. ⲉ-ⲕ-ⲉ̇-ⲙⲁϩ-ⲧ saturabis me = *aαÁ* + *Aβ*. In der regel stehen die personalpronomina als nominative vor dem verbum: ϯ-ⲧⲱⲙ claudo, ϥ-ⲧⲱⲙ claudit; *αA* (*αAA*, *αAB*).

Samt den personalbezeichnungen treten alle tempus- und moduselemente, mit auſsname weniger, vor den verbalstamm, z. b. ⲉ-ⲓ-ⲧⲱⲙ claudo; ⲉ, nach Schwartze, schwächung von ⲁ esse, ⲓ ist rest von ϯ ego, also *Ά*α + *A;* emphatisch ϣ-ⲁ-ⲓ-ⲧⲱⲙ, also wol *aÁα* + *A;* futurum 1. p. sg. ⲉ-ⲓ-ⲛⲁ-ⲧⲱⲙ (ich werde schlieſsen), ⲉ und ⲓ wie im praesens, ⲛⲁ wird für eine wurzel, ire bedeutend, gehalten, so daſs also ⲉⲓⲛⲁ das praesens derselben ist, also *aαÁ* + *A;* 2. prs. msc. ⲉ-ⲕ-ⲛⲁ-ⲧⲱⲙ u. s. f.; wie im praesens kann für ⲉⲓⲛⲁ u. s. f. auch ϯ-ⲛⲁ stehen, also ϯ-ⲛⲁ-ⲧⲱⲙ ich werde schlieſsen (wörtl. ich gehe schlieſsen), ⲕ-ⲛⲁ-ⲧⲱⲙ du wirst schlieſsen u. s. f. (*αÁ* + *A*); das futurum lautet auch ⲉ-ⲓ-ⲉ-ⲧⲱⲙ, 2. sg. ⲉ-ⲕ-ⲉ-ⲧⲱⲙ, ebenfals wol *aαÁ* + *A*. Sämtlich also cl. IV, b.

Ein nach geseztes ⲡⲉ (demonstrat., auch esse) bezeichnet das praeteritum, z. b. imperf. ⲛⲉⲓⲧⲱⲙ ⲡⲉ oder ⲛⲁⲓⲧⲱⲙ ⲡⲉ, also wol *aÁα* + *A* + *B*. Solche formen mit nach gesezten beziehungselementen, die man getrent zu schreiben pflegt, ergeben sich besonders beim negativen verbum, z. b. ⲛ̇ϯⲧⲱⲙ ⲁⲛ 1. sg. praes., also wol *Ά*α + *A* + *B;* imperf. ⲛⲁⲓⲧⲱⲙ ⲁⲛ ⲡⲉ = *aÁα* + *A* + *B* + *C*.

In änlicher weise verbinden sich conjunctionen mit dem verbum; das vor gesezte relative ⲏⲧⲉ, ⲏ bildet z. b. den conjunctiv (ⲏ ϯⲧⲱⲙ ut claudam Ἰα-ϯ-Λ) u. s. f. Hier drängt sich aber besonders stark der zweifel an der einheit des wortes auf, da die vor tretende conjunction ursprünglich schwerlich so nahe zum verbum gehört, als sie nunmer zu gehören scheint. Dem imperativ tritt auch ⲙⲁ und ⲁ vor; ersteres schreibt Schwartze wol mit recht als besonderes wort.

Als besonders characteristisch läßt sich etwa das beim koptischen bezeichnen, daß es zwar im ganzen mit vorliebe die beziehungselemente vor die wurzel treten läßt, wodurch beim verbum die auch den südafrikanischen sprachen eigenen formen von IV, b entstehen; daß es in manchen fällen aber dieselben elemente bald vor, bald hinter die wurzel stelt; lezteres pflegt man (in bezug auf die personalpronomina) als reste der älteren sprache zu betrachten. Und allerdings ist es wol denkbar, daß dise höchst auffallende erscheinung, wie so manches andre, merkmal einer schriftsprache ist, in der verschidener stufen eigentümlichkeiten ab gelagert sind, und daß das koptische als gesprochene umgangssprache villeicht ein einheitlicheres, leichter faßbares morphologisches bild gewärt haben würde. Das altägyptische in den kreiß diser untersuchungen zu ziehen habe ich nicht gewagt.

In den südafrikanischen sprachen fanden wir die nomina durch vor gesezte pronominale elemente in classen zerfallend, die wir uns als eine speciellere und mer ins einzelne gehende unterscheidung der art zu denken haben, wie sie in den meisten sprachen das genus bewirkt. Disen vilen classen entsprechend ist das pronomen der dritten person in disen sprachen vilförmig, jede classe hat ir eigenes pronomen und so kann nicht nur das adjectivum durch vorsetzung des classenzeichens, sondern auch das verbum durch vorsetzung des entsprechenden pronomens mit dem substantivum in einklang gesezt werden, z. b. *izin-tombi zi ya hamba*, the daughters do walk, aber *aba-fazi ba ya hamba*, the women do walk. u. s. f. (*zi ya hamba* und *ba ya hamba* heißen beide «sie gehen», *ya* ist hilfsverbum, *hamba* können wir uns etwa als participium praesentis activi denken; der unterschid ligt nur in *zi* und *ba*, von denen das erstere dem nominalpräfix *izin-*, das andre dem *aba* entspricht). Eine an dise erscheinung erinnernde bezeichnung der classen des nomens im anlaute mit änlichen wirkungen besizt die Thusch-sprache[1]) (unsrer kentnis erschloßen durch Schiefner, Versuch über die Thusch-sprache. St. Petersburg 1856), nur sind hier, so zu sagen, nicht so zahlreiche genera des nomens unterschiden, als im südafrikanischen. Man ist gewont nur masculinum, femininum und neutrum als genusunterschide zu betrachten. Allein, wie vile sprachen gar kein genus unterscheiden, vile nur masculinum und femininum kennen, so empfinden, auf der anderen seite, andere sprachen zalreichere genusunterschide, als jene drei, uns vom indogermanischen her geläufigen. So wird nicht selten das belebte masculinum als besonderes genus vom unbelebten masculinum geschiden, änlich

1) Leider steht mir, was die sprachen des Kaukasus betrift, nur noch Rosens arbeit über das Lazische zu gebote. Besonders vermisse ich hilfsmittel fürs Georgische. Ich kann also auf diß interessante sprachgebiet nicht näher ein gehen.

auch das femininum in zwei abteilungen zerlegt; manche, scheint es, sondern pflanzen und dergleichen classen von wesen als besondere genera. Ganz änlich verhält es sich ja mit andern kategorien, z. b. mit den personalpronominibus, wo manche sprachen vil genauer spalten, als wir diß gewont sind und daher vil mer personen unterscheiden als wir.

Das Thusch ligt uns nun offenbar in zimlich neuer form vor; die sprache hat bereits lautliche und grammatische veränderungen durch gemacht, wie diß Schiefner, gewis volkommen richtig, erkant hat. Der consonantenreichtum derselben scheint großen teils durch verlust von vocalen entstanden zu sein; mit dem schwinden von vocalen pflegt aber die einwirkung derselben auf die vocale der vorher gehenden silbe ein zu treten (ich erinnere ans deutsche und celtische); eben deshalb bin ich geneigt alle veränderungen, denen die wurzel im Thusch unterligt, auf rechnung ab gefallener oder versezter laute oder sonstiger phonetischer processe zu setzen, nicht aber eine echte, von der umgebung unabhängige nur dem beziehungsaußdrucke dienende flexion hier zu statuieren. Ich setze daher die wurzel des Thusch als *A* an.

Da nun das Thusch uns in einer neueren gestalt vor ligt, demnach für uns schwer durchsichtig ist, weil an ein zurück übersetzen in die urformen, wie wir es wol beim indogermanischen zu tun vermögen, hier noch nicht gedacht werden kann, so kann auch das folgende nur als ein vorläufiger versuch betrachtet werden, der sich damit begnügt, nur die algemeinsten umriße diser sprachform vor zu füren.

Die elemente des Thusch, welche die nominalclassen bilden und welche am adjectiv, verbum und, wiewol seltner, am substantiv erscheinen, bilden, wie z. b. im Zulu, zugleich das verbum substantivum, indem inen ein *a* angesezt wird. Es sind folgende:

Singular: *w* masc., *j* fem. *b* (meist tiere und pflanzen) *d* geschlechtslos, abstracta
Plural: *b*, *d* belebt, *j* unbelebt *d* belebt, *b* und *j* unbelebt *d*.

So heißt z. b. *waçi* schwer, vom manne, *jaçi* schwer, vom weibe; *waçol* schwere eines mannes, *baçol* schwere einer menge, *jaçol* schwere eines weibes u. s. f.; *waxila* leben eines mannes, *baxila* leben einer menge (-ila ist hier wortbildendes suffix). Dise worte können wir also der form *αAa* (II, 4) zu teilen. Verba, die sich aufs nomen beziehen, können in vilen fällen dise classenunterschide auf gleiche weise bezeichnen, wodurch scheinbar ire wurzelform wechselt z. b. absolute wurzel aq teilen, relativ aber, je nachdem sich das verbum auf dises oder jenes nomen bezieht, *d*-aq, *w*-aq, *j*-aq, *b*-aq vgl. das verbum substantivum *d*-a, *w*-a, *j*-a, *b*-a [1]), z. b. waso *wa* der bruder ist, aber plural: *waẓar ba* die brüder sind. Villeicht war der gebrauch diser classenzeichen in einer älteren sprachperiode ein auß gedenterer; eine vermutung, auf welche die natur der sache und das beispil des südafrikanischen leitet. Das *b*, die beziehung auf die menge bezeichnend, wird, oft mit veränderung des wurzelvocals, bisweilen auch des wurzelaußlautes, auch in den verbalstamm oder vilmer in die

1) Vielleicht ist *a* hier nicht zusatz, sondern vollere form des pronomens; denn daß wir hier ein pronomen, kein verbum, vor uns haben ist wol klar.

wurzel hinein gesezt, z. b. √las fällen, praes. *iebs*-o; √tox schlagen, praes. *tebxo*; √ḥeç sehen, praes. ḥeiçu für *ḥeçiu aber praes. pluralit. ḥeiẘu für *ḥeẘs-iu. Dise verba nent Schiefner pluralitätsverba; die an gefürten beispile haben also die form *Ab* (II, 6). Man vergleiche hiermit die praefigierung und infigierung des elementes der ersten person im Lazischen, z. b. √dis lachen, b-dis-are ich lache, aber √bris ab reißen, praes. do- (praefix) bri-b-s-are ich reiße ab, mit eingeseztem *b*; √konz praes. komzare wol für kobnzare ich öfne; auch hier scheint für die wurzelsilbe die nicht gerade häufige form *Ab* vor zu ligen (Rosen über die sprache der Lazen; Abhandl. der Königl. Preuß. Akad. der Wißenschaften 1843).

Außer disen classenzeichen finden sich im Thusch keine bezichungselemente vor oder in der wurzel; sie treten, mit diser außname, alle ans ende der wurzel (denn fälle wie waug u. dergl. sind offenbar auf bekantem wege auß *wagu entstanden). Die wurzel ist nicht selten zusammen gesezt.

Das pluralzeichen tritt also ans ende des nominalstammes, an dasselbe fügen sich die elemente, welche die zalreichen casus bilden (wie etwa im finnischen), z. b. tot hand, pl. toti, illativus tot-i-lo. Zu bemerken ist, daß der nominativus singularis nicht selten von der vor den übrigen casussuffixen erscheinenden grundform des stammes abweicht, z. b. nom. sg. mox wind, stamm max; nom. sg. niq weg, st. naq, worin wir wol verkürzung, schwächung des durch kein casussuffix geschüzten stammes zu sehen haben; deutliche schwächung verraten formen wie nom. sg. we wein, stamm wen; ɣer stein, stamm ɣera u. a.

In der conjugation erscheint der reine verbalstamm nur in der 2. imperativ., wie in so vilen sprachen. Tempus und moduselemente treten ans ende, z. b. *dag*, *wag* (s. o.) sich an schließen; praes. waug für *wagu, imperfectum wagur; perfectum dagi, aorist dagir, also *aAa*, *aAab*; ɣeǩ rufen, praes. ɣeiǩ = *ɣeǩ-i, imperfectum ɣeǩ-i-r, perf. ɣeǩi u. s. f. also auch hier, wie beim nomen, *Aa*, *Aab*. Nur das pronomen der ersten und zweiten person kann zum behuf der personalbezeichnung ans ende des verbalstammes an treten, z. b. wa-s (s für so) ich (mann) bin; wa-ḫ (ḫ für ḫo) du (mann) bist; imperf. wa-r-aso, nach consonanten, hier r, tritt, so scheint es, eine ältere form des pronomens mit anlautendem a ein, welches a außerdem nur im instructiv as, aḫ erhalten ist; lew-dor-as ich sagte, wo as als instructiv gilt; es kann aber eben so gut verkürzter nominativ (grundform *aso) sein; das verbum ist zusammen gesezt auß √lew sagen und do tun; das ganze wort hat also die form *ABaoα* da in dem o das praesenszeichen enthalten ist.

Der einverleibend oder polysynthetisch genante sprachbau, d. h. die bezeichnung des näheren und ferneren objects, oder beider, auch der an geredeten person, außer dem subjecte am verbum, ist bekantlich keine außschließliche eigentümlichkeit der amerikanischen aboriginersprachen oder des baskischen. Er findet sich im gebiete anderer sprachen nicht alzu selten, z. b. im magyarischen und im verwanten sprachen, im indogermanischen, wo φέρομαι doch nur = bharamami d. h. ich trage mich, sein kann. Für den sazbau und somit für den ganzen charakter der sprache ist dise bildungsweise von entscheidendem einfluße; wo sie durchgreifend entwickelt ist, vernichtet sie den satz, indem sie in als apposition

zum verbum, das in allein schon enthält, erscheinen läßt; die morphologische bezeichnung diser beziehungshäufungen am verbum kann keine schwirigkeit machen; will man die abhängigen pronominalelemente (die so genanten transitionen) besonders bezeichnen, so kann man etwa $\alpha'\beta$ etc. dafür wälen, z. b. magy. várlak ich dich warte (ich warte auf dich) = $Aa\alpha$ (also im wesen von der grundform diser sprache Aa... nicht verschiden).

Obgleich mir für merere sprachen des nördlichen Amerikas hilfsmittel zu gebote stehen (so v. d. Gabelentz Dakota-grammatik, Lpz. 1852; Howse a grammar of the Cree language etc. London 1844. Zeisberger, grammar of the language of the Lenni Lenape or Delaware Indians, transl. by Du Ponceau, Philadelphia 1827. Du Ponceau, Mémoire sur le système grammatical de quelques nations Indiennes de l'Amerique du Nord, Paris 1838 u. a.), so hat es mir doch noch nicht gelingen wollen mir mittels derselben eine so genaue einsicht in den bau diser sprachen zu erwerben, um wurzel und stambildungselemente auß einander halten zu können, ja es ist mir noch nicht überall geglükt die an tretenden pronominalen zusätze in ire einzelnen elemente zu zerlegen. Für jezt kann ich demnach die formeln für keine diser amerikanischen sprachen entwickeln.

Fürs baskische felen mir zur zeit alle hilfsmittel, selbst Humboldts abhandlung im IV. bande des Mithridates geht mir ab, so daß ich nur auf frühere excerpte auß disem werke und auf Mahns denkmäler der baskischen sprache, Berlin 1857 beschränkt bin; leztere scheinen in dem, was über die grammatik des baskischen bei gebracht wird, ebenfals wesentlich auf Humboldt zu beruhen.

Die wortbildenden elemente und die die casus auß drückenden postpositionen scheinen nur ans ende der wurzeln und wortstämme an zu treten, so daß wir also die form Aa... (bei casusformen also $Aa\alpha$ u. dergl.) erhalten.

Der artikel tritt hinten an das nomen und trägt dann die casuselemente, wodurch wol die form IV, b (z. b. Aa-+-$\acute{A}\alpha$ u. dergl.) entsteht.

Die conjugationselemente treten vor und nach dem verbalstamme auf, z. b. d-aqui-c du weist es, o mann (d 3. pers. sg. acc., aqui wißen, c an geredete person); d-aqui-t ich weiß es u. s. f. was also, aqui einstweilen mit A bezeichnet, die formel $\alpha A\beta$ (II, 4) geben würde.

Auch in der conjugation ist vilfach, so bei allen so genanten regelmäßigen verben, zusammensetzung der wurzel mit einem hilfsverbum gebräuchlich, z. b. il j-o-z-a-c er hat sie getötet, o mann; il wurzel, töten; j kennbuchstabe der familiären zweiten person zur bezeichnung der persona vocativa; o wurzel des hilfsverbum, z persona accusativa, sie, a bindevocal, c characterisiert die angeredete person als mann; demnach haben wir die form A-+-$\alpha\acute{A}\beta\gamma$ also ebenfals eine der vilen formen der classe IV, b. Dise wenigen bemerkungen sollen nur dar tun, wie die auf den ersten blick so seltsamen formeln der classe IV, b keinesweges zu den seltensten formen der sprache gehören. Wir fanden sie bereits in reicher entfaltung bei zalreichen sprachen Afrikas; im baskischen beherschen sie beide redeteile, nomen und verbum, lezteres fast außschließlich. Ehe mich die von mir für die einfacheren sprachformen zuerst entworfenen formeln vermittels der combi-

nation auf die classe IV, a, IV, b gefürt hatten, wuste ich nicht wo hinauß mit disen sprachgebilden, die nirgend hin passen wolten; so wie ich die formel gefunden hatte, ward mir auch der bau diser sprachen klarer. Ich hatte hier gelegenheit mich vom practischen werte der algemeinen außdrücke, der formeln, nachdrüklich zu überzeugen. «Die formeln arbeiten für einen» bemerkte mir ein mathematiker; er hat recht.

III. classe.

Eine sprache der durchauß fest gehaltenen form *A* vermochten wir (s. o. pg. 8) nicht auf zu finden; es ist noch vil unwarscheinlicher, daß sich die form A^a als außschließlich fest gehaltene finde. Selbst sprachen der classe III, a dürften schwerlich zu entdecken sein. Der grund diser vermutung ligt darin, daß die regelmäßige veränderung der wurzel selbst zum zwecke des beziehungsaußdruckes großen teils bedingt scheint durch an tretende beziehungslaute; mit andern worten, daß wir die flexion, als das höchste, was die lautform der sprache erreichen kann — denn sie ist der volkommenste außdruck des denkprocesses — nicht bei der urerzeugung der sprache vorauß zu setzen haben, sondern daß sie als etwas in vorhistorischer zeit erst almählich entwickeltes zu betrachten ist. Es ist aber nicht warscheinlich, daß die sprachbildung den sprung von *A* zu A^a gemacht habe, one die näher ligenden beziehungsaußdrücke *Á* und *a* vorher zu finden. Der weg, den die sprachentwickelung ein schlug, scheint uns etwa folgender zu sein: *A*, *A* + *Á*, *Aa* (? *Á*), A^a; eine vermutung, die durch manche erscheinungen der sprachengeschichte begünstigt wird. Nicht zu übersehen ist jedoch das pg. 11 bemerkte, ich meine die neigung chinesischer wurzeln nach III. hin, die entschiden unabhängig von irgend welchen äußeren zusätzen auf tritt. Daß sprachen der classe III, a denkbar seien, wird übrigens niemand in abrede stellen.

Vereinzelt komt die form III, a, 1 wirklich vor, nämlich im semitischen, wo A^a eine der beliebtesten formen des verbalstammes ist, der, in der 3. sg. msc. aller äußeren personalbezeichnung entratend, A^a als wortform bietet; ser selten ist sie dagegen im indogermanischen.

Betrachten wir uns den morphologischen bau des semitischen genauer [1]).

Die semitische grundsprache hat schon vor irer trennung in die einzelnen sprachen als regelrechte form der wurzel die dreilautigkeit entwickelt; dise eigentümlichkeit der wurzelform fält also in die vorhistorische zeit und gehört zum wesen des semitischen. Mit diser form der wurzel hängt zusammen, daß die in der sprache als wort oder teil des wortes erscheinende wurzel durchauß nicht einsilbig zu sein braucht, sondern one äußere zusätze, bloß durch innere bildung zwei- und dreisilbig sein kann. Chald. קְטַל; syr. ܩܛܶܠ, hebr. קָטַל und arabisch قَتَلَ, welches leztere doch warscheinlich die ursprünglichste laut-

1) Zu grunde lege ich das arabische und das hebräische. Mit dem semitischen habe ich mich früher vil beschäftigt, leider aber bis jetzt versäumt das Aethiopische zu studieren, das villeicht gerade morphologische besonderheiten bieten dürfte.

form bewart hat, nebst حَسُنَ, حَزِنَ — alle dise worte begreifen wir unter der formel A^a, A^b u. s. f. wozu wir auch die mit langen vocalen in der wurzel, wie z. b. قَاتَلَ, rechnen (dise formen als A^a zu setzen widerspricht, so bedünkt uns, dem wesen des semitischen volständig).

Eine fernere eigentümlichkeit des semitischen ist bekantlich auch die eigenschaft seiner wurzelform, daß der lautliche außdruck der bedeutung allein (die reine wurzel) in einer außsprechbaren weise nicht dar gestelt werden kann, da die bedeutung nur an den consonanten haftet. Die vocale, die eine wurzel zeigt, geben ir zugleich eine gewisse beziehung, die übrigens auch durch vor und nach und in die wurzel tretende elemente auß gedrükt wird.

Die form A^a ist, wie bereits bemerkt, aufs verbum beschränkt; vom standpunkte der meisten semitischen sprachen auß scheinen zwar ser vile nominalformen diser form ebenfals an zu gehören; allein alle nomina besaßen ursprünglich im semitischen eine endung, die im arabischen am volständigsten erhalten ist; nicht vom hebräischen מֶלֶךְ, syr. ܡܠܟ, sondern vom arabischen مَلِكٌ, gen. مَلِكٍ, acc. مَلِكًا ist hier auß zu gehen, denn casusendungen pflegen in den sprachen im laufe der zeit sich zu verlieren, nicht aber hervor zu sproßen. Der plural zeigt solche endung auch in den andern sprachen, z. b. מְלָכִים, eben so der dual, z. b. רַגְלַיִם; die einfachste form des nomens ist also $A^a a$. Derselben form sind verbalformen wie קָטַלְתְּ, فَعَلْتَ u. s. f.

Im gegensatze zum indogermanischen ist dem semitischen fürs verbum die form aA^a (III, b, 1), für nomen und verbum die form $aA^a b$ (III, b, 4) eigen, z. b. in den verbalformen أَفْعَلَ, نَفَاعَلَ, اِنْفَعَلَ, اِسْتَفْعَلَ u. a., נִקְטַל, הִקְטִיל, הָקְטַל, הִתְקַטֵּל; ferner يَفْعَلُ, تَفْعَلُ u. s. f. (deren außlaut freilich auch als endung gefaßt werden könte), hebr. יִקְטֹל, תִּקְטֹל u. s. f.; diese sind sämtlich $= aA^a$; formen der art mit endungen wie يَفْعَلُونَ u. s. f., يَفْعَلُو u. s. f., dann nominalformen wie مَفْعُولٌ u. s. f., تَفْعِيلٌ, اِفْعَالٌ, اِسْتِفْعَالٌ u. s. f. haben also die form $aA^a b$.

Die form des verbi اِفْتَعَلَ zeigt einen teil des präfixes in die wurzel hinein versezt, und ist demnach wol als bA^a (III, b, 5) zu faßen; bestätigt wird dise auffaßung durch formen wie يَفْتَعِلُونَ (verbum) und مُفْتَعِلٌ, اِفْتِعَالٌ (nomina), welche entschiden der formel $bA^a c$ (III, b, 7) folgen.

Verbum und nomen mit suffixen ist durch jüngere anschmelzung der pronomina entstanden; auf keinen fall fügen dise bildungen den bisher besprochenen formen etwas wesentlich neues bei; مَلِكُهُ gehört, wie das einfache مَلِكٌ, der form $A^a a$ an, obschon

es genauer durch $A^a a\alpha$ dar gestelt werden kann; eben so verhält es sich z. b. mit יִקְטְלוּהוּ d. i. $\alpha A^a \beta\gamma$ neben יִקְטְלוּ d. i. $\alpha A^a \beta$.

Für A^a tritt im semitischen häufig die reduplicierte wurzel $A^a A^a$ ein; in der regel ist jedoch die reduplication auf die widerholung eines teiles der wurzel, meist nur eines einzigen lautes derselben, ab geschwächt worden, z. b. قَتَّلَ, קִטֵּל, קֻטַּל, آقْتَلَّ, تَقَتَّلَ u. s. f. Formen wie רַעֲנַן und סַחֲרְחַר in deren ersterer ein laut doppelt gesezt ist, wärend die zweite die beiden lezten elemente der wurzel verdoppelt, deuten, so bedünkt mich, schlagend auf die einstige verdoppelung der ganzen wurzel hin; freilich mag volständige reduplication nur der urperiode der semitischen grundsprache zu zu sprechen sein, als die wurzelform wol noch eine einfachere, für die volständige widerholung geschiktere war. Fälle wie גִּלְגָּל haben sich, so scheint es, in diser urform erhalten.

Für die entstehung merlautiger wurzeln nimt man außer der reduplication auch die verschmelzung zweier wurzeln zu einer einzigen an (etwa durch AB^a dar zu stellen); doch meiden wir lieber diß schwirige gebiet.

Nicht nur durch die form der wurzeln, für die es einsilbigkeit und einen bestimten wurzelvocal fordert, weshalb nun die wurzel von allen beziehungslauten rein trenbar, außsprechbar und nur weniger, bestimter veränderungen fähig ist — wärend die form derselben auf der andern seite freier, nämlich nicht an eine bestimte anzal von lauten gebunden ist — nicht nur durch die form der wurzeln unterscheidet sich das indogermanische vom semitischen, sondern vor allem auch durch das fast völlige auf geben der wortform A^a und aA^a; d. h. das indogermanische hat in seinen, in der sprache lebendigen, als sazteile vor kommenden worten (nicht in den grammatisch abstrahierten wortstämmen) stets einen beziehungslaut am ende und niemals einen solchen vor der wurzel. Die fast außschließlich dem indogermanischen mögliche wortform ist demnach $A^a a$ ($A^a a\alpha$, $A^a \alpha$ u. s. f.); ser selten ist A^a; vereinzelt $A^a b$[1]). Im augment darf man nicht einen beziehungslaut gleicher art mit den ans ende tretenden sehen und etwa für die augmentierten formen die formel $aA^a b$ an setzen; das augment ist ein ursprünglich selbständiges wort (wol ein casus des pronominalstammes a, eine partikel, also «damals» bedeutend), das ans verbum mittels zusammenschmelzung tritt; die betonung weist deutlich darauf hin, so wie der umstand, daß es auch, unbeschadet der integrität des wortes, felen kann, was bei keinem echten beziehungslaute der fall ist.

In seltenen fällen hat das indogermanische die ursprüngliche verdoppelung der ganzen wurzel bei behalten (ὄδ-ωδ-α, μέρ-μερ-ος); meist hat es sie zur widerholung des wurzelanlautes ab geschwächt; niemals zu der des wurzelinlautes oder außlautes, wie das semi-

1) Auch hier haben wir ein schlagendes beispil dafür, daß die morphologischen formeln den unterschid im sprachbaue leicht auffindbar und anschaulich machen. Mir wenigstens trat der unterschid von semitisch und indogermanisch nie so scharf entgegen als jezt.

tische. Ferner erträgt es vil zalreichere beziehungslaute am ende der wurzel als dises und liebt auch die zusammensetzung ganzer fertiger worte, die dem semitischen völlig ab geht.

Die form *Ab*... (III, b, 6) kann man jedoch dem indogermanischen schwerlich ab sprechen; sie ist aber, wie im semitischen, selten und zwar ist sie auf das versetzen eines nasals vom wurzelaußlaute in den wurzelinlaut beschränkt. Das vorkommen diser form in den verschidnen töchtersprachen der indogermanischen grundsprache (*junáǵmi*, λαμβάνω, *jungo* lit. *bundù*, ʌʌгж, got. *thagkja*, *brigga*) legt ein starkes zeugnis für ir alter ab; dem urstande der grundsprache ist sie aber doch wol ab zu sprechen (*jug-na-mi* u. dergl. sind die urformen).

Im großen und ganzen scheidet sich das indogermanische von den sprachen der form *Aa* (tatarisch, finnisch etc.) nur durch die wurzelform A^a und durch das außschließen der auß der bloßen wurzel bestehenden wortformen. Die form A^a komt nur außnamsweise als vocativ solcher nomina vor, die außer der wurzel keine stambildungselemente, sondern nur casusendungen besitzen, wie z. b. nom. *váks* (die lautgesetze, als spätere erscheinungen, gehen uns hier nichts an), vocativ *vák* [1]). Alle echten casus solcher nomina haben die form $A^a\alpha$ (plural $A^a\alpha\beta$), eine form, die allerdings in der regel nur beim verbum gefunden wird, wärend das nomen des indogermanischen meist die form $A^a a\alpha$ (mit iren varianten) hat. Der vocativ solcher nomina one wortbildende elemente an der wurzel besteht nun auß der wurzel allein, da der vocativ streng genommen kein casus ist und keine endung hat. Der vocativ und die 2. sg. imperativi (die Böhtlingk in der jakutischen grammatik unter dem folgenden gesichtspunkte bereits zusammen gestelt hat) sind die teile der sprache, die am häufigsten den bloßen stamm, also, wo diser mit der wurzel zusammen fält, die bloße wurzel zeigen. Im indogermanischen hat zwar die 2. prs. sg. imperativi ir personalsuffix erst in späterer, historischer zeit völlig verloren; für vile sprachen der morphologischen classe II. ist aber ein solches suffix weder nachweisbar, noch sein einstiges vorhandensein warscheinlich. Vocativ und imperativ sind eigentlich keine sazteile, und werden auch nicht als sazteile empfunden; sie sind nur in irem materiellen teile, der bedeutung, dem stamme nach, worte, irer grammatischen form nach brauchen sie keine worte zu sein; es haftet inen etwas interjectionelles, den lautgebärden verwantes an und so nemen sie auch, wie dise, nicht teil an der form der sprache, der sie bloß das die bedeutung außdrückende entnemen. Sie bilden also außnamen im gebäude der sprachen und ire formen brauchen nicht im einklange mit den formen der übrigen worte zu stehen, da sie nicht, wie dise, glider eines gedankens dar stellen, sondern ein fülen, ein wollen unmittelbar auß drücken. Alle indogermanischen worte schließen mit einem durch α, β zu gebenden elemente, nur die hier besprochenen formen können auf *a* schließen, ja sogar auß der bloßen wurzel bestehen.

1) Es ist unrichtig, wenn man sagt, daß in fällen wie युध् धर्मविद् die wurzel als wort erscheine, oder, daß hier nomen und verbum in der form zusammen fallen. Denn युध्, विद् sind keine worte, keine teile des satzes, sondern wißenschaftliche abstractionen; als worte lauten sie entweder *judh-s*, *vid-s*, gen. *judh-as*, *vid-as* u. s. f. wenn sie nomina sind, oder *véd-mi*, *judhjaté* u. s. f. wenn sie verba sind. Nur so vil ist zu sagen: es sind wurzeln die zugleich als nominal- und verbalstämme dienen.

In den grammatischen zusammensetzungen des indogermanischen, z. b. futurum, aorist. compos., haben wir wol die form coordinierter zusammensetzung, nicht aber den zweiten teil als beziehungswurzel an zu nemen: *dásjati* geben wir also durch $A^a B^a a\alpha$, nicht durch $A^a ab\alpha$ [1]).

IV. classe.

Beispile der form IV, b brachten wir im bisherigen bereits vor, s. über das südafrikanische pg. 18 flg.; das koptische pg. 23; das baskische pg. 27.

Die classe IV, a findet sich in mereren formen und in häufiger anwendung neben formen der classe I. und der classe II. und, so scheint es wenigstens, neben anklängen an classe III. im tibetischen, einer sprache von höchst merkwürdiger morphologischer beschaffenheit.

Von diser sprache kenne ich leider nur so vil, als ich auß I. J. Schmidts grammatik der tibetischen sprache, St. Petersburg und Leipzig 1839 mir an eignen konte; ser vermist habe ich ein lexicon diser sprache [2]). Indessen glaube ich doch einen überblick über die formen diser sprache gewonnen zu haben.

Eine nicht leicht zu entscheidende frage ist hier die nach der form der tibetischen wurzel; nicht nach irer äußeren form, denn sie ist entschiden einsilbig, sondern darnach, ob der tibetischen sprache die wurzelform A^a oder A zu zu sprechen sei.

Die wurzel des tibetischen ist nämlich nicht unveränderlich, wie die des chinesischen u. s. f. sondern der vocal derselben ist in gewissen fällen wandelbar. In der reduplication wechselt nicht selten die wurzel den vocal; so bedeutet རྦོད oder རྦད་རྦོད «dick, plump» u. dergl.; diß könte jedoch leicht phonetische dissimilation oder abschwächung der einen wurzel neben der andern sein. Ferner, འགས bedeutet «sich spalten», intransit.; འགེས aber «spalten», transitiv; freilich fält diser vocalwechsel außer dem präsens wider hinweg, ist also nicht außschließlicher träger der transitiven resp. intransitiven beziehung (z. b. praet. གས intrans., བཀས [3]) trans. «gespalten»), wenigstens nicht in allen formen des verbi; འགག «aufenthalt haben» intransitiv; འགེགས «hindern» u. a. Das praesens hat überhaupt nicht selten einen im eigentümlichen wurzelvocal, z. b. wurzel བྱ «tun» (z. b. in བྱ་བ tat, བྱས getan), praes. བྱེད «er tut»; wurzel དག «binden», praes. འདོགས་. Eben so der imperativ,

1) Die anname der form IV, b verbietet sich durch die strenge einheit des indogermanischen wortes.

2) Schiefners tibetische Studien (aus dem Bulletin hist.-phil. T. VIII, № 14, 17, 19, 21, 22) wurden mir leider erst nach absendung des manuscripts bekant.

3) ཀ für ག wegen des vor gesezten བ. Assimilationen sind im tibetischen ser häufig, oft volständige, so bei manchen antretenden beziehungselementen, deren anlaut dem wurzelaußlaute gleich gemacht wird. Oft assimiliert, verändert, vereinfacht nur die jetzige außsprache; deutliche spuren zeigen, daß die schrift eine ältere sprachstufe dar stelt, deshalb halten wir uns hier nur an die schrift.

z. b. wurzel ཟ «eßen», aber ཟོ «iß» (prohibitiv aber མ་ཟ «iß nicht»); སེལ «er heilt», aber སོལ «heile» u. s. f., *e* und *a* werden also zu *o*. Häufig und regelmäßig ist aber solcher wechsel nicht. Eine eigentliche flexion ligt hier wol nicht vor, wie aber solcher wechsel zu erklären sei, auf dise frage muß ich, wie in betreff so viler punkte des tibetischen sprachbaues, bei denen um außkunft bitten, die, im besitze gründlicher kentnis diser sprache, durch den überblick über das gesamte gebiet derselben sie zu erteilen befähigt sind. Vor der hand will ich bei der aufstellung der formeln für die wortformen des tibetischen dise veränderungen des wurzelvocals noch unbezeichnet laßen; man könte sie villeicht passend einstweilen durch *A̲* an deuten (vgl. pg. 7).

Die wurzel erscheint sowol als verbum als als nomen, z. b. ཟ «er ißt»; ཁ «schnee»; ཉི «sonne»; ན «krank» u. s. f., eben so die reduplicierte und zusammen gesezte wurzel: ཀྱང «gerade», ཀྱང་ཀྱང «durchauß gerade»; རྟ་པོ oder པོ་རྟ «equus mas» oder «mas equus»; རྟ་མོ oder མོ་རྟ «equus femina» oder «femina equus» (equa); die formeln *A* (*A* + *A*, *A* + *B*) kommen also bei worten diser sprache nicht selten vor.

Außer disen formen der classe I. kent aber das tibetische in der wortbildung auch formen der classe II, und zwar ist die anfügung der beziehungslaute hier eine ser enge, indem nur ein consonant one vocal vor oder hinter die wurzel tritt. In disen an tretenden elementen kann man doch kaum etwas anderes sehen, als beziehungsaußdrücke; auch machen sie sich, trotz aller abschwächung der jetzigen außsprache, dennoch nicht selten phonetisch geltend, so daß also an eine bloß graphische bezeichnung (an eine art ideographischen elementes) wol nicht zu denken ist. Ursprünglich waren dise zusätze schwerlich sämtlich vocallos.

So lautet z. b. der praesensstamm der wurzel ཁྲི འཁྲིད, praeteritum བཀྲིས, das futurum བཀྲི, der imperativ ཁྲིད; oder wurzel དག, praesens འདོགས, praeteritum བདགས, futurum གདགས, imperativ ཐོགས, die veränderung des anlautes im imperativ weist wol entschiden auf ein auch hier einst vorhandenes praefix hin; འཁོར «er dreht sich», སྒོར «er dreht»; die einwirkung der praefixe und suffixe auf die beziehung ist anschaulich. Wir haben hier also die formeln *aA*, *Aa*, *aAb*.

Die personalpronomina haben eine durchauß freie stellung und sind in der dritten person durch das nomen ersezbar; wir faßen sie deshalb nicht als in näherer beziehung zum verbum stehend, sondern als selbständige worte.

Dagegen treten ans verbum bildungszusätze häufig an, z. b. im praesens ein element, deßen anlaut sich stets dem außlaute des verbalstammes assimiliert (eine nominalform bildend, wie ja überhaupt das tibetische verbum von nominalformen nicht scharf trenbar ist), z. b. བྱེད་ oder བྱེད་པ་ «er tut»; also form *Aa* + *Á* (IV, a, 9); dieselbe form zeigt བྱས་པ་ participium praeteriti, «er tat, er hat getan» eine offenbare nominalform, wie པ་, ein außerordentlich häufig nomina bildendes element, beweist. Solche anhänge hinter dem verbalstamme sind reichlich vorhanden, so daß wir die formeln *A* + *Á* (I, 3), *aA* + *Á* (IV, a, 8), *Aa* + *Á* (IV, a, 9), *aAb* + *Á* (IV, a, 11) fürs verbum erhalten. Für *Á* kann auch *Á* + *'B*... ein treten.

Dieselben formen hat das nomen, z. b. བྱས་ «die tat» (*A* + *Á*); བཅགས་པ་ «gebunden» (*aAb* + *Á*) u. s. f. Besonders häufig werden dise formen durch die so genanten artikel, welche oft beim nomen stehen und welche, teilweise wenigstens, eine bestimte beziehung, namentlich das genus, auß drücken, z. b. རྒའི་ «der jüngere bruder»; རྒའོ་ «die jüngere schwester»; (vgl. པོ་ «männlich», མོ་ «weiblich», so wie པ་ «vater», ཨ་ «mutter»); བྱེད་ (praesensstamm von བྱ་ «machen») པ་ (participialbildung) པོ་ «ein» oder «der macher»; བྱེད་པ་མོ་ «eine» oder «die macherin»; eben so tritt aus ende das deminutiva bildende ཀུད་ (klein, gering) oder ཆུ་; das abstracta bildende ཉིད་, z. b. ནག་ oder ནག་པ་ «schwarz», ནག་པ་ཉིད་ «schwärze» u. s. f.

Decliniert wird durch postpositionen z. b. dat. བྱེད་པ་པོ་ལ་ «dem macher», pl. བྱེད་པ་པོ་རྣམས་ (lezteres wort ist warscheinlich zusamt, und würde also zu einer noch nicht da gewesenen formel füren, ich vermag es aber nicht zu zerlegen, und so mag es denn vor der hand als einfach betrachtet werden), dat. plur. བྱེད་པ་པོ་རྣམས་ལ་, also *Aa*+*Á*+*'B*+*Ć*+*'D*; es finden sich nicht alzu selten noch mer an gehängte elemente, z. b. བློག་ཏུ་རུང་བ་རྣམས་ལ་ dat. plur. «den leserlichen».

Dise loser an tretenden elemente sind aufs ende der wurzel und der durch inniges anschmelzen von beziehungslauten gebildeten stämme (*aA*, *Aa*, *aAb*) beschränkt; in diser beziehung gleicht dise sprache den finnischen und tatarischen sprachen; eben so hat sie keine praepositionen sondern nur postpositionen; ja sogar das adjectivum steht in der

Classe					Zu pag. 35.
I.	1. *A*	2. *Á* + *A*	4. *Á* + *A* + *B́*	3. *A* + *Á*	Chinesisch.
I.	1. *A* nur als imperativ	2. *Á* + *A* (*Á* + *B* + *C* . . . + *A*)			Kassia.
I.			4. *Á* + *A* + *B́* nur bei substantiven	3. *A* + *Á* (*A* + *Á* + *B́* . . .)	Barmanisch.
I.	1. *A* (*A* + *A*; *A* + *B*) verbum, adjectiv			3. *A* + *Á* (*A* + *Á* + *B́*)	Namaqua.
II.				2. *Aa* (*Aabc* . . .) Ferner *A* in bestimten fällen; im nom. sg. der nomina, 2. sg. imp. und 3. sg. praes. der verba (classe I.)	Drawidisch, Mandschu, Mongolisch, Tatarisch-türkisch, Finnisch (Magyarisch u. s. f.).
II.			4. *aAb* nomen, verbum	6. *Ab* verbum 2. *Aa* (*Aab* . . .) häufigste form Ferner *A* im nom. sg. und im imperativ (cl. I.)	Thusch.
IV, a.				8. *aA* + *Á* (Für *Á* überall 9. *Aa* + *Á* auch *Á* + 11. *aAb* + *Á* *B́* + *C* . . .) Ferner *aA*, *Aa*, *aAb* außerdem cl. II. so wie *A* (*A* + *A*; *A* + *B*), *A* + *Á* außerdem cl. I.	Tibetisch.
IV, b.	*Áa* + *Ab* (selten *A*) *aÁ* + *Ab* (selten *A*) auch *Á* + *Aa* (cl. IV, a) und *Á* + *A* (cl. I.) } verbum				
	Das nomen hat die formen *aA*, *aAb* (*abAcd* u. änl.); *Aa* (*Aab*) komt nur im imperativ vor (cl. II.)				Südafrikanisch.
IV, b.	*Áa* + *A*. *aÁb* + *A*.		*aÁb* + *A* + *B́*		
	Áa + *Ab*. *aÁb* + *Ac*. *aÁ* + *A*. *abÁ* + *A*. *abÁ* + *Ac*				
	Ferner *A* (*AA*, *AB*) selten im verbum (cl. I.); ferner *aA* nomen, verbum. *Aa* nom., verb. *aAb* nom., verb. (cl. II)				Koptisch.
III, a.	1. A^a (A^a. A^b. A^c. . . .) (AA^a. AB^a) verbum				
III, b.		1. aA^a 5. bA^a verbum	4. aA^ab (aA^abc) 7. bA^ac selten nomen und verbum	2. A^aa (A^aab) nomen, verbum	Semitisch.
III, b.				2. A^aa (A^aab . . .) fast ausschließlich herschend 6. A^ab selten	
	A^a nach cl. III, a, 1. ist höchst selten im vocat. der nomina.				Indogermanisch.

regel nach dem substantiv und nimt die declinationszusätze an, z. b. མི་བཟང་པོ (mann-gut-er) «der gute mann» oder «ein guter mann», dat. sg. མི་བཟང་པོར (*A* + *A* + *'A* + *'B*).

Zum beschluße diser skizze laße ich eine tabellarische übersicht der morphologischen formen der genauer besprochenen sprachen folgen. Die classe IV. habe ich vor III. gestelt weil nur beispile mit *A* vor ligen; käme in diser classe A^a vor, so wäre diß nach III. zu setzen. Das südafricanische, tibetische und andere sprachen, die formen mererer classen in sich vereinigen, sind nach den zusammen geseztesten formen eingeordnet worden und die einfacheren formen disen bei gegeben. Die übrige anordnungsweise bedarf keiner erklärung.

Jena am 2. August 1858.

Excurs zu pag. 1.

Versuchen wir den begriff der morphologie, ire stellung in der sprachwißenschaft und ir verhältnis zu den ir zunächst stehenden zweigen diser disciplin genauer dar zu legen, als diß in der vor stehenden abhandlung geschehen ist.

An jedem worte der sprache, so wie es wirklich als element des satzes in ir erscheint, unterscheidet die wißenschaftliche betrachtung dreierlei, oder vilmer, es kann drei verschidenen wißenschaftlichen betrachtungsweisen unterzogen werden. Wir können nämlich ins auge faßen 1) das *lautmaterial*, auß dem es besteht, 2) seine *form*, 3) seine *function* und die function seiner einzelnen teile, wenn es nämlich dergleichen besizt. Mit den lauten als solchen hat die *lautlere* zu tun; mit der function, die *functionslere* (die lere von der bedeutung und von der beziehung oder die lere von der function der wurzeln und von der function der wortbildungselemente, soferne leztere vorhanden sind); die form des wortes ist das object der *morphologie*.

Den unterschid diser drei kategorien — laut, form, function — mögen ein par beispile anschaulich machen. Die chinesischen worte 無 *wu* (nicht) und 人 *žin* (mensch) z. b., oder welche worte diser sprache man wälen mag, sind irem lautmateriale nach völlig verschiden, verschiden auch irer function nach, in irer form aber stimmen sie zusammen, wie überhaupt alle chinesischen worte gleiche form haben; ὄπ-ς (= ὀψ), grundform *vâk-s*, und εἶ-μι, grundform *ai-mi*, verhalten sich eben so; kein laut des einen wortes ist einem des andern gleich, eins ist nomen, das andre verbum, die function irer wurzellaute (ire bedeutung) so wie die irer beziehungslaute (ire beziehung) ist verschiden, morphologisch aber sind sie sich völlig gleich. Das, worin sich dise beispilsweise an gefürten worte gleichen, ist die wortform, der gegenstand der morphologie.

Für die lere von der wortform wäle ich das wort «morphologie», nach dem vorgange der naturwißenschaften, weil «formenlere» für specielle morphologie verbunden mit functionslere der beziehungslaute bereits im gebrauche ist.

*

So leicht es fält die morphologie, die lere von der wortform, von der syntax, der lere vom satze, begriflich zu scheiden, so nahe berüren sich beide in den sprachen, in welchen die grenzen von wort und satz nicht scharf gezogen oder wenigstens nicht leicht auf zu finden sind.

Dise vier teile der grammatik: lautlere, morphologie, functionslere, syntax sind natürlich nur wißenschaftliche abstractionen; in der wirklichen sprache ist satz und wort, function und form und laut aufs engste verschmolzen, keines ist one das andre vorhanden.

Sowol die sprache im ganzen und algemeinen als einzelne sprachkörper sind diser vierfachen betrachtungsweise fähig. Wir erhalten so eine algemeine grammatik (algemeine lautlere, algemeine morphologie u. s. f.) und specielle grammatik diser oder jener sprache, dises oder jenes sprachstammes (specielle lautlere, specielle morphologie etc.). Im vor ligenden aufsatze haben wir versucht die umriße einer algemeinen morphologie zu geben.

Ferner kann die grammatik und jeder teil derselben die sprache zum gegenstande haben, ab gesehen von den veränderungen, denen sie in irem leben unterworfen ist; dise art der behandlung wird sich in der regel an die (vor ligende oder erschloßene) epoche des sprachlebens halten, in welcher die sprache ire höchste entfaltung zeigt (der naturforscher würde sagen: an die auß gewachsene aber noch nicht alternde sprache). Es können aber auch die veränderungen der sprache, in denen ir leben (ire entwickelung, ir verfall) besteht, zum gegenstande der wißenschaft gemacht werden. So erhalten wir die geschichtliche grammatik oder sprachengeschichte (geschichte der laute, geschichte der sprachlichen form, der function, der syntax), welche wider algemein oder speciell sein kann. Auf die geschichtliche seite sind wir in unserem versuche für diß mal nicht ein gegangen.

Schließen wir von der sprachwißenschaft auß 1) die sprachphilosophie, d. h. die lere von der idee der sprache, 2) die sprachkunst, d. h. die fertigkeit im gebrauche der sprachen, 3) die philologie, d. h. die wißenschaft, welcher die erfaßung und darstellung des geisteslebens bedeutender völker ob ligt und welche zu disem zwecke der sprache in doppelter beziehung bedarf, ein mal als organon, als voraußetzung, und sodann als manifestation des geistes der nationen, dessen alseitige erfaßung ire aufgabe ist — schließen wir alles diß auß und faßen wir den begriff der glottik, der wißenschaft von der sprache streng und rein, so ist sie wesentlich grammatik (im eben entwickelten umfaßenden sinne[1]).

Wie verhält sich nun die morphologie zur lexicographie? Das lexicon verhält sich zur wißenschaftlichen darstellung der sprache, zur grammatik, wie sie irem begriffe nach sein soll, wie das register zu einem buche. Durch eine vollendete grammatik mit erschep-

1) Daß wir noch in der kindheitsepoche der sprachwißenschaft stehen, zeigt sich schon darin, daß man noch nicht gewont ist, sie als besondere wißenschaft zu betrachten. Von den vertretern diser an sich schon ungemein weit auß greifenden disciplin erwartet man, daß sie zugleich sprachkünstler, ferner daß sie philologen auf indischem, deutschem, altclassischem oder irgend welchem andern gebiete seien. In den naturwißenschaften ist die zeit längst vorbei, wo z. b. botanik und pharmacie innig verschmolzen waren.

fenden beispilsamlungen in jeder beziehung (die also z. b. alle wurzeln mit allen bedeutungen, alle bildungen der worte u. s. f. bietet) ist das lexicon entweder völlig ersezt oder auf einen index zu einer solchen grammatik reduciert. So lange aber solche alseitig vollendete grammatiken nicht vorhanden sind, ist das lexicon ein unumgänglicher notbehelf, der namentlich für die noch brach ligende functionslere (der lere von der bedeutung und beziehung) als höchst dankenswerter lückenbüßer ein tritt. Als ganzes ist das wörterbuch nicht wißenschaftlich, die lexicographie hat im systeme der sprachwißenschaft keine stelle; sie ist von rein practischer bedeutung. Wer den versuch macht, das lexicon wißenschaftlich an zu ordnen, der verkent sein wesen und seinen zweck; wärend er es der grammatik änlicher macht, macht er es als wörterbuch weniger brauchbar. Zu solchen büchern braucht man dann wider ein andres wörterbuch, einen index, um sie benützen zu können; beweis genug für die richtigkeit der behauptung, daß sich das wörterbuch seiner aufgabe gemäß, die eine rein practische ist, auch in seiner anordnung an das rein practische, das algemein geläufige, das conventionelle, d. h. ans alphabet zu halten habe, möge dessen reihenfolge auch noch so zufällig und unwißenschaftlich sein. Von einem verhältnisse des hier behandelten zweiges der glottik, der morphologie, zur lexicographie kann also gar nicht die rede sein.

In welchem verhältnisse steht die morphologie zur classification der sprachen? Die algemeine morphologie gibt zugleich die einteilung der sprachen in classen an die hand. Dise so gewonnene einteilung ist nun aber natürlich nur eine morphologische, eine solche, deren einteilungsgrund die form des wortes ist. Man würde wol zu anderen sprachclassen kommen, wenn man etwas anderes, z. b. die function als einteilungsgrund benuzte. Mittels der morphologie gelangen wir also nicht weiter, als zu einem morphologischen systeme der sprachen.

Etwas ganz anderes ist die historische, die (wenn ich so sagen darf) leibliche verwantschaft der sprachen. Die ermittelung des verhältnisses von mundart, sprache, sprachfamilie, sprachstamm, d. h. die auffindung der sprachsippen, ist vor allem mittels der lautlere zu erreichen, denn hier kommt es auf die lautmaterie an. Sprachen von derart überein stimmender lautmaterie, daß der gedanke an eine unabhängige entstehung derselben [1]) auß geschloßen ist, müßen leiblich verwant sein (entlentes hat ebenfals vor allem die lautlere auß zu sondern). Denkbarer weise können selbst verwante sprachen, sprachen, die von einer grundsprache ab stammen, verschidene morphologische form haben. Wäre es nicht möglich, daß, wärend eine sprache sagte «*varkâsas adanti*» (indogerm. ursprache), die andere dasselbe etwa durch «*vark ad*» auß drükte? Dann wären die beiden sprachen verwant und gehörten doch, morphologisch betrachtet, in zwei verschidene classen. Die verwantschaft

1) Die antwort auf die frage: welche übereinstimmungen in den sprachen sind folge der im wesentlichen überall gleichmäßigen natur des menschen und welche übereinstimmungen weisen auf urverwantschaft der sprachen hin — die feststellung der gränze zwischen disen beiden möglichkeiten ist eine der schwirigsten aufgaben unserer wißenschaft, deren lösung uns nur als eine in weiter ferne ligende möglichkeit erscheint.

der sprachen ist mit irer morphologischen übereinstimmung nicht notwendig verbunden und die leztere kann nicht als beweis der verwantschaft dienen. Diß hat man bisweilen übersehen und morphologische übereinstimmung mit verwantschaft verwechselt; es wurden da sprachstämme an genommen, wo nur morphologische classen vor ligen[1]). Diser punct ist von höchster wichtigkeit für die richtige erkentnis sprachlicher dinge, er verdient scharf ins auge gefaßt und fest gehalten zu werden. Die morphologie ist also für die ermittelung von sprachverwantschaft nicht maß gebend.

1) Ich erinnere nur beispilsweise an den so genanten finnisch-tatarischen sprachstamm, dem man auch die drawidischen sprachen, das japanische und villeicht noch anderes bei geselt, wärend die meisten diser sprachen nachweislich doch nur in irer morphologischen form überein stimmen.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
Томе I, № 8.

НОВЫЯ ИЗСЛѢДОВАНІЯ
О
ПРЕДВАРЕНІИ РАВНОДЕНСТВІЙ И КОЛЕБАНІИ ЗЕМНОЙ ОСИ.

Д. Перевощикова,
Члена Академіи.

Читано 9 октября 1858 года.

С. ПЕТЕРБУРГЪ, 1859.
Продается у Коммиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:
И. Глазунова въ СПб. и въ Москвѣ, Эггерса и Комп. въ СПб., П. Должикова въ Кіевѣ, Энфиджанца и Комп. въ Тифлисѣ, Сам. Шмидта въ Ригѣ и Л. Фосса въ Лейпцигѣ.
Цѣна: 25 коп. сер.

Печатано по разпоряженію Императорской Академіи Наукъ.

К. Веселовскій, Непремѣнный Секретарь.

Іюня 1859.

Въ Типографіи Императорской Академіи Наукъ.

НОВЫЯ ИЗСЛѢДОВАНІЯ

о

предваренїи равноденствій и колебаніи земной оси.

(1). Въ «Ученыхъ запискахъ по первому и третьему отдѣленіямъ И. Академіи наукъ (Т. 1. стр. 447 и слѣд.)» въ моемъ разсужденіи «о предваренїи равноденствій и колебаніи земной оси» для средняго предваренія принято число $50''{,}38781$, согласно также съ моею запискою, помѣщенною въ «Bulletin de la classe physico-mathématique (Т. X.)» а числа, зависящія отъ вѣковыхъ возмущеній въ движеніи планетъ, взяты изъ вычисленій г. Леверрье: но послѣ моихъ вычисленій тѣхъ же возмущеній, напечатанныхъ въ «Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St-Pétersbourg (T. VI шестой серіи)» послѣднія числа слѣдовало перемѣнить, и тѣмъ исправить постоянные коеффиціенты въ формулахъ, выражающихъ измѣненія въ наклоненіи эклиптики и въ отступательномъ движеніи точекъ равноденствій, — работа, не требовавшая много времени и особеннаго труда, по тому что я не имѣлъ намѣренія касаться теоретической части первой изъ трехъ упомянутыхъ записокъ; я уже оканчивалъ ее, какъ новое разсужденіе Поэнсо, явившееся въ «Connaissance des temps» на 1858 г., заставило меня пересмотрѣть прежній выводъ формулъ, оказавшійся недостаточнымъ относительно кратности и геометрической очевидности. Но прежде этого пересмотра, я увѣрился, что по способамъ Поэнсо можно получить необыкновенно просто основныя формулы Пуассона, предложенныя въ «Журналѣ Политехнической школы (Т. VIII, стр. 344)». Употребленіе способовъ Поэнсо для вывода этихъ формулъ потребовало и новыхъ вычисленій и совершенной перемѣны въ порядкѣ прежнихъ, такъ что представляемый мною трудъ осмѣливаюсь считать если не вполнѣ новымъ, то по крайней мѣрѣ во многомъ несходнымъ со всѣми извѣстными изслѣдованіями этого важнаго и труднаго предмета теоретической астрономіи. Сверхъ того должно замѣтить, что я не могъ обойтись безъ краткаго изложенія способовъ Поэнсо и безъ выводовъ главныхъ его формулъ, потому что полученные мною числовые результаты отличаются отъ его результатовъ не только по разности данныхъ, но и по разностямъ знаковъ въ упомянутыхъ формулахъ.

(2). Въ «Новой теоріи вращенія тѣлъ» Поинсо обнаружилъ великую пользу теоріи *паръ* въ изслѣдованіяхъ вращательнаго движенія около осей и точекъ; потомъ, въ «Теоріи катящихся круглыхъ конусовъ» онъ коснулся предваренія равноденствій, ограничившись только краткимъ взглядомъ на причину этого явленія, и на условія его возможности и зависимости его величины отъ фигуры и состава земли; но въ новомъ разсужденіи онъ входитъ уже во всѣ подробности теоріи и предлагаетъ формулы для вычисленія среднихъ величинъ предваренія равноденствій и колебанія земной оси на неподвижной эклиптикѣ.

(3). Въ «Общей теоріи равновѣсія и движенія системъ» Поинсо (Статики стр. 422) замѣтилъ, что въ «Аналитической механикѣ» Лагранжа ясенъ одинъ только механизмъ вычисленій: это замѣчаніе, со всею строгостью, можно примѣнить ко всѣмъ рѣшеніямъ вопроса о предваренiи равноденствій и колебаніи земной оси, потому что ни въ одномъ изъ нихъ не видно, какимъ образомъ тяготѣнія Солнца и Луны могутъ сообщать земной оси такое обращеніе около оси эклиптики, отъ котораго полюсъ земли повидимому остается неподвижнымъ на Землѣ и въ то же время въ пространствѣ описываетъ сомкнутую кривую линію, въ которой величины радіусовъ измѣняются періодически. По этой-то причинѣ, новое свое разсужденіе Поинсо начинаетъ тремя леммами, ярко освѣщающими сущность вопроса. Дѣйствительно: обращеніе всякаго тѣла около оси или точки можетъ быть произведено только парою; скорость и ось вращенія могутъ измѣняться только отъ дѣйствія новой пары; которую Поинсо называетъ вообще *ускорительною*. И такъ, прежде всего надобно было показать возможность явленія, и какія измѣненія въ скорости вращенія и въ положеніи его оси можетъ произвести всякая ускорительная пара, при всѣхъ возможныхъ ея положеніяхъ, или измѣненія въ дѣйствіи пары, сообщившей тѣлу вращательное движеніе. Въ леммахъ своихъ Поинсо разсматриваетъ три случая, два частныхъ и одинъ общій; изъ нихъ только два первыхъ относятся къ нашему предмету, и потому прилагаемъ здѣсь содержаніе только двухъ первыхъ леммъ.

1) Когда ось ускорительной пары перпендикулярна къ оси пары вращающей и къ ея проложенію на данную постоянную плоскость; тогда не перемѣняется ни величина вращающей пары, ни наклоненіе ея оси къ постоянной плоскости, такъ что эта ось будетъ описывать круглый прямой конусъ около прямой линіи, нормальной къ упомянутой плоскости; но *скорость движенія оси вращающей пары или ея проложенія на ту же постоянную плоскость зависитъ отъ ускорительной пары и выражается этою парою, раздѣленною на пару вращающую, помноженную на косинусъ ея наклоненія къ постоянной плоскости.*

2) Когда ось ускорительной пары перпендикулярна къ оси пары вращающей въ плоскости, пролагающей эту ось на постоянную плоскость, тогда измѣняется наклоненіе оси вращающей пары, и *скорость измѣненія выражается отношеніемъ обѣихъ паръ*, такъ что если ускорительная пара есть періодическая функція времени, то ось пары вращающей должна колебаться подобно маятнику.

Не надобно объяснять, что эти двѣ леммы, доказанныя простѣйшими способами

составленія и разложенія паръ подобно силамъ, заключаютъ въ себѣ всѣ основанія теоріи предваренія равноденствій и колебанія земной оси, и вмѣстѣ съ тѣмъ обнаруживаютъ возможность и необходимость того и другаго явленія.

(4). Положивъ основаніе теоріи, слѣдуетъ разсмотрѣть самое явленіе, къ которому желаемъ примѣнить ее. Вопросъ касается суточнаго обращенія Земли около нѣкоторой оси и съ нѣкоторою скоростью. Наблюденія показали:

1) Скорость суточнаго обращенія Земли постоянна, по крайней мѣрѣ, посредствомъ точнѣйшихъ снарядовъ для измѣренія времени не открыто въ ней ни малѣйшихъ измѣненій.

2) Полюсъ вращенія, повидимому, неподвиженъ на земной поверхности; если же онъ перемѣняется, то столь мало, что до сихъ поръ не замѣчено его перемѣщенія, т. е. незамѣчены измѣненія въ географическихъ широтахъ.

3) Напротивъ, сравненіе положенія полюса вращенія Земли со звѣздами на видимомъ небесномъ сводѣ показало, что около полюса эклиптики онъ описываетъ окружность весьма медленно, почти въ 25868 лѣтъ, и противно направленію, по которому считаются долготы звѣздъ по эклиптикѣ и ихъ прямыя — восхожденія по экватору. Окружность, описываемая на небѣ полюсомъ вращенія Земли, параллельна эклиптикѣ, отчего перемѣняются всѣ координаты свѣтилъ, кромѣ широты, и *отступательное* движенія линія пересѣченія эклиптики съ экваторомъ: это-то отступательное движеніе названо *предваренія равноденствій*. Неподвижность полюса вращенія Земли на ея поверхности противорѣчитъ общей теоріи вращенія свободнаго тѣла около точки, потому что ось вращенія не можетъ быть неподвижною въ тѣлѣ, если она въ то же время движется въ пространствѣ; слѣдственно для объясненія такого противорѣчія теоріи наблюденіямъ, надобно допустить и потомъ доказать, что полюсъ вращенія описываетъ на земной поверхности кривую линію, занимающую столь малое пространство, что величину его или величину отверстія конуса, соотвѣтствующаго этой кривой, нельзя опредѣлить наблюденіями. Отсюда выходитъ, что вращеніе Земли можно представить геометрически слѣдующимъ образомъ: когда полюсъ вращенія описываетъ въ пространствѣ неподвижный конусъ съ основаніемъ, котораго діаметръ равняется почти 47°, тогда другой конусъ съ весьма малымъ основаніемъ, прикрѣпленный къ Землѣ, увлекаетъ ее за собою, *катясь* по внутренней поверхности конуса неподвижнаго. Такое геометрическое строеніе позволяетъ вычислить радіусъ d основанія *катящагося* конуса, потому что онъ сдѣлаетъ столько оборотовъ, сколько сутокъ содержится во времени полнаго обращенія точекъ равноденствій по эклиптикѣ; такъ что будетъ

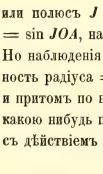
$$d = \frac{47^{\circ}}{18947912} = 0''{,}008,$$

число, невозможное для опредѣленія наблюденіями.

4) Предложенныя наблюденія и слѣдствія изъ нихъ относятся къ *среднему* предваренію равноденствій, открытому Гиппархомъ почти за двѣ тысячи лѣтъ до нашего времени, и геометрически объясненному Коперникомъ; но въ 1748 г., Брадлей, величайшій

изъ практическихъ астрономовъ, дополнилъ древнее открытіе, доказавъ, что полюсъ вращенія Земли, обращаясь около полюса эклиптики по направленію, противоположному суточному движенію, то приближается, то удаляется отъ полюса эклиптики въ продолженіе почти $18\frac{1}{2}$ лѣтъ, и такое качаніе полюса Земли относительно средняго его положенія простирается до $9''$ въ ту и другую сторону. Это-то качаніе названо *колебаніемъ* земной оси. И такъ, въ основаніи выше-упомянутаго неподвижнаго конуса находится не окружность, но сомкнутая кривая линія, которой радіусы увеличиваются и уменьшаются періодически.

(5). Въ объясненномъ геометрическомъ строеніи всѣхъ обстоятельствъ обращенія Земли невидно еще положенія оси ея фигуры, принимаемой за эллипсоидъ вращенія, — вопросъ, который можно разрѣшить только одною теоріею, и которой, безъ сомнѣнія заставилъ Поэнсо изслѣдывать механизмъ «катящихся конусовъ». Здѣсь онъ сперва замѣтилъ, что, при обращеніи сфероида, ось вращающей пары, ось вращенія и ось фигуры сфероида находятся въ одной плоскости. Это замѣчаніе не трудно доказать изъ той формулы общей теоріи вращенія тѣлъ, которою выражается косинусъ угла, составляемаго осью вращенія съ осью вращающей пары. Потомъ, Поэнсо нашелъ, что *тангенсы угловъ, составляемыхъ осями вращенія и вращающей пары съ осью фигуры, относятся какъ моменты косности относительно оси фигуры и какою нибудь діаметра экватора.* Но какъ первый моментъ косности болѣе втораго, то явно, что ось вращающей пары всегда находится между осью вращенія и осью фигуры сфероида. Притомъ, если примемъ, что въ земномъ сфероидѣ ось фигуры къ діаметру экватора относится какъ 305 къ 306; то найдемъ, что тангенсъ угла между осью вращенія и осью пары почти въ 306 разъ менѣе тангенса угла между осью вращенія и осью фигуры.



(6). Изъ упомянутой теоремы слѣдуетъ, что *уголъ между осью вращенія и осью фигуры имѣетъ постоянную величину*, потому что не перемѣняется уголъ между осью пары и осью фигуры. Теперь положимъ, что AO есть ось фигуры земнаго эллипсоида, OG — ось вращающей пары G, OJ — ось вращенія и OE — ось эклиптики, и примемъ, что эллипсоидъ, приведенный въ движеніе парою G, оставляется его косности: тогда его обращеніе будетъ совершаться такъ, какъ бы прямой и круглый конусъ JOA катится также по прямому и круглому конусу JOG, имѣющему ось OG, неподвижную въ пространствѣ, или полюсъ J внутри сфероида описываетъ около A окружность, которой радіусъ $=\sin JOA$, на сферѣ же небесной — другую окружность, которой радіусъ $=\sin JOG$. Но наблюденія показываютъ, что полюсъ J на сферѣ небесной описываетъ не окружность радіуса $=\sin JOG$, по окружность радіуса $=\sin JOE$ около полюса E эклиптики, и притомъ по направленію *отступательному*. И такъ, обращеніе Земли, произведенное какою нибудь парою G, измѣняется ускорительною парою, которой дѣйствіе, соединяясь съ дѣйствіемъ пары G, измѣняетъ ось и скорость вращенія. Отсюда прямой переходъ

къ разсмотрѣнію притягательныхъ дѣйствій Солнца и Луны. Но предварительно еще надобно было доказать, что несмотря на дѣйствіе всякой ускорительной пары:

1) *Скорость обращенія сфероида, считаемая по оси его фигуры, остается постоянною.*

2) *Не перемѣняется уголъ, выражающій разстояніе полюса вращенія отъ полюса фигуры.*

3) *Вообще, всѣ три оси, т. е. ось фигуры, вращенія и вращающей пары заключаются въ столь маломъ конусѣ, что позволительно считать ихъ за одну ось,* и

4) *Оси эти никогда не удаляются одна отъ другой.*

Всѣ эти важныя теоремы, особенно три послѣднія, Поэнсо доказалъ почти безъ вычисленій, какъ необходимыя слѣдствія его общей теоріи вращенія тѣлъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ объяснилъ, что теоремы не зависятъ ни отъ числа притягивающихъ тѣлъ, ни отъ закона притяженія, и также нѣтъ надобности предполагать, что притягиваемый сфероидъ есть тѣло однородное: надобно только допустить, что онъ сложенъ изъ однородныхъ колецъ,образуемыхъ обращеніемъ меридіановъ, и которыхъ плотность измѣняется по произвольному закону; тогда всѣ три теоремы останутся справедливыми для всякаго сфероида разнороднаго, котораго плотность въ каждой его точкѣ есть произвольная функція разстоянія этой точки отъ центра и экватора.

Примѣчаніе. Весьма полезно доказательство Поэнсо сличить въ анализомъ Пуассона въ «Журналѣ Политехнической школы» Т. VIII, стр. 209 и слѣд.

(7). Такимъ образомъ Поэнсо положилъ твердыя и вполнѣ очевидныя основанія для теоріи предваренія равноденствій и колебанія земной оси, по которымъ вычисленія ихъ среднихъ величинъ на неподвижной эклиптикѣ не представляютъ уже не малѣйшихъ затрудненій, потому что стоитъ только выразить ускорительныя пары въ функціяхъ астрономическихъ данныхъ.

Положимъ, что масса какого нибудь притягивающаго тѣла сосредоточена въ его центрѣ S, котораго положеніе опредѣляется координатами x, y, z относительно прямоугольныхъ осей, проходящихъ чрезъ центръ Земли, и изъ которыхъ ось x — въ направлена къ сѣверному полюсу и на ней находится меньшая ось фигуры $= a$, и ось z — въ упадаетъ на пересѣченіе съ экваторомъ плоскости орбиты S; радіусъ земнаго экватора изображаемъ чрезъ b, и массу земнаго сфероида — чрезъ T. Тѣло S или *массивная* точка S дѣйствуетъ на всѣ точки или элементы земнаго сфероида; если составную силу изъ этихъ дѣйствій разложимъ на силы x, y, z, и перенесемъ ихъ параллельно въ центръ Земли; то получимъ три пары:

$$L = Yz - Zy,\ M = Zx - Xz,\ N = Xy - Yx,$$

въ которыя надобно вставить величины силъ X, Y, Z. Для опредѣленія этихъ союзныхъ силъ, должно обратиться къ теоріи притяженія сфероидовъ, изъ которой знаемъ, что когда S находится внѣ эллипсоида вращенія, тогда [1])

[1]) См. въ «Небесной механикѣ» Лапласа, Т. II, стр. 48.

$$X = A'x,\ Y = B'y,\ Z = B'z,$$

$$A' = \frac{3S.T}{e^3}(\lambda' - \text{Д. tang}\,\lambda'),\ B' = \frac{3S.T}{2e^3}(\text{Д. tang}\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2}),$$

гдѣ e означаетъ эксцентрицитетъ эллипсоида, и

$$\lambda' = \frac{e}{a'},\ 2a'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - e^2 + V\left\{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4e^2x^2\right\}.$$

Отъ этихъ величинъ X, Y, Z, ускорительныя союзныя пары превратятся въ

$$L = o,\ M = (B' - A')xz,\ N = (A' - B')xy,$$

и составная изъ нихъ будетъ

$$g = (A' - B')xV(y^2 + z^2),$$

выраженіе, замѣчательное тѣмъ, что изъ него тотчасъ можно вывести случаи, въ которыхъ суточное обращеніе Земли не подлежитъ возмущеніямъ; именно:

1) Когда $x = o$, т. е. когда притягивающее тѣло находится въ плоскости земнаго экватора, тогда $g = o$.

2) Когда $V(z^2 + y^2) = o$, или $z = o$, $y = o$, т. е. когда притягивающее тѣло соотвѣтствуетъ полюсу Земли, тогда опять $g = o$.

Наконецъ 3) также $g = o$, когда $A' = B'$; но какъ разложеніе функцій

$$\lambda' - \text{Д. tang}\,\lambda',\ \text{Д. tang}\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2}$$

даетъ

$$A' - B' = \frac{3S.T}{a'^3}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{e}{a'}\right)^2 - \frac{2}{7}\left(\frac{e}{a'}\right)^4 + \frac{3}{9}\left(\frac{e}{a'}\right)^6 - \ldots\right],$$

то условіе $A' = B'$ требуетъ, чтобъ $e = o$, т. е. Земля должна быть правильный шаръ, для котораго не существовало бы ни предваренiе равноденствій, ни колебаніе земной оси.

(8). Послѣ этихъ общихъ замѣчаній объ условіяхъ возможности предваренія равноденствій и колебанія земной оси, слѣдуетъ разсмотрѣть свойства производящихъ ихъ паръ, образующихся изъ дѣйствій тяготѣнія Солнца и Луны.

Если S есть Солнце, то нетрудно вычислить, что при его параллаксѣ $= 8''{,}6$ и при сжатіи Земли $= \frac{1}{306}$[1]), можно совсѣмъ безъ погрѣшности пренебречь эксцентрицитетомъ земнаго эллипсоида сравнительно съ среднимъ разстояніемъ r Земли отъ Солнца, такъ что будетъ $a' = r = 23946b$[2]), послѣ чего найдется

$$\left(\frac{e}{a'}\right)^4 = \left(\frac{e}{r}\right)^4 = \frac{1}{(153)^2(23946)^2},$$

---

[1]) Поэтому принимаетъ сжатіе Земли $\frac{1}{308{,}65}$.

[2]) Поэтому принимаетъ $r = 24000b$, или параллаксъ Солнца $= 8''{,}59$.

т. е. въ разложеніи $A' - B'$ нѣтъ надобности обращать вниманіе на члены, въ которыхъ $\frac{e}{a'}$ или $\frac{e}{r}$ выше второй степени, или

$$A' - B' = \frac{3S.Te^2}{5r^5},$$

и потому

$$M = -\frac{3S.Te^2}{5r^5}xz, \quad N = \frac{3S.Te^2}{5r^5}xy.$$

Остается опредѣлить величины координатъ x, y и z. Для этого, чрезъ δ, ϱ, Θ и ω изобразимъ склоненіе, прямое восхожденіе, долготу Солнца и наклоненіе эклиптики къ экватору: тогда найдемъ

$$x = r\sin\delta, \quad y = r\cos\delta\sin\varrho, \quad z = r\cos\delta\cos\varrho,$$

и какъ изъ сферической астрономіи извѣстно, что

$$\sin\delta = \sin\omega\sin\Theta, \quad \cos\delta\sin\varrho = \frac{\sin\delta}{\operatorname{tang}\Theta}, \quad \cos\delta\cos\varrho = \frac{\sin\delta}{\sin\omega\operatorname{tang}\Theta};$$

то

$$x = r\sin\omega\sin\Theta, \quad y = r\cos\omega\sin\Theta, \quad z = r\cos\Theta;$$

слѣд. пары N и M примутъ различныя выраженія:

$$N = \frac{3S.Te^2}{5r^3}\cdot\frac{\sin^2\delta}{\operatorname{tang}\Theta} = \frac{3S.Te^2}{2.5r^3}\sin 2\omega\sin^2\Theta,$$

$$M = -\frac{3S.Te^2}{5r^3}\cdot\frac{\sin^2\delta}{\sin\omega\operatorname{tang}\Theta} = -\frac{3S.Te^2}{2.5r^3}\sin\omega\sin 2\Theta.$$

(9). Въ этихъ выраженіяхъ паръ открываемъ замѣчательныя ихъ свойства.

1) Дѣйствіе пары N, состоящее въ обращеніи Земли около линеи равноденствій, пропорціонально или квадрату синуса склоненія или квадрату синуса долготы солнца; слѣд. *направленіе этого обращенія не перемѣняется отъ положенія Солнца на его видимой орбитѣ; оно не перемѣняется также отъ направленія видимаго движенія Солнца.*

2) Дѣйствіе пары N въ равноденствіяхъ прекращается, въ солнцестояніяхъ же принимаетъ наибольшія величины.

3) Между 0° и 90° средняя величина $sin^2\Theta = \frac{1}{2}$, $\Theta = 45,^\circ$ и потому средняя величина пары N есть

$$\frac{3S.Te^2}{2.5r^3}\sin\omega\cos\omega \ldots\ldots (1)$$

4) Синусъ склоненія Солнца зависитъ и отъ его долготы и отъ наклоненія эклиптики; слѣд. средняя величина пары N соотвѣтствуетъ $\delta = 16^\circ\ 20'\ 58''$, когда примемъ $\omega = 23^\circ\ 27'\ 54''$.

5) Дѣйствіе пары M, обращающей Землю около оси y — въ, перпендикулярной къ линеи равноденствій, пропорціонально синусу двойной долготы Солнца; слѣд. *величина его перемѣняется четыре раза въ продолженіе года: въ равноденствіяхъ и солнцестояніяхъ оно уничтожается, въ октанахъ же принимаемъ наибольшія величины.*

Наконецъ 6), при всѣхъ упомянутыхъ обстоятельствахъ, дѣйствія обѣихъ паръ обратно пропорціональны кубу разстоянія Солнца отъ Земли.

(10). По формулѣ (1) и по леммѣ первой (чл. 3), изобразивъ чрезъ $\frac{d\psi}{dt}$ скорость предваренія равноденствій и чрезъ ν — наклоненіе оси a къ эклиптикѣ, получаемъ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{N}{G\cos\nu} = \frac{N}{G\sin\omega}.$$

Здѣсь подъ G разумѣется пара, производящая суточное обращеніе Земли, и какъ по «общей теоріи вращенія» G равняется моменту косности Земли относительно оси a, помножаемому на скорость вращенія θ; моментъ же косности $= \frac{2}{5}Tb^2$; то

$$G = \tfrac{2}{5}Tb^2\theta,$$

изъ чего, принявъ за единицу времени звѣздныя сутки, получимъ

$$G = \tfrac{4}{5}\pi Tb^2;$$

слѣд.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3S.e^2\cos\omega}{8\pi r^3 b^2}. \quad \ldots\ldots (2).$$

Нетрудно интегрировать это выраженіе; но сперва разберемъ его смыслъ. Въ немъ нѣтъ массы Земли, и $\frac{d\psi}{dt}$ зависитъ только отъ отношенія $\frac{e^2}{b^2}$ или отъ фигуры Земли; слѣд. *если не перемѣнится отношеніе между ея осями, то предвареніе равноденствій остается одно и то же, не смотря на увеличиваніе или уменьшеніе объема Земли.*

1) Не перемѣнится предвареніе равноденствій, когда земной сфероидъ превратится въ эллипсоидальной слой, содержащійся между двумя подобными поверхностями, или когда земной эллипсоидъ будетъ состоять изъ подобныхъ концентрическихъ слоевъ однородныхъ, которыхъ плотность измѣняется по произвольному закону отъ слоя до слоя, т. е. *въ этомъ случаѣ предвареніе равноденствій останется тоже самое, какое было бы при однородности всей Земли.*

2) Хотя предвареніе равноденствій связано съ фигурою Земли, однако по величинѣ его нельзя опредѣлять этой фигуры, потому что величина предваренія равноденствій обратно пропорціональна кубу разстоянія r Земли отъ Солнца, и эксцентрицитетъ e относительно r не имѣетъ значительной величины.

3) Эти важныя заключенія, менѣе очевидныя изъ другихъ способовъ изслѣдованія предваренія равноденствій, относятся не къ одной средней скорости, потому что вообще

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3S.e^2\cos\omega}{4\pi b^2 r^3}\sin^2\Theta.$$

Кромѣ того, формула эта еще показываетъ, что скорость $\frac{d\psi}{dt}$ зависитъ отъ мѣста Солнца на эклиптикѣ, а не отъ скорости его видимаго движенія, т. е. если бы Земля совершала свое обращеніе около Солнца не въ годъ, а въ мѣсяцъ, и пр. то, при одной и той же массѣ Солнца, скорость предваренія равноденствій осталась бы такая, какая нынѣ существуетъ.

(11). Интегрированіе формулы (2) даетъ

$$\psi = \frac{3S.e^2\cos\omega}{8\pi r^3 b^2} t \ldots (3),$$

въ предположеніи, что t начинается съ угломъ ψ. Если $t = 366{,}24224$ звѣздн. сутокъ, или t есть тропическій годъ, выраженный въ звѣздныхъ суткахъ; то ψ будетъ означать величину солнечнаго предваренія въ продолженіе тропическаго года; если же $t = 1$, то ψ выразитъ уже предвареніе равноденствій въ звѣздныя сутки.

Когда вмѣсто $\frac{e^2}{b^2}$ поставимъ $\frac{2}{306}$, и $\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2$ вмѣсто $\frac{S}{r^3}$, гдѣ T_1 есть звѣздный годъ $= 366{,}25643$ звѣзд. сут., и для 1800 г. примемъ $\omega = 23^\circ\ 27'\ 54''$; тогда найдемъ:

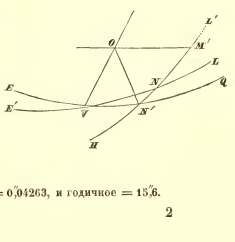
сут. предв. рав. $\psi = 0''{,}04344$,
годичное » $\psi = 15''{,}91058$ [1]).

(12). Хотя Луна гораздо ближе къ Землѣ, нежели Солнце, и среднее разстояніе ея r' отъ Земли только въ 60 разъ болѣе земнаго радіуса; однако и передъ этимъ разстояніемъ эксцентрицитетъ e земнаго эллипсонда также можно считать нулемъ безъ чувствительной погрѣшности, потому что $r'^2 - e^2 = r'^2(1 - 0{,}000001818)$; слѣд. относительно Луны пары N и M будутъ

$$N' = \frac{3L.Te^2}{5r'^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^2\varphi,$$

$$M' = -\frac{3L.Ie^2}{5r'^3}\sin\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi,$$

гдѣ L есть масса Луны, ε — наклоненіе ея орбиты къ экватору и φ — уголъ, выражающій разстояніе Луны отъ точки пересѣченія ея орбиты съ экваторомъ. Первая пара N' стремится сообщать движеніе линіи пересѣченія плоскости лунной орбиты съ экваторомъ; вторая же M' производитъ колебаніе земной оси относительно упомянутой плоскости орбиты: но задача требуетъ опредѣлить дѣйствіе этихъ паръ на движеніе линіи равноденствій и на колебаніе относительно эклиптики. Для легчайшаго уразумѣнія рѣшенія этой задачи, составимъ чертежъ,



на которомъ EQ, $E'L$ и HL' представляютъ экваторъ, эклиптику и орбиту Луны, OV — линію равноденствій, ON' — пересѣченіе лунной орбиты съ экваторомъ, и къ ней перпендикулярна OM' въ плоскости той же орбиты; наконецъ замѣтимъ, что ON' и OM' упадаютъ на оси паръ N' и M'.

[1]) Поэнсо, по своимъ даннымъ, нашелъ сут. предв. равн. $= 0''{,}04263$, и годичное $= 15''{,}6$.

Если уголъ $V'ON'$ изобразимъ чрезъ β, и пары N' и M' проложимъ на OV' и на ея продолженіе за точку O; то получимъ

$$\begin{aligned}\bar{N} &= N'\cos\beta + M'\sin\beta \\ &= \tfrac{3L.Te^2}{5r^3}\,(\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\beta\sin^2\varphi - \sin\varepsilon\sin\beta\sin\varphi\cos\varphi),\end{aligned}$$

и $\bar{N}$ будетъ та пара, которая производитъ лунное предваренiе равноденствiй. Остается опредѣлить углы ε и β. Въ сфер. тр-кѣ VNN' уголъ $NV'N' = \omega$, уг. $V'NN' =$ среднему наклоненiю i лунной орбиты къ эклиптикѣ, уг. $V'N'N = 180^\circ - \varepsilon$, сторона $V'N' = \beta$ и сторона $V'N =$ долготѣ N луннаго узла; слѣд. можемъ получить

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin i} = \frac{\sin N}{\sin\beta},$$

$$\sin\omega\sin(180^\circ - \varepsilon)\cos\beta - \cos\omega\cos(180^\circ - \varepsilon) - \cos i = 0,$$

$$\sin\omega\sin i\cos N - \cos\omega\cos i - \cos(180^\circ - \varepsilon) = 0.$$

Первое изъ этихъ уравненiй даетъ

$$\sin\varepsilon\sin\beta = \sin N\sin i,$$

второе:

$$\sin\varepsilon\cos\beta = \frac{\cos i - \cos\varepsilon\cos\omega}{\sin\omega},$$

и третье:

$$\cos\varepsilon = \cos\omega\cos i - \sin\omega\sin i\cos N.$$

Отсюда

$$\sin\varepsilon\cos\beta = \cos i\sin\omega + \cos\omega\sin i\cos N,$$

и

$$\begin{aligned}\bar{N} = \tfrac{3L.Te^2}{2.5r^3}\,(&\sin 2\omega\cos^2 i\sin^2\varphi + \sin 2i\cos 2\omega\cos N\sin^2\varphi \\ &- \sin 2\omega\sin^2 i\cos^2 N\sin^2\varphi - \sin i\sin N\sin 2\varphi),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\bar{N} = \tfrac{3L.Te^2}{4.5r^3}\{&\sin 2\omega\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2 i) - \sin 2\omega\cos 2\varphi\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2 i) \\ &+ \sin 2i\cos 2\omega\cos N - \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2N \\ &+ (\sin i - \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos(N + 2\varphi) - (\sin i + \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos(N - 2\varphi) \\ &+ \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2\,(N + \varphi) + \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2\,(N - \varphi)\}.\end{aligned}$$

Но какъ $G\sin\omega = \frac{4}{3}\pi Tb^2\sin\omega$; то

$$\begin{aligned}\tfrac{d\psi'}{dt} = \tfrac{3Le^2}{16\pi b^2r^2\sin\omega}\{&\sin 2\omega\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2 i) + \sin 2i\cos 2\omega\cos N - (1 - \tfrac{3}{2}\sin^2 i)\sin 2\omega\cos 2\varphi \\ &- \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2N + (\sin i - \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos(N + 2\varphi) \\ &- (\sin i + \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos(N - 2\varphi) + \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2\,(N + \varphi) \\ &+ \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2\,(N - \varphi)\}.\end{aligned}$$

По этой формулѣ, касательно луннаго предваренія равноденствій можемъ сдѣлать заключенія, подобныя предложеннымъ въ чл. 10.

(13). Положивъ, что Луна и ея узелъ движутся равномѣрно, т. е. положивъ, что

$$\varphi = mt, \quad N = -nt,$$

получимъ

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{3Le^2}{16\pi b^2 r'^3 \sin\omega}\Big\{(1-\tfrac{3}{2}\sin^2 i)\sin 2\omega + \sin 2i\cos 2\omega\cos nt - (1-\tfrac{3}{2}\sin^2 i)\sin 2\omega\cos 2mt$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin 2\omega\sin^2 i\cos 2nt + (\sin i - \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos(2m-n)t$$
$$- (\sin i + \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos(2m+n)t + \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2(m-n)t$$
$$+ \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos 2(m+n)t\Big\}.$$

Примѣч. Эта формула отъ формулы Поэнсо различается вопервыхъ, третьимъ членомъ: въ формулѣ Поэнсо вмѣсто $(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\sin 2\omega\cos 2mt$ находится $\frac{\sin^2 i\sin 2\omega}{2}\cos 2mt$; во вторыхъ, пятый членъ помножается на $\cos(2m+n)$ вмѣсто $\cos(2m-n)$.

Въ этой формулѣ

$$m = \frac{2\pi}{27{,}3216 \text{ ср. с.}} = 2\pi m', \quad n = \frac{2\pi}{6798{,}750 \text{ ср. с.}} = 2\pi n',$$

и по приведеніи къ одному знаменателю, примемъ

$$m' = \frac{h}{D}, \quad n' = \frac{k}{D},$$

отчего выйдетъ

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{3Le^2}{16\pi b^2 r'^3 \sin\omega}\Big\{(1-\tfrac{3}{2}\sin^2 i)\sin 2\omega + \sin 2i\cos 2\omega\cos\frac{2k}{D}\pi t - (1-\tfrac{3}{2}\sin^2 i)\sin 2\omega\cos\frac{2h}{D}\pi t$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin 2\omega\cos\frac{4k}{D}\pi t + (\sin i - \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos\frac{4h-2k}{D}\pi t$$
$$- (\sin i + \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos 2\omega)\cos\frac{4h+2k}{D}\pi t + \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos\frac{4h-4k}{D}\pi t$$
$$+ \tfrac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\omega\cos\frac{4h+4k}{D}\pi t\Big\}.$$

Очевидно, что интегралъ этого выраженія въ предѣлахъ $t = o$ и $t = D$ будетъ

$$\psi' = \frac{3Le^2}{16\pi b^2 r'^3 \sin\omega}(1-\tfrac{3}{2}\sin^2 i)\,D\sin 2\omega,$$

изъ чего для средняго луннаго предваренія равноденствій въ сутки получаемъ

$$\psi' = \frac{3Le^2\cos\omega}{8\pi b^2 r'^3}(1-\tfrac{3}{2}\sin^2 i).$$

Для вычисленія этой формулы, принимаемъ

$$i = 5^\circ\ 8'\ 48'', \text{ и } \frac{L}{r'^3} = 2{,}19539\frac{S}{r^3} = 2{,}19539\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2,$$

*

какъ въ упомянутой моей запискѣ «о предваренiи равноденствiй и колебанiи земной оси». По этому въ звѣздныя сутки

$$\psi' = \frac{3.2{,}19539.\pi.\cos\omega}{306\ T_1^{\,2}}\left(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2 i\right) = 0''{,}09422,$$

и въ тропическiй годъ

$$\psi' = 34''{,}50831\ ^1).$$

Придавъ это число къ выше-найденному солнечному предваренiю $15''{,}91058$, для общаго средняго предваренiя равноденствiй на неподвижной эклиптикѣ получимъ

$$50''{,}41889.$$

Результатъ, замѣчательный тѣмъ, что онъ близокъ къ числу $50''{,}415$, которое нашелъ Біо изъ сравненiя наблюденiй Брадлея и Піацци. По такому согласiю теоріи съ практикою, впередъ будемъ употреблять среднее изъ этихъ двухъ чиселъ

$$50''{,}41699.$$

Не безполезно замѣтить, что, по теоріи, общее предваренiе равноденствiй въ звѣздныя сутки $= 0''{,}13766$.

(14). Обращаемся къ колебанiю земной оси, производимому тяготѣнiемъ Солнца посредствомъ пары

$$\boldsymbol{M} = -\frac{3S.T^2}{2.5r^3}\sin\omega\sin 2\Theta.$$

Эта пара, въ продолженiе элемента dt въ наклоненiи ω оси Земли къ оси эклиптики произведетъ измѣненiе $d\omega$, которое, по леммѣ второй (чл. 3), есть

$$d\omega = \frac{\boldsymbol{M}dt}{G},$$

изъ чего

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} = -\frac{3Se^2}{8\pi r^3 b^2}\sin 2\Theta\,.\,dt.$$

За единицу времени опять принимаемъ звѣздныя сутки, т. е. полагаемъ

$$\Theta = \frac{2\pi}{T''}t,\ 2\Theta = \frac{4\pi}{T''}t = ht,$$

гдѣ $\boldsymbol{T''}$ есть тропическiй годъ въ звѣздныхъ суткахъ $= 366{,}24224$, и потомъ дѣлаемъ

$$k = \frac{3Se^2}{8\pi r^3 b^2} = \frac{3.4\pi^2.2\mu}{8\pi T_1^{\,2}} = \frac{3\pi\mu}{T_1^{\,2}},$$

и потому

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} = -k\sin ht\,.\,dt,$$

---

[1]) Поэнсо нашелъ для луннаго суточнаго предваренiя $0''{,}095037$, а для годичнаго $34''{,}8$, и потому общее $= 50''{,}4$.

чего интегралъ есть

$$l.\tang\tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{k}{h}\cos ht + C,$$

гдѣ l означаетъ Неперовъ логариомъ. Чтобъ опредѣлить постоянное произвольное C, предполагаемъ, что въ весеннее равноденствіе, когда $t = o$, наклоненіе ω эклиптики превратится въ ω'; получимъ

$$l.\tang\tfrac{1}{2}\omega = l.\tang\tfrac{1}{2}\omega' + \tfrac{k}{h}(\cos ht - 1).$$

Изъ этой формулы можно видѣть, какимъ образомъ измѣняется разность между ω' и ω; именно:

1) Когда $t = \frac{1}{4}T''$, тогда $ht = \pi$, $\cos ht = -1$, и

$$l.\tang\tfrac{1}{2}\omega = l.\tang\tfrac{1}{2}\omega' - \tfrac{3\mu T''}{2I_1^2}.$$

По этой формулѣ, какъ ниже увидимъ, не трудно вычислить, на сколько ось Земли наклоняется къ оси эклиптики въ продолженіе трехъ мѣсяцевъ.

2) Когда, опять чрезъ три мѣсяца, $t = \frac{1}{2}T''$, тогда $ht = 2\pi$, $\cos ht = 1$, и

$$l.\tang\tfrac{1}{2}\omega = l.\tang\tfrac{1}{2}\omega', \text{ или } \omega = \omega';$$

слѣд. во вторую четверть года наклоненіе ω земной оси къ оси эклиптики возстановляется.

3) Чрезъ новые три мѣсяца $t = \frac{3}{4}T''$, $ht = 3\pi$, $\cos ht = -1$, и уголъ ω опять уменьшится на столько же, на сколько онъ уменьшался въ первые три мѣсяца.

Наконецъ 4) когда $t = T''$, тогда $ht = 4\pi$, $\cos ht = 1$, и опять $\omega' = \omega$.

И такъ, въ продолженіе тропическаго года ось Земли два раза перемѣняетъ свое наклоненіе къ оси эклиптики на одно и тоже количество, и два раза принимаетъ свое прежнее положеніе: въ этомъ состоитъ ея колебаніе отъ дѣйствія Солнца.

Теперь вычислимъ самую величину измѣненія угла ω. Сперва находимъ

$$\tfrac{3\mu T''}{2I_1^2} = 0{,}000013383\,(\overline{5},1265680);$$

слѣд.

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\omega'}{\tang\frac{1}{2}\omega} = e_1^{\,0{,}000013383}$$

гдѣ e_1 представляетъ основаніе Неперовыхъ логариомовъ, и $\log e_1 = 0{,}4342945$. Отсюда

$$\log.\tang\tfrac{1}{2}\omega' = \log.\tang\tfrac{1}{2}\omega + 0{,}000013383\log e_1 = 9{,}3174040,$$

и $\quad \frac{1}{2}\omega' = 11^\circ\ 43'\ 57''{,}55,\ \omega' = 23^\circ\ 27'\ 55''{,}10,$

т. е. солнечное колебаніе имѣетъ незначительную величину

$$1''{,}1\ ^1).$$

---

[1]) Поэнсо нашелъ $\omega' - \omega = 1''{,}08$.

(15). Для опредѣленія средняго луннаго предваренія равноденствій, пары N' и M' пролагались на линію равноденствій: очевидно, что для луннаго колебанія земной оси, надобно проложить ихъ на перпендикулярную къ этой линіи, отчего выйдетъ

$$\overline{M} = N' \sin\beta + M' \cos\beta$$

$$= \frac{3L.Te^2}{5r'^3}(\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\beta\sin^3\varphi - \sin\varepsilon\cos\beta\sin\varphi\cos\varphi),$$

или

$$\overline{M} = \frac{3L.Te^2}{5r'^3}(\sin i\cos i\cos\omega\sin N\sin^2\varphi - \sin^2 i\sin\omega\sin N\cos N\sin^2\varphi$$

$$- \cos i\sin\omega\sin\varphi\cos\varphi - \sin i\cos\omega\cos N\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$= \frac{3L.Te^2}{2.5r'^3}\Big\{\tfrac{1}{2}\sin 2i\cos\omega\sin N - \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos\omega\sin N\cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin\omega\sin 2N$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin\omega\sin 2N\cos 2\varphi - \cos i\sin\omega\sin 2\varphi - \sin i\cos\omega\cos N\sin 2\varphi\Big\}.$$

Но какъ, по леммѣ второй (чл. 3),

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\overline{M}}{G},\ G = \tfrac{4}{5}\pi Tb^2,\ \varphi = mt,\ N = -nt;$$

то

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{3Le^2}{16\pi r'^3 b^2}\Big\{-\sin 2i\cos\omega\sin nt + \sin 2i\cos\omega\sin nt\cos 2mt$$

$$+ \sin^2 i\sin\omega\sin 2nt - \sin^2 i\sin\omega\sin 2nt\cos 2mt$$

$$- 2\cos i\sin\omega\sin 2mt - 2\sin i\cos\omega\cos nt\sin 2mt\Big\}$$

$$= \frac{3Le^2}{16\pi r'^3 b^2}\Big\{-\sin 2i\cos\omega\sin nt + \sin^2 i\sin\omega\sin 2nt - 2\cos i\sin\omega\sin 2mt$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos\omega\sin(n+2m)t + \tfrac{1}{2}\sin 2i\cos\omega\sin(n-2m)t$$

$$- \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin\omega\sin 2(n+m)t - \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin\omega\sin 2(n-m)t$$

$$- \sin i\cos\omega\sin(n+2m)t + \sin i\cos\omega\sin(n-2m)t\Big\},$$

чего интегралъ есть

$$\nu = \frac{3Le^2}{16\pi r'^3 b^2}\Big\{\frac{\sin 2i\cos\omega}{n}\cos nt - \frac{\sin^2 i\sin\omega}{2n}\cos 2nt + \frac{2\cos i\sin\omega}{2m}\cos 2mt - \frac{\sin 2i\cos\omega}{2(n+2m)}\cos(n+2m)t$$

$$- \frac{\sin 2i\cos\omega}{2(n-2m)}\cos(n-2m)t + \frac{\sin^2 i\sin\omega}{4(n+m)}\cos 2(n+m)t + \frac{\sin^2 i\sin\omega}{4(n-m)}\cos 2(n-m)t$$

$$+ \frac{\sin i\cos\omega}{n+2m}\cos(n+2m)t - \frac{\sin i\cos\omega}{n-2m}\cos(n-2m)t\Big\} + C,$$

или

$$\nu = \frac{3Le^2}{16\pi r'^3 b^2}\Big\{\frac{\sin 2i\cos\omega}{n} - \frac{2\sin 2i\cos\omega}{n}\sin^2\tfrac{1}{2}nt - \frac{\sin^2 i\sin\omega}{2n} + \frac{\sin^2 i\sin\omega}{n}\sin^2 nt$$

$$+ \frac{\cos i\sin\omega}{m} - \frac{2\cos i\sin\omega}{m}\sin^2 mt - \frac{\sin 2i\cos\omega}{2(n+2m)} + \frac{\sin 2i\cos\omega}{n+2m}\sin^2\frac{n+2m}{2}t$$

$$-\frac{\sin 2i\cos\omega}{2(n-2m)}+\frac{\sin 2i\cos\omega}{n-2m}\sin^2\frac{n-2m}{2}t+\frac{\sin^2 i\sin\omega}{4(n+m)}$$
$$-\frac{\sin^2 i\sin\omega}{2(n+m)}\sin^2(n+m)t+\frac{\sin^2 i\sin\omega}{4(n-m)}-\frac{\sin^2 i\sin\omega}{2(n-m)}\sin^2(n-m)t$$
$$+\frac{\sin i\cos\omega}{n+2m}-\frac{2\sin i\cos\omega}{n+2m}\sin^2\frac{n+2m}{2}t-\frac{\sin i\cos\omega}{n-2m}+\frac{2\sin i\cos\omega}{n-2m}\sin^2\frac{n-2m}{2}t\Big\}+C.$$

Когда предѣлами этого интеграла назначимъ $t=o$, соотвѣтствующее времени совпаденія узла лунной орбиты съ точкою Υ, и $t=\frac{\pi}{n}=$ почти 9 годамъ съ $\frac{1}{4}$; тогда получимъ

$$\nu=\frac{3Ie^2}{8\pi r'^3b^2}\Big\{\frac{\sin 2i\cos\omega}{n}+\frac{\cos i\sin\omega}{m}\sin^2\frac{m}{n}\pi-\frac{\sin 2i\cos\omega}{2(n+2m)}\cos^2\frac{m}{n}\pi$$
$$-\frac{\sin 2i\cos\omega}{2(n-2m)}\cos^2\frac{m}{n}\pi+\frac{\sin^2 i\sin\omega}{4(n+m)}\sin^2\frac{m}{n}\pi+\frac{\sin^2 i\sin\omega}{4(n-m)}\sin^2\frac{m}{n}\pi$$
$$+\frac{\sin i\cos\omega}{n+2m}\cos^2\frac{m}{n}\pi-\frac{\sin i\cos\omega}{n-2m}\cos^2\frac{m}{n}\pi\Big\},$$

или наконецъ

$$\nu=\frac{3.2.19539.\pi}{306.T_1^2}\Big\{\frac{\sin 2i\cos\omega}{n}+\cos\omega\cos^2\frac{m}{n}\pi.\frac{n\sin 2i+4m\sin i}{4m^2-n^2}+\sin\omega\sin^2\frac{m}{n}\pi\Big(\frac{\cos i}{m}-\frac{n\sin^2 i}{2(m^2-n^2)}\Big)\Big\}.$$

Примѣч. Выводъ этой формулы предложенъ во всей подробности для того, чтобы читатели могли повѣрить его безъ труда, и сличить съ слѣдующею формулой Поэнсо, которая съ найденной мною сходна знаками только въ первомъ членѣ:

$$\nu=K'^2\Big[\frac{\sin 2i\cos\omega}{n}-\cos^2\frac{m}{n}\pi\frac{\cos\omega}{4m^2-n^2}(4m\sin i-n\sin 2i)$$
$$-\sin^2\frac{m}{n}\pi\sin\omega\Big(\frac{n\sin^2 i}{2(m^2-n^2)}+\frac{\cos i}{m}\Big)\Big].$$

Въ найденной формулѣ

$$n=190''{,}62,\ m=47435'',\ \frac{m}{n}\pi=152^\circ 14'51''.$$

По этимъ даннымъ находимъ

$$\nu=18''{,}50888\ ^1).$$

Но какъ въ предъидущемъ членѣ найдено, что въ тоже время солнечное колебаніе земной оси $=1''{,}1$; то ея общее колебаніе есть

$$19''{,}60888,$$

и число это выражаетъ большую ось такъ называемаго *средняго* эллипсиса колебанія; половина ея $=9''{,}80444$.

Изъ этого изложенія способовъ Поэнсо очевидны ихъ преимущества предъ другими уже извѣстными. *Во-первыхъ*, они вполнѣ объясняютъ физическій смыслъ вопроса; *во-вторыхъ*, основныя числа предваренія равноденствій и колебанія выводятся посредствомъ

---

1) Поэнсо нашелъ $\nu=16''{,}9$.

простѣйшихъ вычисленій по формуламъ, составляемымъ по яснымъ указаніямъ самыхъ вопросовъ; *въ-третьихъ* — что весьма важно — числа эти опредѣляются независимо одно отъ другаго; наконецъ, *въ-четвертыхъ*, много сокращается выводъ тѣхъ формулъ, въ которыхъ видимое движеніе Солнца и истинное Луны принимаются уже эллиптическими, а не круговыми, и въ которыя вводится измѣненіе наклоненія эклиптики отъ дѣйствія планетъ, — что видно изъ нижеслѣдующаго.

(16). Сокращеніе въ выводахъ формулъ и ясное выраженіе ихъ смысла начинается при самомъ составленіи Эйлеровыхъ общихъ формулъ вращенія тѣла около точки, потому что когда возьмемъ основныя формулы этого вращенія изъ теоріи Поэнсо

$$\Theta^2 = p^2 + q^2 + r^2,\ p = \frac{L}{A},\ q = \frac{M}{B},\ r = \frac{N}{C},$$

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2,\ \cos i = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{G\Theta},$$

въ которыхъ A, B, C суть моменты косности относительно главныхъ осей тѣла, Θ — скорость вращенія, производимаго парою G, и разлагаемая на союзныя скорости p, q, r; самая же пара G разлагается на союзныя L, M, N, и i есть уголъ, составляемый осью вращенія съ осью пары G, и когда обратимъ вниманіе на измѣненія въ p, q, r, происходящія отъ средобѣжныхъ силъ, всегда соприсутствующихъ съ обращеніемъ тѣла; тогда, зная, что ось составной пары этихъ силъ перпендикулярна къ мгновенной оси вращенія, и самая пара $= \Theta G \sin i$, тотчасъ получимъ Эйлеровы уравненія

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr,$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)pr,$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq\ ^1).$$

---

[1]) Можетъ быть, нѣкоторые читатели полюбопытствуютъ узнать подробности вывода, и потому предлагаемъ ихъ сокращенно: если чрезъ (G, X), (G, Y), (G, Z) изобразимъ углы, составляемые осью пары G съ главными осями x-въ, y-въ, z-въ; то

$$\cos(G, X) = \frac{Ap}{G},\ \cos(G, Y) = \frac{Bq}{G},\ \cos(G, Z) = \frac{Cr}{G}.$$

Когда ни внутри тѣла обращающагося, ни внѣ его нѣтъ причинъ, возмущающихъ его движеніе, тогда не перемѣняются ни скорость, ни ось вращенія; однакожъ образуются силы средобѣжныя, которыя ежемгновенно измѣняютъ положеніе оси вращенія и его скорость, почему ось вращенія и названа *мгновенною*. Ось составной пары g этихъ силъ перпендикулярна и къ оси пары G и къ оси мгновенной, и самая пара $g = \Theta G \sin i$; она-то, дѣйствуя ускорительно, союзныя пары Ap, Bq, Cr превращаетъ въ $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$; слѣд. эти выраженія представляютъ собственно пары, на которыя g разлагается по осямъ x-въ, y-въ, z-въ, такъ что если чрезъ (g, X), (g, Y), (g, Z) изобразимъ углы, составляемые осью пары g съ осями координатъ, то получимъ

$$\cos(g, X) = \frac{A\frac{dp}{dt}}{g},\ \cos(g, Y) = \frac{B\frac{dq}{dt}}{g},\ \cos(g, Z) = \frac{C\frac{dr}{dt}}{g}.$$

Нетрудно понять, что здѣсь простота, ясность и краткость вывода происходятъ отъ того, что не требуется объясненія значеній количествъ p, q, r, которыя во всѣхъ другихъ способахъ сперва представляются какъ произвольные сократительные знаки алгебраическихъ формулъ, и потомъ уже особымъ пріемомъ доказывается, что они выражаютъ союзныя скорости даннаго вращенія. Сверхъ того понимаемъ, что эти формулы суть необходимыя слѣдствія дѣйствій силъ средобѣжныхъ, когда вращеніе тѣла свободно отъ силъ постороннихъ. Но какія бы ни были эти послѣднія силы X, Y, Z, онѣ даютъ три пары, которыя, будучи приложены соотвѣтственно къ найденнымъ уравненіямъ, дополняютъ ихъ общность, превращая ихъ въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + \int(Zy - Yz),\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)pr + \int(Xz - Zx),\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + \int(Yx - Xy), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\mathrm{A}),$$

гдѣ подразумѣвается, что знакъ $\int$ относится ко всей массѣ тѣла, подлежащаго дѣйствію постороннихъ силъ X, Y, Z.

(17). Этотъ синтезисъ, какъ за руку, ведетъ къ окончательному рѣшенію вопроса и освѣщаетъ извѣстныя уже и всѣми принятыя рѣшенія, хотя въ нихъ трудно понимать цѣль употребляемыхъ вычисленій. Дѣйствительно, когда разсудимъ, что вращеніе, производимое парою G, совершается около оси, которой положеніе перемѣняется отъ силъ постороннихъ; тогда поймемъ, что ея положеніе надобно представить въ общихъ выраженіяхъ; а эти общія выраженія положенія линіи въ пространствѣ могутъ быть полу-

---

Но какъ уголъ (g, G) есть прямой, то

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0. \ldots(\mathrm{I}).$$

Съ другой стороны, пара G производитъ вращеніе θ около мгновенной оси, составляющей съ осями координатъ углы, которыхъ косинусы суть $\frac{p}{\theta}$, $\frac{q}{\theta}$, $\frac{r}{\theta}$, и какъ уголъ между этой осью и осью пары g есть также прямой; то

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0 \ldots.(\mathrm{II}).$$

Наконецъ величина самой пары g выражается чрезъ

$$g^2 = A^2\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + B^2\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + C^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \theta^2G^2(1 - \cos^2\theta),$$

изчего выходитъ третье общее уравненіе вращенія тѣлъ

$$A^2\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + B^2\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + C^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (A-B)^2p^2q^2 + (A-C)^2p^2r^2 + (B-C)^2q^2r^2 \ldots.(\mathrm{III}).$$

Теперь, для опредѣленія количествъ $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$, стоитъ только изъ урав. (II) и (III) вывести

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(B-C)C}{(A-B)A}\cdot\frac{r}{p}\cdot\frac{dr}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{(A-C)C}{(A-B)B}\cdot\frac{r}{q}\cdot\frac{dr}{dt},$$

и величины эти вставить въ урав. (III).

чены только изъ отношенія координатъ этой оси съ углами, составляемыми ею съ осями координатъ, такъ что слѣдующія уравненія представляются сами собою:

$$py - qx = 0,\ rx - pz = 0,\ qz - ry = 0 \ldots . (m).$$

Съ другой стороны, леммы Поэнсо (чл. 3) научаютъ, что дѣйствіе ускорительныхъ паръ перемѣщаетъ пересѣченіе плоскости XY съ какого нибудь неподвижною плоскостью; слѣд. надобно знать, въ какой связи находятся p, q, r съ этимъ перемѣщеніемъ, — чего нельзя узнать безъ выраженія величинъ p, q, r посредствомъ угловъ между осями x-въ, y-въ и z-въ и другими неподвижными осями x'-въ, y'-въ, z'-въ, также прямоугольными и отнесенными къ неподвижной плоскости. Такимъ образомъ открывается необходимость въ преобразованіи координатъ, котораго употребленіе Поэнсо рѣшительно не одобряетъ; но его мнѣнія нельзя принять безусловно; оно справедливо, если преобразованіе координатъ не требуется вопросомъ; здѣсь же очевидны и его необходимость и его цѣль, и потому беремъ общія формулы

$$\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z, \end{aligned}$$

въ которыхъ коэффиціенты связываются условіями

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{array}\right\} \ldots . (\alpha).$$

Чтобъ эти уравненія, принадлежащія ко всякимъ точкамъ въ пространствѣ, относились именно къ мгновенной оси, они должны удовлетворять тому объ ней понятію, что ея положеніе измѣняется по истеченіи каждаго мгновенія, и это понятіе можетъ быть выражено алгебраически только слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{array}{l} x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt} = 0, \\ x\frac{db}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{db''}{dt} = 0, \\ x\frac{dc}{dt} + y\frac{dc'}{dt} + z\frac{dc''}{dt} = 0, \end{array}\right\} \ldots . (\beta).$$

Но какъ эти выраженія принадлежатъ тойже линіи, которая *характеризована* уравненіями (m); то исключая изъ нихъ каждую изъ трехъ координатъ, должно получить уравненія, тожественныя съ (m). Такое исключеніе даетъ

$$\frac{a'da' + b'db' + c''dc'}{dt} y - \frac{ada'' + bdb'' + cdc''}{dt} x = 0,$$

$$\frac{a'da + b'db + c'dc}{dt} x - \frac{a''da' + b'db' + c''dc'}{dt} z = 0,$$

и потому

$$\left.\begin{aligned} pdt &= a''da' + b''db' + c''dc', \\ qdt &= ada'' + bdb'' + cdc'', \\ rdt &= a'da + b'db + c'dc. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\gamma).$$

Такимъ образомъ уравненія (*A*) и (γ) представляютъ общее алгебраическое рѣшеніе вопроса о вращеніи тѣлъ; но для полнаго уразумѣнія смысла уравненій (γ), надобно выразить ихъ геометрически. Этотъ *переводъ* есть дѣло простѣйшаго вычисленія: если упомянутую линію пересѣченія плоскостей XY и $X'Y'$ назовемъ OV, и положимъ уг. $VOX' = \psi$, уг. $VOX = \varphi$, и уголъ между плоскостями XY и $X'Y'$ изобразимъ чрезъ ω; то увидимъ, что

$$a = \sin\psi\sin\varphi\cos\omega + \cos\psi\cos\varphi, \quad b = -\cos\psi\sin\varphi\cos\omega + \sin\psi\cos\varphi,$$
$$c = -\sin\varphi\sin\omega;$$
$$a' = -\cos\varphi\sin\psi\cos\omega + \sin\varphi\cos\psi, \quad b' = \cos\varphi\cos\psi\cos\omega + \sin\varphi\sin\psi,$$
$$c' = \cos\varphi\sin\omega;$$
$$a'' = \sin\psi\sin\omega, \quad b'' = -\cos\psi\sin\omega, \quad c'' = \cos\omega,$$

и потомъ

$$\left.\begin{aligned} pdt &= \cos\varphi d\omega - \sin\varphi\sin\omega d\psi, \\ qdt &= \sin\varphi d\omega + \cos\varphi\sin\omega d\varphi, \\ rdt &= \cos\omega d\psi - d\varphi, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\delta),$$

изчего наконецъ

$$\left.\begin{aligned} d\omega &= (p\cos\varphi + q\sin\varphi)\,dt, \\ \sin\omega d\psi &= (q\cos\varphi - p\sin\varphi)\,dt, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\text{B}).$$

(18) Теперь общія формулы (*A*) и (*B*) приложимъ въ обращенію Земли, на которую дѣйствуетъ притягивающее тѣло *S*, опредѣляемое координатами x_1, y_1, z_1 относительно главныхъ осей *x*-въ, *y*-въ, *z*-въ.

Если вторые члены вторыхъ частей уравненій (*A*) сравнимъ съ парами *L*, *M*, *N*, составленными въ чл. 7; то найдемъ

$$f(Zy - Yz) = -M = \frac{3S.Te^2}{5\rho'^5} z_1 y_1,$$
$$f(Xz - Zx) = -N = -\frac{3S.Te^2}{5\rho'^5} x_1 z_1,$$
$$f(Yx - Xy) = -L = 0.$$

Здѣсь ρ' означаетъ разстояніе между центромъ Земли и центромъ свѣтила *S*. Хотя нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что Земля не имѣетъ правильной геометрической фигуры, однако относительно Луны и Солнца, безъ всякой погрѣшности, можно, какъ сдѣлано было выше, принимать ее за эллипсоидъ, образованный обращеніемъ около ея меньшой оси, лежащей на оси *z*-въ, и потому $A = B$; слѣд. третье урав. (*A*) показываетъ, что *r*

есть постоянное количество, — что согласно съ чл. 6. Отсюда, вмѣсто трехъ уравненій, получимъ только два

$$Adp + (C - A)\,q\,.\,rdt = \frac{3S.Te^2}{5\rho'^5} z_1 y_1 dt,$$

$$Adq + (A - C)\,p\,.\,rdt = -\frac{3S.Te^2}{5\rho'^5} z_1 x_1 dt,$$

изъ которыхъ и изъ урав. (B) выходятъ уже общія выраженія предваренія равноденствій и колебанія земной оси; но прежде надобно замѣтить слѣдующее: въ чл. 6 объяснено, что ось вращенія и ось фигуры Земли составляютъ между собою весьма малый уголъ, никогда не увеличивающійся, и котораго синусъ есть

$$\frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{\theta};$$

слѣд. p и q суть столь малыя количества, что можемъ опускать члены, въ которые входятъ они или какъ произведенія или какъ вторыя степени, и потому нетрудно увѣриться, что

$$rdt = -d\varphi.$$

Послѣ этого простѣйшее вычисленіе даетъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{3S.Te^2}{5\rho'^5}\cdot\frac{1}{Cr\sin\omega} z_1 (y_1\cos\varphi - x_1\sin\varphi),\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3S.Te^2}{5\rho'^5}\cdot\frac{1}{Cr} z_1 (y_1\sin\varphi + x_1\cos\varphi). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\mathrm{F}).$$

(19). Само собою очевидно, что въ этихъ формулахъ надобно ординаты x_1, y_1, z_1 выразить въ функціяхъ угловъ φ, ω, ψ, почему предполагаемъ, что положеніе центра свѣтила S опредѣляется координатами x_1', y_1', z_1' относительно осей x'-въ, y'-въ, z'-въ, и беремъ извѣсныя формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= X\cos\varphi + (Y\cos\omega - z_1'\sin\omega)\sin\varphi,\\ y_1 &= X\sin\varphi - (Y\cos\omega - z_1'\sin\omega)\cos\varphi,\\ z_1 &= Y\sin\omega + z_1'\cos\omega, \end{aligned}$$

гдѣ

$$X = x_1'\cos\psi + y_1'\sin\psi,\quad Y = x_1'\sin\psi - y_1'\cos\psi;$$

находимъ

$$\begin{aligned} y_1\cos\varphi - x_1\sin\varphi &= -(Y\cos\omega - z_1'\sin\omega)\\ y_1\sin\varphi + x_1\cos\varphi &= X, \end{aligned}$$

такъ что уголъ φ исключается самымъ вычисленіемъ; слѣд. наконецъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3S.Te^2}{5\rho'^5}\cdot\frac{1}{Cr\sin\omega}[(Y^2 - z_1'^2)\sin\omega\cos\omega + z_1' Y\cos 2\omega],\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3S.Te^2}{5\rho'^5}\cdot\frac{1}{Cr} X(Y\sin\omega + z_1'\cos\omega), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\mathrm{F}').$$

Если читатель потрудится сравнить этотъ выводъ формулъ (F') съ изслѣдованіями Пуассона, въ VIII томѣ «Журнала Политехнической школы» (стр. 337 и слѣд.); то ясно

усмотритъ превосходство новаго способа, исключающаго множество вспомогательныхъ вычисленій и не совсѣмъ убѣдительныя причины отбрасыванія членовъ, помножаемыхъ на $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$.

(20). Если неподвижная плоскость, на которой взяты оси x'-въ, y'-въ, z'-въ, есть эклиптика; то орбита свѣтила S всегда составляетъ съ нею такой малый уголъ i, что можно ограничиваться членами только перваго и втораго порядка относительно этого угла. Когда долготу узла орбиты S изобразимъ чрезъ α, чрезъ l и λ — долготу и широту S, считая долготы отъ оси x'-въ, и когда примемъ, что S есть Солнце; тогда найдемъ

$$Y^2 - z_1'^2 = \tfrac{1}{2}a^2[1 - \cos 2(mt + E + \psi)],\quad z_1'Y = \tfrac{1}{2}\alpha^2 i\cos(\psi + \alpha),$$
$$XY = \tfrac{1}{2}a^2\sin 2(mt + E + \psi),\quad z_1'X = -\tfrac{1}{2}a^2 i\sin(\alpha + \psi),$$

гдѣ a есть среднее разстояніе Солнца отъ Земли, f — эксцентрицитетъ его видимой орбиты, m — среднее видимое движеніе Солнца и E — долгота его въ эпоху. Притомъ извѣстно, что моментъ косности C относительно меньшой главной оси эллипсоида есть $\frac{2}{5}Tb^2$; слѣд.

$$\frac{3S.Te^2}{5\rho^2 C} = \frac{3Se^2}{2a^3a^2b^2},$$

и

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3Se^2}{8a^3b^2}\cdot\frac{1}{r\sin\omega}\left\{\sin 2\omega - \sin 2\omega\cos 2(mt + E + \psi) + 2i\cos 2\omega\cos(\psi + \alpha)\right\},$$
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3Se^2}{4ra^3b^2}\left\{\sin\omega\sin 2(mt + E + \psi) - i\cos\omega\sin(\alpha + \psi)\right\}.$$

Здѣсь

$$i\sin(\alpha + \psi) = i\sin\alpha\cos\psi + i\cos\alpha\sin\psi,$$

и какъ въ «Вѣковыхъ возмущеніяхъ большихъ планетъ» на стр. 65, доказано, что

$$i\sin\alpha = \Sigma M\sin(gt + \beta),\ i\cos\alpha = \Sigma M\cos(gt + \beta),$$

при весьма малыхъ коеффиціентахъ M; то

$$i\cos(\alpha + \psi) = \Sigma M\cos(gt + \beta + \psi),$$
$$i\sin(\alpha + \psi) = \Sigma M\sin(gt + \beta + \psi),$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3Se^2}{8ra^3b^2\sin\omega}\left\{\sin 2\omega - \sin 2\omega\cos 2(mt + E + \psi) + 2\cos 2\omega\Sigma M\cos(gt + \beta + \psi)\right\}\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3Se^2}{4ra^3b^2}\left\{\sin\omega\sin 2(mt + E + \psi) - \cos\omega\Sigma M\sin(gt + \beta + \psi)\right\}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (\mathrm{K}).$$

(21). Когда свѣтило S есть Луна, тогда вмѣсто долготы l надобно взять $m't + E' - \frac{1}{4}i'^2\sin 2(m't + E' - \alpha')$, и оттого выйдетъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3Le^2}{8a^2b^2r\sin\omega}\left\{\sin 2\omega - \cos 2(m't + E' + \psi)\sin 2\omega - \tfrac{1}{2}i'^2\cos 2(\alpha' + \psi)\sin 2\omega\right.\\ &\qquad\left. + 2i'\cos(\alpha' + \psi)\cos 2\omega\right\},\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3Le^2}{4ra'^3b^2}\left\{\sin 2(m't + E' + \psi)\sin\omega + \tfrac{1}{2}i'^2\sin 2(\alpha' + \psi)\sin\omega - i\sin(\alpha' + \psi)\cos\omega\right\}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (\mathrm{L}).$$

Въ этихъ формулахъ измѣняющійся уголъ i' перемѣняется на постоянное среднее наклоненіе i_1 лунной орбиты къ подвижной эклиптикѣ по формуламъ

$$i'\sin(\alpha'+\psi) = \operatorname{tang} i_1 \sin(g't+\beta') + \Sigma M \sin(gt+\beta+\psi),$$
$$i'\cos(\alpha'+\psi) = \operatorname{tang} i_1 \cos(g't+\beta') + \Sigma M \cos(gt+\beta+\psi),$$

и

$$i'^2 \sin 2(\alpha'+\psi) = \operatorname{tang}^2 i_1 \sin 2(g't+\beta'),$$
$$i'^2 \cos 2(\alpha'+\psi) = \operatorname{tang}^2 i_1 \cos 2(g't+\beta'),$$

И такъ формулы (L) превратятся въ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3Le^2}{8a'^3b^2r\sin\omega}\Big\{\sin 2\omega - \cos 2(m't+E'+\psi)\sin 2\omega - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2 i_1 \cos(g't+\beta')\sin 2\omega \\ &\qquad + 2\cos 2\omega \operatorname{tang} i_1 \cos(g't+\beta') + 2\cos 2\omega \Sigma M \cos(gt+\beta+\psi)\Big\},\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3Le^2}{4ra'^3b^2}\Big\{\sin 2(m't+E'+\psi)\sin\omega + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2 i_1 \sin 2(g't+\beta')\sin\omega \\ &\qquad - \operatorname{tang} i_1 \sin(g't+\beta')\cos\omega - \cos\omega \Sigma M \sin(gt+\beta+\psi)\Big\}.\end{aligned}\right\} \ldots (L').$$

(22). Согласно съ членами 11 и 13, въ формулахъ (K) и (L')

$$\frac{S}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{T_1^2}\right),\ \frac{L}{a'^3} = \gamma\left(\frac{2\pi}{T_1^2}\right)^2;$$

слѣд. эти формулы можно соединить въ двѣ пары формулъ, изъ которыхъ въ одной собираются члены вѣковые, въ другой же — періодическіе:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{e^2}{b^2}\left(\frac{2\pi}{T_1^2}\right)^2(1+\gamma)\cos\omega\,\Sigma M\sin(gt+\beta+\psi),\\ \frac{d\psi}{dt} &= -\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{e^2}{b^2}\left(\frac{2\pi}{T_1^2}\right)^2(1+\gamma)\left\{\cos\omega + \frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}\Sigma M\cos(gt+\beta+\psi)\right\}\end{aligned}\right\} \ldots . (I).$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{e^2}{b^2}\left(\frac{2\pi}{T_1^2}\right)^2\Big\{\gamma\operatorname{tang} i_1\sin(g't+\beta')\cos\omega - \tfrac{1}{2}\gamma\sin\omega\operatorname{tang}^2 i_1\sin 2(g't+\beta')\\ &\qquad - \sin\omega\,[\sin 2(mt+E+\psi) + \gamma\sin 2(m't+E'+\psi)]\Big\},\\ \frac{d\psi}{dt} &= -\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{e^2}{b^2}\left(\frac{2\pi}{T_1^2}\right)^2\Big\{\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}\gamma\operatorname{tang} i_1\cos(g't+\beta') - \tfrac{1}{2}\gamma\operatorname{tang}^2 i_1\cos 2(g't+\beta')\cos\omega\\ &\qquad - \cos\omega\,[\cos 2(mt+E+\psi) + \gamma\cos 2(m't+E'+\psi)]\Big\}\end{aligned}\right\} \ldots (II).$$

(23). По чл. 10 и 13, среднее лунносолнечное предвареніе равноденствій въ звѣздныя сутки есть

$$h = \frac{3\pi}{306T_1^2}(1+\gamma)\cos\omega_0 - \frac{9\gamma\cos\omega_0}{612T_1^2}\sin^2 i_1,$$

гдѣ ω_0 соотвѣтствуетъ началу 1800 г., и второй членъ $= 0''{,}0011$; слѣд. можемъ принять

$$h = \frac{3\pi}{306T_1^2}(1+\gamma)\cos\omega_0,\ hT'' = h' = 50''{,}41699.$$

Когда звѣздныя сутки считаются единицею времени, тогда $r = 2\pi_1$ и какъ направленіе обращенія земли противоположно h', то первая формула (1) превратится въ

$$\frac{d\omega}{dt} = h'\Sigma M\sin(bt+\beta),$$

гдѣ $b = g + h'$; отсюда

$$\omega = c - \frac{h'}{b}\Sigma M\cos(bt+\beta),\quad c = \omega_0 + \frac{h'}{b}\Sigma M\cos\beta,$$

и

$$\omega = \omega_0 + h't\Sigma M\sin\beta + \tfrac{1}{2}t^2.h'(\Sigma Mg\cos\beta + h'\Sigma M\cos\beta).$$

По формуламъ «Вѣковыхъ возмущенiй» $\Sigma M\cos\beta = 0, \Sigma M\sin\beta = 0, \Sigma Mg\cos\beta = 0''{,}0353598$; слѣд.

$$\omega = \omega_0 + 0''{,}000004321 45t^2. \ldots .(a),$$

гдѣ t означаетъ число тропическихъ годовъ отъ 1800 г.

По тѣмъ же причинамъ, вторая формула (I) превращается въ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\cos\omega}{\cos\omega_0}h' + \frac{h'\cos 2\omega}{\cos\omega_0\sin\omega}\Sigma M\cos(bt+\beta).$$

Вставивъ сюда величины $\frac{\cos\omega}{\cos\omega_0}$ и $\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}$, получимъ

$$\frac{d\psi}{dt} = h' + h'\operatorname{cotg}\omega_0(1 + \frac{h'-b}{b}\tan g^2\omega_0)\Sigma M\cos(bt+\beta) - \frac{h'^2}{b}\tan g\,\omega_0\Sigma M\cos\beta,$$

и

$$\psi = c' + h't + \frac{h'}{b}\operatorname{cotg}\omega_0(1 + \frac{h'-b}{b}\tan g^2\omega_0)\Sigma M\sin(bt+\beta) - \frac{h'^2}{b}t.\tan g\,\omega_0\Sigma M\cos\beta,$$

гдѣ

$$c' = -\frac{h'}{b}\operatorname{cotg}\omega_0(1 + \frac{h'-b}{b}\tan g^2\omega_0)\Sigma M\sin\beta;$$

слѣд.

$$\psi = h't + \frac{h'}{b}\operatorname{cotg}\omega_0(1 + \frac{h'-b}{b}\tan g^2\omega_0)\Sigma M[\sin(bt+\beta) - \sin\beta] - \frac{h'^2}{b}t.\tan g\,\omega_0\Sigma M\cos\beta,$$

или

$$\psi = h't - t^2.h'\operatorname{cotg}2\,\omega_0\Sigma Mg\sin\beta,$$

гдѣ $\Sigma Mg\sin\beta = 0''{,}4738036$. И такъ

$$\psi = 50''{,}41699t - 0''{,}00010826t^2. \ldots .(b).$$

(24). Формулы (a) и (b) представляютъ вѣковыя измѣненiя наклоненiя неподвижной эклиптики и на ней такiяже измѣненiя предваренiя равноденствій; но для Астрономiи также необходимы измѣненiя тѣхъ же количествъ на эклиптикѣ подвижной: этому требованiю удовлетворено въ «Возмущенiяхъ большихъ планетъ» на стр. 68; но тамъ было принято $h' = 50''{,}24127$, и потому слѣдовало передѣлать вычисленiе съ новою величиною h'. По формулѣ

$$\delta\omega = q'' = \Sigma M\cos(g't+\beta) = -t\Sigma Mg'\sin\beta - \tfrac{1}{2}t^2\Sigma Mg'^2\cos\beta,$$

въ которой $g' = g + h'$, вычислено

$$\omega = \omega_0 - 0''{,}473803t - 0''{,}0000043 07t^2. \ldots .(c).$$

Въ томъ же разсужденiи и на тойже страницѣ видимъ, что

$$\psi' = \psi - \operatorname{cotg}\omega_0.\Sigma M\sin(\beta + g't),$$

или

$$\psi' = (50''{,}41699 - \operatorname{cotg}\omega_0 \Sigma Mg' \cos\beta)\,t - (0''{,}00010826 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\omega_0 \Sigma Mg'^2 \sin\beta)\,t^2,$$

и по вычисленію

$$\psi' = 50''{,}33551\,t + 0''{,}00011387\,t^2 \ldots . (d).$$

Наконецъ опять тамъ же доказано, что

$$\delta\rho = \frac{\Sigma M \sin(g't+\beta)}{\sin\omega_0};$$

но какъ

$$\Sigma M \sin(g't+\beta) = \frac{\psi - \psi'}{\operatorname{cotg}\omega_0};$$

то такъ называемое *движеніе по прямому-восхожденію* будетъ

$$\xi = \frac{\psi - \psi'}{\cos\omega_0} \ldots . (e).$$

(25). Интегрированіе формулъ (II) не требуетъ никакихъ объясненій, и тотчасъ находимъ

$$\omega = -\frac{\gamma h' \operatorname{tang} i_1}{g'(1+\gamma)}\cos N + \frac{gh' \operatorname{tang}\omega_0 \operatorname{tang}^2 i_1}{4g'(1+\gamma)}\cos 2N + \frac{h' \operatorname{tang}\omega_0}{2(1+\gamma)(m'+h')}\cos 2\odot + \frac{\gamma h' \operatorname{tang}\omega_0}{2(1+\gamma)(m'+h')}\cos 2\mathbb{C},$$

$$\psi = \frac{2h'\gamma \operatorname{tang} i_1 \operatorname{cotg} 2\omega_0}{g'(1+\gamma)}\sin N - \frac{\gamma h' \operatorname{tang}^2 i_1}{4g'(1+\gamma)}\sin 2N - \frac{h'}{2(1+\gamma)(m+h')}\sin 2\odot - \frac{\gamma h'}{2(1+\gamma)(m'+h')}\sin 2\mathbb{C},$$

гдѣ N, $\odot$, $\mathbb{C}$ означаютъ долготы луннаго узла, Солнца и Луны. Но какъ $g' = -(19°21'21'')$ $m = 359°98599$, $m' = 4812°6647$, $1+\gamma = 3{,}19539$, и $i_1 = 5°8'48''$; то

$$\omega = 9''{,}235260\cos N - 0''{,}090269\cos 2N + 0''{,}545017\cos 2\odot + 0''{,}089504\cos 2\mathbb{C} \ldots . (f),$$
$$(0{,}9654492) \qquad (\bar{2}{,}9555389) \qquad (\bar{1}{,}7364099) \qquad (\bar{2}{,}9518465)$$

$$\psi = -17''{,}266280\sin N + 0''{,}207952\sin 2N - 1''{,}255550\sin 2\odot - 0''{,}206191\sin 2\mathbb{C} \ldots . (g).$$
$$(1{,}2371987) \qquad (\bar{1}{,}3179629) \qquad (0{,}0988339) \qquad (\bar{1}{,}3142708)$$

Относительно коеффиціента $9''{,}23526$ не излишне замѣтить, что г. Леверрье, во второмъ томѣ «Лѣтописей Парижской Обсерваторіи» для луннаго колебанія принимаетъ $9''{,}23$, т. е. именно то число, которое здѣсь найдено въ предположеніи $h' = 50''{,}41699$. Г. Леверрье, принимая этотъ коеффиціентъ, прибавляетъ, что «такъ показываютъ наблюденія» но, къ сожалѣнью, онъ не приводитъ ни одного изъ нихъ и даже не упоминаетъ объ именахъ наблюдателей.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стр.	строка.	*Напечатано:*	*должно читать:*
1	27	толко	только
2	17	исвѣщающими	освѣщающими
—	19	вращевія	вращенія
—	33	*поклоненія*	*наклоненія*
3	17	движенія линія	движеніе линіи
—	35	опредѣленіа	опредѣленія
5	21	не	ни
6	20	существовало	существовали
7	17	линеи	линіи
—	21	прекрищается	прекращается
—	30	линеи	линіи
8	17	*Земли*	*Земли*

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 9.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS

CONCERNANT

LES INTÉGRALES ORDINAIRES ET LES INTÉGRALES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

PAR

V. Bouniakowsky,
Membre de l'Académie.

Lu le 29 avril 1859.

ST.-PÉTERSBOURG, 1859.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg	à Riga	à Leipzig
MM. Eggers et Comp.,	M. Samuel Schmidt,	M. Léopold Voss.

Prix: 25 Kop. = 8 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Juillet 1859.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS

CONCERNANT

LES INTÉGRALES ORDINAIRES ET LES INTÉGRALES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

Par **V. Bouniakowsky.**

La considération des *moyennes arithmétiques* des fonctions d'une ou de plusieurs variables qui varient par degrès insensibles conduit au Calcul Intégral de la manière la plus naturelle, la plus élégante et la plus satisfaisante sous le rapport de la clarté. Dans un grand nombre d'applications de l'Analyse transcendante, ce point de vue facilite considérablement la conception des relations qui existent entre les diverses données de la question, comme on en peut citer beaucoup d'exemples, entr'autres dans la Théorie des Probabilités*).

Avant d'entrer en matière je rappellerai qu'en désignant par $f(x)$ une fonction continue pour toutes les valeurs de la variable x depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on aura

$$\overset{X}{\underset{x_0}{M}} f(x) = \frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{X - x_0}, \qquad (1)$$

la notation $\overset{X}{\underset{x_0}{M}} f(x)$ représentant *la moyenne arithmétique* de la fonction $f(x)$ relativement à toutes les valeurs de la variable continue x comprises entre les limites $x = x_0$ inclusivement, et $x = X$ exclusivement. La relation (1) conduit ensuite, de la manière la plus simple, à toutes les propriétés générales des intégrales tant définies qu'indéfinies.

1. Au lieu de considérer les *moyennes arithmétiques* comme celles dont il a été question plus haut, et que nous appellerons pour abréger *continues*, on pourrait traiter directement d'autres moyennes, comme, par exemple, les *moyennes géométriques*, *harmoniques* etc.; on arriverait de cette façon à des relations qui subsistent entre celles-ci et la moyenne arithmétique. Ainsi, on pourra exprimer, au moyen des intégrales définies, une moyenne quelconque d'une fonction donnée qui varie d'une manière continue. Si,

*) Voyez à ce sujet mon *Traité du Calcul des Probabilités.* (Основанія Математической Теоріи Вѣроятностей, 1846 г.)

par exemple, il s'agissait de déterminer la *moyenne géométrique* de la fonction continue $f(x)$, la variable x étant comprise entre les limites $x = x_0$ et $x = X$, on pourrait s'y prendre de la manière suivante, extrêmement simple. En observant que

$$\log . \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_n}{n},$$

on conclut que *le logarithme de la moyenne géométrique est égale à la moyenne arithmétique des logarithmes.*

Si l'on admet actuellement que les nombres $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ représentent les valeurs successives de la fonction $f(x)$, x variant d'une manière continue depuis x_0 jusqu'à X, et que toutes ces valeurs soient positives, la proposition qui vient d'être énoncée pourra se traduire par la formule

$$\textbf{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \log . \overset{X}{\underset{x_0}{G}} f(x) = \overset{X}{\underset{x_0}{M}} \log f(x),$$

la notation $\overset{X}{\underset{x_0}{G}} f(x)$ désignant la *moyenne géométrique* de $f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. Par suite, en vertu de la formule (1), on a

$$\log . \overset{X}{\underset{x_0}{G}} f(x) = \frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx}{X - x_0},$$

d'où l'on tire définitivement

$$\textbf{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{X}{\underset{x_0}{G}} f(x) = e^{\frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx}{X - x_0}}.$$

Observons actuellement que comme la *moyenne arithmétique surpasse la moyenne géométrique*, il s'en suivra que

$$\frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx}{X - x_0} > e^{\frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx}{X - x_0}},$$

ou bien

$$\textbf{(A)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx < (X - x_0) \log \left(\frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx}{X - x_0} \right).$$

Dans tout ce qui suivra nous supposerons toujours que la fonction que l'on considère est continue et positive entre les limites admises, et que $X > x_0$.

Avant de passer aux applications de l'inégalité (A), nous établirons quelques autres formules analogues. Commençons par la considération des *moyennes harmoniques*. Nous appellerons *moyenne harmonique* des nombres $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ l'expression

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)};$$

or, on sait que *cette moyenne est inférieure à la moyenne géométrique des nombres* $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, en sorte que l'on a

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)}.$$

On vérifie de suite cette inégalité en lui donnant la forme

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} > \left(\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

sous laquelle on retombe sur la relation bien connue entre la *moyenne arithmétique* et la *moyenne géométrique* des nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n}$.

Si l'on suppose que $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ représentent les valeurs successives de la fonction continue $f(x)$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on aura

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} = \underset{x_0}{\overset{X}{M}}\frac{1}{f(x)} = \frac{\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{f(x)}}{X-x_0},$$

et comme de plus la valeur de la moyenne géométrique

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

dans la même hypothèse, est égale à

$$e^{\frac{\int_{x_0}^{X}\log f(x)\,dx}{X-x_0}},$$

on aura la formule

$$\int_{x_0}^{X}\log f(x)\,dx > (X-x_0)\log\left(\frac{X-x_0}{\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{f(x)}}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(B)}$$

Observons bien que les deux inégalités (A) et (B) donnent deux limites, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*, de l'intégrale $\int_{x_0}^{X}\log f(x)\,dx$, exprimées au moyen de $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ et $\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{f(x)}$. Plus bas, nous ferons usage de ces formules, auxquelles on pourrait aussi donner la forme suivante:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx < (X-x_0)\log\left(\frac{\int_{x_0}^{X} e^{f(x)}\,dx}{X-x_0}\right),$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > (X-x_0)\log\left(\frac{X-x_0}{\int_{x_0}^{X} e^{-f(x)}\,dx}\right),$$

en faisant $f(x) = \log f(x)$.

*

Prenons encore la relation bien connue

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) > (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Si l'on suppose que les nombres a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ soient les valeurs successives de la fonction continue $\varphi(x)$ depuis $x = x_0$, jusqu'à $x = X$, et que b_1, b_2, $b_3 \ldots b_n$ représentent la suite des valeurs d'une autre fonction continue $\psi(x)$ entre les mêmes limites, l'inégalité précédente se trouvera remplacée par la suivante:

$$\textbf{(C)} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2 . dx . \int_{x_0}^{X} \psi(x)^2 . dx > \left(\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\psi(x)\, dx \right)^2,$$

De cette formule, qui se réduit à l'égalité pour $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$, λ étant une constante, on pourra déduire d'autres inégalités particulières. Ainsi, en supposant

$$\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)} = \sqrt{f(x)},$$

on obtient

$$\textbf{(D)} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx . \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)} > (X - x_0)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x) . \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \frac{1}{f(x)} > 1.$$

En faisant dans (C) $\psi(x) = 1$, on a cette autre formule

$$\textbf{(E)} \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx \right)^2 < (X - x_0) \int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2 . dx.$$

Il est d'ailleurs visible que toutes les inégalités que nous venons d'établir se transforment en *égalités* pour $X = x_0$, et qu'en général les deux membres diffèrent d'autant moins entr'eux, que la différence $X - x_0$ des limites est plus petite par rapport à chacune d'elles.

Les formules que nous venons de donner, et beaucoup d'autres qu'on obtiendrait par les mêmes principes, peuvent donner lieu à quelques applications intéressantes. Nous allons en donner quelques exemples.

2. Et d'abord des formules (A) et (B) on déduit très facilement la relation qui lie la fonction variée avec sa première dérivée. En effet, si l'on pose

$$\log f(x) = F'(x),$$

on aura

$$\int_{x_0}^{X} \log f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} e^{F'(x)}\,dx = (X - x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}} e^{F'(x)} = (X - x_0)\,e^{F'[x_0 + \lambda(X - x_0)]}$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)} = \int_{x_0}^{X} e^{-F'(x)}\,dx = (X - x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}} e^{-F'(x)} = (X - x_0)\,e^{-F'[x_0 + \lambda'(X - x_0)]},$$

les facteurs numériques λ et λ' étant tous deux compris entre 0 et 1, et correspondant respectivement aux *moyennes arithmétiques* des fonctions $e^{F'(x)}$ et $e^{-F'(x)}$. Dans cette hypothèse les formules (A) et (B) donnent

$$F(X) - F(x_0) < (X - x_0)\,F'[x_0 + \lambda(X - x_0)]$$

$$F(X) - F(x_0) > (X - x_0)\,F'[x_0 + \lambda'(X - x_0)].$$

Donc, puisque la fonction $F'(x)$ est supposée continue entre les limites x_0 et X, il se trouvera nécessairement un nombre θ, compris entre λ et λ' tel, que l'on aura

$$F(X) = F(x_0) + (X - x_0)\,F'[x_0 + \theta(X - x_0)]. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(4)}$$

Cette manière de parvenir à la relation (4) présente l'avantage de préciser, sous un certain point de vue, la fraction θ qui, comme nous venons de le voir, sera toujours comprise entre λ et λ', dont le sens est parfaitement défini *).

Pour donner une application numérique de la formule (4), soit

$$F'(x) = \log f(x) = \log(x^2) = 2\log x;$$

nous trouverons d'abord

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \frac{X^3 - x_0^3}{3} = (X - x_0)\,e^{2\log[x_0 + \lambda(X - x_0)]},$$

d'où, pour déterminer λ, on aura l'équation

$$[x_0 + \lambda(X - x_0)]^2 = \frac{X^2 + Xx_0 + x_0^2}{3}.$$

---

*) On peut observer que dans la formule (4) le nombre θ est précisément celui qui correspond à la *moyenne arithmétique continue* de la fonction $F'(x)$ entre les limites x_0 et X, c. à d. que l'on a

$$F'[x_0 + \theta(X - x_0)] = \underset{x_0}{\overset{X}{M}} F'(x).$$

Cette assertion devient évidente en faisant attention que

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} F'(x)\,dx = (X - x_0)\underset{x_0}{\overset{X}{M}} F'(x) = (X - x_0)\,F'[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

De la même manière on arrivera à l'égalité

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)} = \frac{X-x_0}{Xx_0} = (X-x_0)\,e^{-2\log[x_0+\lambda'(X-x_0)]},$$

qui donne

$$[x_0+\lambda'(X-x_0)]^2 = Xx_0.$$

De ces deux formules on tire de suite

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{X^2+Xx_0+x_0^2}-x_0}{X-x_0}$$

$$\lambda' = \frac{\sqrt{Xx_0}-x_0}{X-x_0}.$$

Quant à la fonction $F(x)$, on a

$$F(x) = \int \log(x^2)\,dx = 2x(\log x - 1),$$

de sorte que l'équation (4) devient

$$2X(\log X - 1) = 2x_0(\log x_0 - 1) + 2(X-x_0)\log[x_0+\theta(X-x_0)],$$

ou bien

$$\log X = \frac{x_0}{X}\log x_0 + \frac{X-x_0}{X} + \frac{X-x_0}{X}\log[x_0+\theta(X-x_0)],$$

θ étant compris entre les deux limites λ et λ', trouvées ci-dessus.

Si l'on avait, par exemple, $x_0 = 1$, $X = 10$, on trouverait

$$\lambda = \frac{\sqrt{37}-1}{9} = 0{,}5647\ldots,\quad \lambda' = \frac{\sqrt{10}-1}{9} = 0{,}2402\ldots.$$

et

$$\log 10 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10}\log(1+9\theta).$$

Le nombre θ, d'après ce que nous venons de voir, doit satisfaire aux conditions

$$\theta < 0{,}5647\ldots,\quad \theta > 0{,}2402\ldots.$$

Or, l'interpolation fournit

$$\theta = 0{,}4168\ldots,$$

nombre qui, en effet, se trouve compris entre $\lambda = 0{,}5647\ldots$ et $\lambda' = 0{,}2402\ldots$.

Soit encore la fonction transcendante

$$F(x) = \int \log\sin x\,.\,dx;$$

on aura

$$\int_{x_0}^{X} \sin x\, dx = \cos x_0 - \cos X = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \sin x = (X - x_0) \sin [x_0 + \lambda (X - x_0)]$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\sin x} = \log \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} X}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x_0} \right) = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \frac{1}{\sin x} = (X - x_0) \cdot \frac{1}{\sin [x_0 + \lambda' (X - x_0)]}$$

$$F'(x) = \log \sin x.$$

Des deux premières équations on tire

$$\lambda = \frac{\operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\cos x_0 - \cos X}{X - x_0} \right) - x_0}{X - x_0}$$

$$\lambda' = \frac{\operatorname{arc\,sin} \left(\frac{X - x_0}{\log \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} X}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x_0} \right)} \right) - x_0}{X - x_0}.$$

Par conséquent

$$F(X) = F(x_0) + (X - x_0) \log \sin [x_0 + \theta (X - x_0)],$$

le nombre θ étant compris entre les limites λ et λ' qui viennent d'être déterminées.

3. Établissons actuellement quelques inégalités curieuses qui subsistent entre des fonctions transcendantes.

Si l'on suppose dans la formule (A) $f(x) = e^x$, on obtient

$$\frac{e^X - e^{x_0}}{X - x_0} > e^{\frac{X + x_0}{2}},$$

ou bien, en représentant par λ la quantité positive $\frac{X + x_0}{2}$,

$$e^{\lambda} - e^{-\lambda} > 2\lambda,$$

inégalité que l'on vérifie directement en développant en séries les deux exponentielles.

Supposons encore, dans la même formule (A), $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; on obtiendra

$$\int_{x_0}^{X} e^{\frac{1}{x}} dx > (X - x_0) \left(\frac{X}{x_0} \right)^{\frac{1}{X - x_0}};$$

on aura donc ainsi la *limite inférieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} e^{\frac{1}{x}} dx$. Si, en particulier, l'on prend $x_0 = 1$, $X = 2$, il viendra

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx > 2.$$

On obtiendra de la même manière la *limite inférieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} x^x dx$; en faisant $f(x) = x^x$, on a

$$\int_{x_0}^{X} x^x dx > (X - x_0) \cdot \frac{X^{\frac{X^2}{2(X-x_0)}}}{x_0^{\frac{x_0^2}{2(X-x_0)}}} \cdot e^{-\frac{X+x_0}{4}}.$$

Pour $x_0 = 1$, $X = \frac{3}{2}$, on trouve

$$\int_1^{\frac{3}{2}} x^x dx > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{9}{4}} \cdot e^{-\frac{5}{8}} = 0{,}6665\ldots,$$

valeur qui s'écarte peu de celle qu'on obtient pour cette intégrale par les méthodes ordinaires, et qui est

$$\int_1^{\frac{3}{2}} x^x dx = 0{,}6766\ldots.$$

Passons maintenant à quelques applications de la formule (B). En posant $f(x) = x$, on a

$$X(\log X - 1) - x_0(\log x_0 - 1) > (X - x_0) \log\left(\frac{X - x_0}{\log\left(\frac{X}{x_0}\right)}\right).$$

Supposons, comme plus haut, $x_0 = 1$, $X = 2$; nous aurons après quelques réductions très simples

$$\log(\log 16) > 1,$$

ce qui en effet est exact, car $\log 16 = 2{,}7725\ldots$, nombre qui surpasse la base des logarithmes néperiens $e = 2{,}7182\ldots$.

Faisons encore $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$; il viendra

$$\int_{x_0}^{X} e^{-\frac{1}{n}} dx > (X - x_0)\left(\frac{X}{x_0}\right)^{-\frac{1}{X - x_0}}.$$

Si l'on fait, par exemple, $x_0 = 1$, $X = 3$, on aura

$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{n}} dx > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Venons maintenant aux applications des formules (C) et (D). Si, dans la première d'entr'elles, on suppose

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \psi(x) = e^x,$$

on obtient

$$\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{X}\right)\left(\frac{e^{2X} - e^{2x_0}}{2}\right) > \left(\int_{x_0}^{X} \frac{e^x dx}{x}\right)^2;$$

de là on trouve pour la *limite supérieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} \frac{e^x\,dx}{x}$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{e^x\,dx}{x} < \sqrt{\frac{(X-x_0)(e^{2X}-e^{2x_0})}{2Xx_0}}.$$

Ainsi, pour $x_0 = 1$, $X = 2$, l'on aura

$$\int_1^2 \frac{e^x\,dx}{x} < \frac{e}{2}\sqrt{e^2-1} = 3{,}4351\ldots.$$

En faisant $f(x) = \log x$ dans la formule (D), on obtient une *limite inférieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\log x}$, connue sous la dénomination de fonction *logologarithmique* ou *hyperlogarithmique*, et qu'on déduit immédiatement de l'intégrale $\int \frac{e^x\,dx}{x}$ en remplaçant la variable x par son logarithme. On aura

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\log x} > \frac{(X-x_0)^2}{X\log X - x_0\log x_0 - (X-x_0)}.$$

Ainsi, en particulier, pour $x_0 = 2$, $X = 4$, on obtient

$$\int_2^4 \frac{dx}{\log x} > \frac{4}{3\log 4 - 2} = 1{,}853\ldots.$$

Si l'on calcule cette intégrale au moyen des séries, on la trouve un peu supérieure à 2.

La supposition de $f(x) = \frac{1}{x}$ et $X = \lambda x_0$, dans la même formule (D), conduit à l'inégalité

$$\log\lambda > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1}.$$

Quand λ différera peu de l'unité, $\log\lambda$ sera sensiblement égal à $\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1}$. Posons $\lambda = 1 + \frac{1}{\mu}$, μ étant très grand; on aura à fort-peu-près

$$\log(\mu+1) = \log\mu + \frac{2}{2\mu+1}.$$

Ainsi, pour $\mu = 100$, on obtient par cette formule

$$\log(101) = \log(100) + \frac{2}{201} = 4{,}61512043,$$

tandis que la vraie valeur de $\log(101)$ est 4,61512052.

Faisons encore $f(x) = e^x$; nous aurons

$$(e^X - e^{x_0})(e^{-x_0} - e^{-X}) > (X-x_0)^2,$$

ou bien

$$\frac{(e^X - e^{x_0})^2}{e^{X+x_0}} > (X-x_0)^2,$$

d'où l'on tire l'inégalité

$$\frac{e^X - e^{x_0}}{X - x_0} > e^{\frac{X + x_0}{2}},$$

trouvée plus haut en faisant usage de la formule (A). Si l'on pose $x_0 = \log a$, $X = \log b$, on obtient

$$\log b - \log a < \frac{b - a}{\sqrt{ab}}.$$

En faisant $a = 1$, on a

$$\log b < \sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}},$$

ce qui se réduit à

$$\log k < \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

en faisant $k^2 = b$. Pour k très peu différent de 1, on aura, à très-peu-près,

$$\log k = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right).$$

L'inégalité

$$\frac{e^X - e^{x_0}}{X - x_0} > e^{\frac{X + x_0}{2}}$$

donne aussi, en posant $x_0 = 0$, $X = 1$,

$$e > 1 + \sqrt{e}.$$

Voici quelques exemples pour les fonctions circulaires.

Si l'on fait dans (D) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$, $X = \frac{\pi}{6}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x . dx . \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \frac{\pi^2}{36},$$

et, en effectuant les intégrations,

$$9 + 2\sqrt{3} . \pi > 2\pi^2.$$

Posons encore, toujours dans la formule (D), $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x_0 = 0$, $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$; on trouvera

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - x^2} . dx . \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\pi^2 + 2\pi > 16, \text{ ou bien } \pi > -1 + \sqrt{17} = 3{,}123\ldots,$$

ce qui est exact, car la vraie valeur de π est égale à 3,141....

La supposition $f(x) = \sin x . \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $X = \frac{\pi}{4}$, conduit à l'inégalité

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x . \cos x . dx . \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x . \cos x} > \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2$$

qui, après les intégrations, se réduit à

$$9\sqrt{3} > \pi^2.$$

Or, comme l'on a $9\sqrt{3} = 9{,}8874\ldots$, et $\pi^2 = 9{,}8696\ldots$, la différence de ces nombres sera au-dessous de 0,018.

Nous pourrions varier ces exemples à l'infini; bornons nous à donner encore une application des deux formules (A) et (B) qui, simultanément, fournissent deux limites, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*, de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx$.

Supposons $f(x) = \operatorname{tang} x$; on aura pour les deux limites de la transcendante $\int_{x_0}^{X} \log \operatorname{tang} x . dx$ les expressions suivantes:

$$\int_{x_0}^{X} \log \operatorname{tang} x . dx < (X - x_0) \log \left\{ \frac{\log\left(\frac{\cos x_0}{\cos X}\right)}{X - x_0} \right\}$$

$$\int_{x_0}^{X} \log \operatorname{tang} x . dx > (X - x_0) \log \left\{ \frac{X - x_0}{\log\left(\frac{\sin X}{\sin x_0}\right)} \right\}$$

Si l'on suppose, par exemple, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $X = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$, on trouvera

$$\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin X = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos X = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};$$

par conséquent

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \log \operatorname{tang} x . dx < \frac{\pi}{6}\left[\log\left(6 \log(\sqrt{3}+1)\right) - \log \pi\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \log \operatorname{tang} x . dx > \frac{\pi}{6}\left[\log \pi - \log\left(6 \log(\sqrt{3}+1) - \log 2\right)\right].$$

En effectuant les calculs numériques indiqués dans ces deux expressions, on aura deux limites assez rapprochées de la transcendante en question, nommément

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \log \operatorname{tang} x . dx \begin{array}{l} < 0{,}3413\ldots. \\ > 0{,}2706\ldots. \end{array}$$

4. Faisons voir encore comment la formule (3) peut conduire à un caractère assez simple pour juger de la convergence d'une série. Avant tout, observons que si l'on a deux séries infinies

(5)..... $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_x + \ldots$ et

(6)..... $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_x + \ldots$

telles, que les termes v_1, v_2, $v_3 \ldots$ de la seconde soient compris entre ceux de la première, c. à d. que l'on ait

$$u_1 > v_1 > u_2 > v_2 > u_3 > v_3 > \ldots,$$

les séries (5) et (6) seront, visiblement, en même temps, ou toutes deux *convergentes*, ou toutes deux *divergentes*.

Prenons pour la série (6) la série bien connue

(7)..... $1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \ldots + \frac{1}{x^\rho} + \ldots$

convergente pour $\rho > 1$, et divergente pour $\rho \leqslant 1$, et formons la série (5) de manière à ce que ses termes consécutifs soient les *moyennes géométriques continues* que l'on obtient pour chaque couple

$$1 \text{ et } \frac{1}{2^\rho},\ \frac{1}{2^\rho} \text{ et } \frac{1}{3^\rho},\ \frac{1}{3^\rho} \text{ et } \frac{1}{4^\rho}, \ldots$$

des termes de la série (7). En vertu de la formule (3) on aura, pour déterminer le terme général u_x, l'équation suivante

$$e^{\int_{x-1}^{x} \log u_x . dx} = \frac{1}{x^\rho},$$

d'où l'on tirera

$$-\rho \log x = \int_{x-1}^{x} \log u_x . dx = \int_a^x \log u_x . dx - \int_a^{x-1} \log u_x . dx,$$

a étant un nombre entier quelconque. En différentiant, l'on trouve

$$-\frac{\rho}{x} = \log u_x - \log u_{x-1} = \log \frac{u_x}{u_{x-1}},$$

et enfin

$$u_x = u_{x-1} . e^{-\frac{\rho}{x}},$$

$$u_{x-1} = u_{x-2} . e^{-\frac{\rho}{x-1}}$$

$$u_{x-2} = u_{x-3} . e^{-\frac{\rho}{x-2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_3 = u_2 . e^{-\frac{\rho}{3}}$$

$$u_2 = u_1 . e^{-\frac{\rho}{2}}$$

Le produit de toutes ces équations donne

$$u_x = u_1 . e^{-\varphi(x)\rho}, \quad \text{(8)}$$

$\varphi(x)$ représentant, pour abréger, la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x} = \varphi(x). \quad \text{(9)}$$

Remarquons, en passant, que la formule (8) conduit à l'inégalité bien connue

$$\log x > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

En effet, supposons $u_1 = 1$; la série des moyennes géométriques (5), en vertu de la formule (8), deviendra

$$1 + \frac{1}{e^{\varphi(2)\rho}} + \frac{1}{e^{\varphi(3)\rho}} + \ldots + \frac{1}{e^{\varphi(x)\rho}} + \ldots \quad \text{(10)}$$

et l'on aura

$$\frac{1}{e^{\varphi(x)\rho}} > \frac{1}{x^\rho},$$

d'où

$$\log x > \varphi(x),$$

comme nous venons de le dire. Rappelons à cette occasion que, pour de très grandes valeurs de x, l'on a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = \log x + 0{,}577215\ldots,$$

ou bien

$$\log x = \varphi(x) + 0{,}422785\ldots.$$

Revenons maintenant à la règle sur la convergence des séries que nous nous sommes proposé d'établir. La série (10) est convergente pour toute valeur de ρ supérieure à 1, et divergente pour $\rho \leqq 1$. Soit une nouvelle série

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{x-1} + V_x + \ldots \quad \text{(11)}$$

On sait que si, pour des valeurs croissantes de x, le rapport $\frac{V_x}{V_{x-1}}$ reste constamment au-dessous du rapport analogue $\frac{u_{x-1}}{u_x}$ d'une série *convergente*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{x-1} + u_x + \ldots,$$

la série (11) sera également *convergente*. Comparons donc le rapport $\frac{V_x}{V_{x-1}}$ au rapport

$$\frac{1}{e^{\varphi(x)\rho}} : \frac{1}{e^{\varphi(x-1)\rho}} = \frac{1}{e^{[\varphi(x)-\varphi(x-1)]\rho}};$$

pour que la série (11) soit convergente, il faudra que l'on ait

$$\frac{V_x}{V_{x-1}} < \frac{1}{e^{[\varphi(x)-\varphi(x-1)]\rho}},$$

ϱ étant supérieur à 1. Or, d'après la formule (9), on a

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = \frac{1}{x},$$

et par conséquent

$$e^{\frac{\varrho}{x}} < \frac{V_{x-1}}{V_x},$$

d'où

$$\varrho < x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right),$$

ou bien, en définitive,

(12)..... $Lim.\left[x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right)\right] > 1.$

Telle est la condition pour que la série (11) soit *convergente;* elle sera, au contraire, *divergente*, si l'on a

(13)..... $Lim.\left[x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right)\right] < 1;$

le cas de

(14)..... $Lim.\left[x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right)\right] = 1$

est douteux, et l'on devra alors avoir recours à d'autres règles pour décider de la convergence ou de la divergence de la série en question.

Si l'on applique la règle qui vient d'être trouvée aux deux séries

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{2.4.6\ldots 2x} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{2.4.6\ldots 2x}\cdot\frac{1}{2x+1} + \ldots$$

on trouvera pour la première

$$Lim.\left[x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right)\right] = \frac{1}{2} < 1,$$

et pour la seconde

$$Lim.\left[x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right)\right] = \frac{3}{2} > 1,$$

d'où l'on conclura que la première est *divergente*, et la seconde *convergente.*

La règle de MM. Duhamel et Raabe, appliquée à ces mêmes séries, eût donné précisément les mêmes résultats. En effet, il est facile de voir que le caractère de convergence, exprimé par la condition (12), et celui de M. Duhamel, quand $\frac{V_{x-1}}{V_x}$ converge vers la limite 1, ne diffèrent entr'eux que par la forme. Pour cela il n'y a qu'à établir l'égalité

$$x \log\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right) = x\left(\frac{V_{x-1}}{V_x} - 1\right)$$

pour $x = \infty$ et dans l'hypothèse de $Lim.\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right) = 1$. Si l'on suppose $\frac{V_{x-1}}{V_x} = k$, et qu'on se débarrasse dans l'équation précédente du facteur commun x, il suffira de démontrer que l'on a à la limite

$$\log k = k - 1.$$

Or, en écrivant cette équation sous la forme

$$k = \frac{e^k}{e},$$

et en développant l'exponentielle, on a

$$ek = e^k = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \ldots.$$

On voit de suite que cette inégalité est satisfaite à la limite, c. à d. pour $k = 1$.

Si l'on opérait sur la série (10) comme nous venons de le faire par rapport à la série (7), on obtiendrait un nouveau caractère pour juger de la convergence. Mais la nouvelle formule se présenterait sous une forme plus compliquée que la précédente, et contiendrait une intégrale définie.

Il sera très facile en suivant la marche qui vient d'être indiquée, et en employant les différentes formules établies dans cet article, de déduire d'autres règles, plus ou moins commodes, pour juger de la convergence d'une série.

On pourrait aussi, dans le même but, employer des *moyennes discontinues*. Ainsi, par exemple, si pour la série

$$1, \quad \frac{1}{2^\rho}, \quad \frac{1}{3^\rho}, \quad \frac{1}{4^\rho} \ldots\ldots\ldots$$

on forme les *moyennes géométriques discontinues*

$$1, \quad \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\rho}}, \quad \frac{1}{(2.3)^{\frac{1}{2}\rho}}, \quad \frac{1}{(3.4)^{\frac{1}{2}\rho}} \ldots\ldots\ldots$$

cette nouvelle série sera *convergente* et *divergente* en même temps que la première, c'est-à-dire suivant que l'exposant ρ sera plus grand que 1, ou, au contraire, inférieur ou égal à 1.

5. Toutes les formules (A), (B), (C), (D) et (E), relatives aux intégrales définies ordinaires, subsistent aussi pour les intégrales aux différences finies, en supposant également que les fonctions sous les signes d'intégration restent positives et finies pour toutes les valeurs attribuées à la variable. Supposons que cette variable reçoive successivement les x valeurs équidifférentes

$$x_0, \; x_0 + 1, \; x_0 + 2, \ldots . x_0 + x - 1 = X,$$

en admettant que x_0 ne soit pas inférieur à 1; faisons

$$\sum_{x_0}^{X} f(x) = f(x_0) + f(x_0 + 1) + f(x_0 + 2) + \ldots . + f(X), \ldots\ldots\ldots \textbf{(15)}$$

le nombre des termes du second membre étant visiblement égal à x. Les formules (A), (B), (C) etc. du n° 1 se trouveront remplacées par

$$(\mathbf{A}')\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log f(x) < x \log \left(\frac{\overset{X}{\underset{x_0}{S}} f(x)}{x} \right)$$

$$(\mathbf{B}')\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log f(x) > x \log \left(\frac{x}{\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \frac{1}{f(x)}} \right)$$

$$(\mathbf{C}')\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\varphi(x)^2] \cdot \overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\psi(x)^2] > \left(\overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\varphi(x)\psi(x)] \right)^2$$

$$(\mathbf{D}')\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{X}{\underset{x_0}{S}} [f(x)] \cdot \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \left[\frac{1}{f(x)} \right] > x^2$$

$$(\mathbf{E}')\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \varphi(x) \right)^2 < x \overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\varphi(x)^2].$$

Si, en particulier, on avait $x_0 = 1$, et par conséquent $X = x$, la série (15) deviendrait

$$\overset{X}{\underset{1}{S}} f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(x),$$

et il n'y aurait qu'à changer dans les formules (A'), (B'), (C') etc. x_0 et X respectivement en 1 et x.

6. Sans nous étendre sur les applications des inégalités (A'), (B'), (C') etc., nous nous contenterons d'en donner deux exemples très simples. Prenons la formule (C') et supposons

$$\varphi(x) = a^x, \quad \psi(x) = b^x,$$

a et b étant des nombres positifs quelconques. En prenant pour les limites des intégrales $x_0 = 1$ et $X = x$, nous aurons

$$\overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\varphi(x)^2] = \overset{x}{\underset{1}{S}} (a^{2x}) = \frac{a^2(a^{2x}-1)}{a^2-1}$$

$$\overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\psi(x)^2] = \overset{x}{\underset{1}{S}} (b^{2x}) = \frac{b^2(b^{2x}-1)}{b^2-1}$$

$$\overset{X}{\underset{x_0}{S}} [\varphi(x)\psi(x)] = \overset{x}{\underset{1}{S}} (a^x \cdot b^x) = \frac{ab[(ab)^x-1]}{ab-1}.$$

Donc

$$\frac{a^2(a^{2x}-1)}{a^2-1} \cdot \frac{b^2(b^{2x}-1)}{b^2-1} > \frac{a^2b^2[(ab)^x-1]^2}{(ab-1)^2},$$

ou bien

$$(\mathbf{16})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(a^{2x}-1)(b^{2x}-1)}{(a^2-1)(b^2-1)} > \frac{[(ab)^x-1]^2}{(ab-1)^2}.$$

Si l'on particularise cette formule en faisant $b = 1$, on trouve

$$\left(\frac{b^{2x}-1}{b^2-1}\right)_{b=1} = x,$$

et par conséquent

$$x \cdot \frac{a^{2x}-1}{a^2-1} > \frac{(a^x-1)^2}{(a-1)^2}.$$

Observons que quand a est plus grand que 1, on pourra multiplier cette inégalité par le facteur positif

$$\frac{a^2-1}{(a^x-1)^2},$$

et l'on aura

$$x \cdot \frac{a^x+1}{a^x-1} > \frac{a+1}{a-1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(17)}$$

Dans le cas de $a < 1$, nous obtiendrons l'inégalité

$$x \cdot \frac{1+a^x}{1-a^x} > \frac{1+a}{1-a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(18)}$$

Proposons nous encore de trouver la limite supérieure et la limite inférieure de la transcendante

$$\sum_{x_0}^{X} [\log x] = \log x_0 + \log(x_0+1) + \log(x_0+2) + \ldots + \log(x_0 + x - 1)$$

au moyen des deux formules (A') et (B'). A cet effet supposons $f(x) = x(x+1)$ pour que les deux intégrations $\sum_{x_0}^{X} f(x)$ et $\sum_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)}$ puissent s'effectuer. On aura

$$\sum_{x_0}^{X} \log f(x) = \sum_{x_0}^{X} \log[x(x+1)] = \log[x_0(x_0+1)] + \log[(x_0+1)(x_0+2)]$$
$$+ \log[(x_0+2)(x_0+3)] + \ldots + \log[X(X+1)]$$
$$= \log x_0 + \log(x_0+1) + \log(x_0+2) + \ldots + \log X$$
$$+ \log(x_0+1) + \log(x_0+2) + \ldots + \log X + \log(X+1)$$
$$= \sum_{x_0}^{X} \log x + \sum_{x_0}^{X} \log x - \log x_0 + \log(X+1).$$

De là on conclura

$$\sum_{x_0}^{X} \log f(x) = 2 \sum_{x_0}^{X} \log x + \log\left(\frac{X+1}{x_0}\right).$$

Si l'on observe maintenant que

$$\sum_{x_0}^{X} f(x) = \sum_{x_0}^{X} [x(x+1)] = \frac{X(X+1)(X+2) - (x_0-1)x_0(x_0+1)}{3},$$

$$\sum_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)} = \sum_{x_0}^{X} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{X}{X+1} - \frac{x_0-1}{x_0},$$

les formules (A') et (B') conduiront aux inégalités suivantes pour la détermination des limites de $\sum_{x_0}^{X} \log x$:

$$2\sum_{x_0}^{X}\log x + \log\left(\frac{X+1}{x_0}\right) < x\log\left[\frac{X(X+1)(X+2)-(x_0-1)x_0(x_0+1)}{3x}\right]$$

$$2\sum_{x_0}^{X}\log x + \log\left(\frac{X+1}{x_0}\right) > x\log\left[\frac{x}{\frac{X}{X+1}-\frac{x_0-1}{x_0}}\right],$$

d'où l'on obtient de suite

$$\textbf{(19)}\ldots\ldots \sum_{x_0}^{X}\log x < \frac{1}{2}x\log\left[\frac{X(X+1)(X+2)-(x_0-1)x_0(x_0+1)}{3x}\right] - \frac{1}{2}\log\left(\frac{X+1}{x_0}\right)$$

$$\textbf{(20)}\ldots\ldots \sum_{x_0}^{X}\log x > \frac{1}{2}x\log\left[\frac{x}{\frac{X}{X+1}-\frac{x_0-1}{x_0}}\right] - \frac{1}{2}\log\left(\frac{X+1}{x_0}\right).$$

Appliquons ces deux formules à la recherche des limites de la somme des logarithmes népériens

$$\sum_{101}^{120}\log x = \log(101) + \log(102) + \log(103) + \ldots + \log(120).$$

Il faudra supposer

$$x_0 = 101,\quad X = 120,\quad x = 20.$$

Les inégalités (19) et (20) donneront

$$\sum_{101}^{120}\log x < 10\log(12354) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{121}{101}\right) = 94{,}1270168\ldots.$$

$$\sum_{101}^{120}\log x > 10\log(121.101) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{121}{101}\right) = 94{,}0187757\ldots.$$

Ces deux limites, comme on le voit, sont assez rapprochées entr'elles. Un calcul direct, effectué au moyen des tables des logarithmes népériens, donne pour la valeur de la transcendante $\sum_{101}^{120}\log x$ le nombre $94{,}0730124\ldots$. La moyenne arithmétique des deux limites, égale à $94{,}0728\ldots$, se rapproche beaucoup, comme on le voit, de la vraie valeur de cette intégrale.

Les différents résultats que nous venons de déduire des formules, établies dans cet article, font présumer qu'elles pourront donner lieu encore à quelques autres applications intéressantes.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 10.

ÜBER

DEN RUSSISCHEN EUKLAS.

VON

N. v. Kokscharow,
Mitgliede der Akademie

(Mit 1 Tafel).

Gelesen am 18 Februar 1859.

ST. PETERSBURG, 1859.

Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:

in St. Petersburg	in Riga	in Leipzig
Eggers et Comp.,	Samuel Schmidt,	Leopold Voss.

Preis: 35 Kop. = 12 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Im Juli 1859. C. Vesselofski, beständiger Secretär.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

ÜBER

DEN RUSSISCHEN EUKLAS.

Von

N. v. Kokscharow.

Der Euklas findet sich in Russland in den Goldseifen des Kaufmanns Bakakin, die im südlichen Ural, im Lande der Orenburgischen Kosaken, in der Nähe des Flusses Sanarka, gelegen sind. In diesen Goldseifen trifft man den Euklas in ziemlich grossen und durchsichtigen Krystallen, von welchen einige ganz farblos sind, andere dagegen von sehr schöner bläulichgrüner, bisweilen in das Grünlichblaue ziehender Farbe. Die Farbe dieser letzteren ist oft sehr ähnlich der der durchsichtigen Cyanitkrystalle, welche in grosser Menge zusammen mit Euklas in den Goldseifen vorkommen und mit welchen man, wie es scheint, die Euklaskrystalle am Ural verwechselt. Auf ganz zufällige Weise habe ich die Entdeckung des Euklas in Russland im Jahre 1858 gemacht[1]). Um nämlich frisches Material zu meinen Untersuchungen zu erhalten, so hatte ich mich mit einem Steinhändler aus Katharinenburg in Unterhandlung gesetzt und mir im Allgemeinen sibirische Mineralien verschrieben. Die Sendung die mir nun in Folge dieser Verschreibung gemacht wurde, enthielt unter anderen auch mehrere Mineralien aus den oben angeführten Goldseifen des Kaufmanns Bakakin, welche für mich von besonderem Interesse waren, weil ich unter den Cyanitkrystallen derselben drei ausgezeichnet schöne Euklaskrystalle fand. Diese drei Krystalle sind auf Fig. 4, 5 und 6 mit allen natürlichen Details aber bedeutend vergrössert abgebildet, nämlich der auf Fig. 4 ist ungefähr fünf Mal, der auf Fig. 5 ungefähr vier Mal und der auf Fig. 6 ungefähr drei Mal grösser als in der Natur dargestellt. Der erste von den erwähnten Krystallen (Fig. 4) ist ungefähr 16 Millimeter lang, 9 Millimeter breit und 5 Millimeter dick; der zweite Krystall (Fig. 5) ist ungefähr 17 Millimeter lang, 10 Millimeter breit und 5 Millimeter dick, und endlich der dritte Krystall (Fig. 6) ist ungefähr 24 Millimeter lang, 13 Millimeter breit und 7 Millimeter dick. Alle Krystalle sind vollkommen durchsichtig,

[1]) Bulletin de la Classe Physico-Mathém. de l'Acad. Impériale des Sciences de S.-Pétersbourg. T. XVI, p. 284.

ohne die geringsten Risse. Was aber die Farbe derselben anbelangt, so ist sie ziemlich verschieden, nämlich die beiden ersten Krystalle haben eine schöne dunkelbläulich grüne Farbe, sehr ähnlich der, der durchsichtigen dunkelen Cyanitkrystalle, während der letzte Krystall ganz wasserhell ist. Die gefärbten Krystalle zeigen nach drei verschiedenen Richtungen verschiedene Farbentöne. Das specifische Gewicht des russischen Euklases ist nach meiner Bestimmung = 3,100[1]). Die Härte des Minerals ist grösser als die des Topases. Es hat eine ausgezeichnet vollkommene und leicht zu erhaltene Spaltbarkeit in der Richtung des Klinopinakoids $T = (\infty P \infty)$, eine weniger vollkommene in der Richtung des Orthopinakoids $M = \infty P \infty$ und wahrscheinlich auch in der Richtung des Hemidomas $P = +P \infty$ (denn diese Spaltbarkeit ist, wie bekannt, dem brasilianischen Euklas eigen). Die Krystalle sind, wie es aus den Figuren ersichtlich ist, sehr reich an Flächen, von welchen einige zu neuen Formen gehören. Die Euklase kommen in den Goldseifen des Kaufmanns Bakakin in Begleitung verschiedener Mineralien vor, wie zum Beispiel von weingelbem und rosenrothem Topas, rothem, blauem und weissem Korund, Cyanit, Amethyst u. s. w. Diese Mineralgruppe, mit Hinzufügung des Euklases, ist dadurch merkwürdig, dass die Mineralien, aus welchen sie besteht, einerseits einen ganz verschiedenen Habitus von den übrigen Mineralien des Urals darbieten, andererseits wieder gar nicht zu unterscheiden sind von den brasilianischen Mineralien, die gewöhnlich den Diamant begleiten. In mineralogischer Hinsicht kann man daher mit vollem Recht die kleine Strecke Land in der Umgegend des Flusses Sanarka «russisches Brasilien» nennen. Es ist wohl zu erwarten, dass man in den Goldseifen dieses Landes vielleicht auch bald Diamanten finden wird, obgleich bis jetzt wir von dem Vorkommen dieses kostbaren Edelsteins in der Umgegend des Flusses Sanarka noch keine bestimmte Nachricht erhalten haben[2]). Diesen besonderen Habitus der Mineralien aus den Goldseifen des Flusses Sanarka kann man wohl bloss dadurch erklären, dass die Bergkette, an deren Fuss sie liegen, und welche das Material durch ihre Zerstörung zur Bildung der Goldseifen geliefert hat, eine ganz andere geologische Constitution als alle übrigen Bergketten des Urals und dagegen eine sehr ähnliche der der brasilianische Berge darbietet. Es wird nicht ohne Interesse seien, bei dieser Gelegenheit zu erwähnen, dass die hierher gehörige Bergkette eine ganz andere Richtung, als die anderen benachbarten Bergketten des südlichen Ural hat, was überhaupt am Besten auf der Karte von Alex. v. Humboldt, die zu Gustav Rose's wohl bekanntem Werke hinzugefügt ist[3]), zu ersehen ist. Diese Bergkette, die sich am Ilmen-Tau anschliesst geht von NNW nach SSO, während

[1]) Vergl. weiter unten die Bestimmung des specifischen Gewichts des russischen Euklases.

[2]) Hierbei ist zu erwähnen, dass N. Barbot de Marny in seiner Abhandlung «Mineralogische Novellen vom Ural» (Verhandlungen der russischen K. Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg, Jahrgang 1855—1856, S. 200) von einem Minerale aus derselben Localität spricht, das er als Chrysoberyll (doch nicht mit Bestimmtheit) beschreibt, das in grünlichgelben an den Kanten durchscheinenden Geröllen vorkommt, dessen Harte grösser als die des Korunds und dessen Glanz zum Fettglanz geneigt ist.

[3]) Vergl. Karte vom Ural-Gebirge, gegründet auf die astronomischen Beobachtungen von Wischnewsky, Schubert, A. v. Humboldt, Ad. Erman und auf handschriftliche Specialkarten. Als Beilage zu Gustav Rose Mineralogisch-Geognostischem Bericht von Humboldt's Sibirischer Reise.

die anderen, wie Ural-Tau, der Ilmen-Tau selbst u. s. w. vorzüglichst die Richtung von NNO nach SSW beibehalten.

Wenn man für die Grundform des Euklases eine monoklinoëdrische Pyramide annimmt, deren Axenverhältniss:

$$a : b : c = 1 : 0{,}97135 : 3{,}00086$$

und deren Hauptaxe a zur Klinodiagonalaxe b unter dem Winkel $\gamma = 79° 44' 4''$ geneigt ist[1]), so können alle Formen des russischen Euklases folgendermaassen ausgedrückt werden.

In den Fig.	Nach Weiss.	Nach Naumann.
	Hemipyramiden.	
d	$+(a:b:c)$	$+P$
$\mathcal{O}$	$+(a:b:\frac{1}{2}c)$	$+(2P2)$
f	$+(a:b:\frac{1}{3}c)$	$+(3P3)$
e	$+(a:\frac{1}{2}b:\frac{1}{3}c)$	$+(3P\frac{3}{2})$
r	$-(a:b:c)$	$-P$
u	$-(a:b:\frac{1}{3}c)$	$-(2P2)$
i	$-(a:b:\frac{1}{4}c)$	$-(4P4)$
	Klinodomen.	
n	$(a:\infty b:c)$	$(P\infty)$
o	$(a:\infty b:\frac{1}{2}c)$	$(2P\infty)$
q	$(a:\infty b:\frac{1}{3}c)$	$(3P\infty)$
R	$(a:\infty b:\frac{1}{4}c)$	$(4P\infty)$
H	$(a:\infty b:\frac{1}{6}c)$	$(6P\infty)$
	Hemidoma.	
g	$+(a:2b:\infty c)$	$+\frac{1}{2}P\infty$
	Prismen.	
N	$(\infty a:b:c)$	∞P
ζ	$(\infty a:\frac{1}{9}b:c)$	$\infty P9$
s	$(\infty a:b:\frac{1}{2}c)$	$(\infty P2)$

Unter diesen Formen sind die monoklinoëdrische Hemipyramide $\mathcal{O} = +(2P2)$ und die Klinodomen $R = (4P\infty)$ und $H = (6P\infty)$ neu, und bis jetzt bloss an den drei russischen Euklasen beobachtet.

Die Combinationen der oben angeführten Formen der russischen Euklaskrystalle sind auf beigefügter Tafel in schiefer und horizontaler Projection dargestellt, nämlich:

Fig. 1 und 1 bis / Fig. 4 und 4 bis: $+P$ (d). $+(3P3)$ (f). $+(3P\frac{3}{2})$ (e). $-P$ (r). $-(2P2)$ (u). $(P\infty)$ (n). $(2P\infty)$ (o). $(3P\infty)$ (q). $(6P\infty)$ (H). $+\frac{1}{2}P\infty$ (g). ∞P (N). $(\infty P2)$ (s).

Fig. 2 und 2 bis / Fig. 5 und 5 bis: $+P$ (d). $+(2P2)$ ($\mathcal{O}$). $+(3P3)$ (f). $-P$ (r). $-(2P2)$ (u). $(P\infty)$ (n). $(2P\infty)$ (o). $(3P\infty)$ (q). $+\frac{1}{2}P\infty$ (g). ∞P (N). $(\infty P2)$ (s).

Fig. 3 und 3 bis / Fig. 6 und 6 bis: $+P$ (d). $+(3P3)$ (f). $-P$ (r). $-(2P2)$ (u). $-(4P4)$ (i). $(2P\infty)$ (o). $(3P\infty)$ (q). $(4P\infty)$ (R). $(6P\infty)$ (H). ∞P (N). $\infty P9$ (ζ). $(\infty P2)$ (s).

[1]) Diese Werthe sind dieselben die Schabus in seiner vortrefflichen Monographie des Euklases gegeben hat. Ich behalte diese Werthe bei, weil die von mir ausgeführten Messungen denen von Schabus sehr nahe kommen, wie es weiter unten gezeigt werden wird.

Da die Figuren deutlich genug sind, um einen vollkommenen Begriff über das äussere Ansehen der Krystalle zu geben, so wäre die specielle Beschreibung einer jeden Combination ins Besondere überflüssig, ich übergehe daher dieselbe und beschränke mich bloss hier eine kurze Notiz über die Beschaffenheit der Flächen zu geben. Die Prismenflächen $s = (\sim P\,2)$ und $N = \sim P$, der drei in meinem Besitz sich findenden Krystalle, sind glänzend; aber in einem Krystalle (Fig. 4) schwach und in den zwei anderen (Fig. 5 und 6) ziemlich stark vertical gestreift. Die Flächen der Klinodomen $o = (2\,P\sim)$ und $q = (3\,P\sim)$ sind in den zwei gefärbten Krystallen (Fig. 4 und 5) so glatt und glänzend wie ein Spiegel, aber diess ist bloss der Fall für die breiten Flächen, die am ersten Krystalle auf der linken und am zweiten Krystalle auf der rechten Seite liegen; während auf den entgegengesetzten Seiten die genannten Flächen der Krystalle im Gegentheil viel schmäler, nicht so glatt und viel weniger glänzend sind. Am farblosen Krystalle (Fig. 6) sind dieselben Flächen ziemlich glatt und glänzend, jedoch nicht in dem Grade, wie bei den vorhergehenden Krystallen. Die Flächen der Klinodomen $n = (P\sim)$, $R = (4\,P\sim)$ und $H = (6\,P\sim)$ sind in allen drei Krystallen ziemlich glatt und glänzend. Die Fläche des Hemidomas $g = +\frac{1}{2}\,P\sim$ ist an dem ersten gefärbten Krystalle (Fig. 4) glänzend und an dem zweiten gefärbten (Fig. 5) ganz matt. Die übrigen Flächen dieser drei Krystalle sind, mit Ausnahme einiger schwachen Unebenheiten, die gewöhnlich bei der Bildung der Krystalle entstehen, ziemlich eben und glänzend.

Die eben beschriebenen drei Euklaskrystalle sind die Einzigen die ich bis jetzt gesehen habe. Alle meine Bemühungen, mir noch einige Individuen dieses seltenen Minerals zu verschaffen, sind bisher nutzlos geblieben. Nach mündlichen Nachrichten zu urtheilen, so scheint es doch, dass einige Bewohner des Urals im Besitz mehrerer Euklaskrystalle sind. In einer Unterredung, die ich im Winter 1857 mit dem General-Major des Bergkorps J. v. Weitz über die mineralogischen Neuigkeiten des Urals hatte, erfuhr ich von demselben dass man im Sommer des erwähnten Jahres, unter anderen Mineralien, in den Goldseifen des Kaufmanns Bakakin schöne durchsichtige Cyanitkrystalle gefunden hätte. Als ich die Einwendung machte, dass die Cyanitkrystalle an ihren Enden nicht sehr reich an Flächen seyn könnten, so versicherte mir Herr J. v. Weitz, dass im Gegentheil diese Krystalle an ihren Enden viele Zuspitzungsflächen darbieten. Man sieht daraus, dass es mehr als wahrscheinlich ist, dass die Krystalle, von welchen die Rede war, keine andere als Euklaskrystalle waren. Auch einer von den niederen Beamten der Steinschleiferei zu Katharinenburg hat einem meiner Freunde erzählt, dass er von Herrn J. v. Weitz nach dem Lande des Flusses Sanarka geschickt sey, um die dortigen Halden zur Auffindung aller dort vorkommenden Mineralien zu waschen und dass er unter andern Herrn J. v. Weitz von dort aus viele rosenrothe Topase und einige sogenannte zugespitzte Cyanitkrystalle mitgebracht hätte.

Winkel der Krystalle des Euklases.

Wenn man das oben gegebene Axenverhältniss der Grundform $a:b:c = 1:0{,}97135:3{,}00086$ und den Winkel, welcher die Klinodiagonalaxe b mit der Verticalaxe a bildet, $\gamma = 79° 44' 4''$ annimmt, so ergeben sich folgende Winkel:

	Durch Rechnung.	Durch Messung.	
$d : T$	$= 104° 8' 41''$	$104° 2' 0''$	Haüy.
		$104 7 0$	Schabus.
		$104 9 10$	Kokscharow.
$\overset{d:d}{\text{d. h. } 2\,Xf}$	$= 151 42 38$	$151 56 0$	Haüy.
		$151 46 0$	Schabus.
$d : M$	$= 129 22 40$		
$d : f$	$= 157 3 13$	$157 5 45$	Kokscharow.
$d_1 : f_2$ [1]	$= 128 45 51$	$128 49 10$	Kokscharow.
$d : e$	$= 157 6 21$	$157 8 32$	Kokscharow.
$d : g$	$= 154 3 4$		
$\overset{d:n}{\text{über } g}$	$= 120 8 19$ [2]	$120 2 30$	Kokscharow.
$d : s$	$= 131 47 16$		
$\overset{d:s}{\text{über } g \text{ u. } n}$	$= 48 12 44$	$48 11 0$	Kokscharow.
$d : N$	$= 132 44 26$		
$d : O$	$= 167 23 43$		
$r : T$	$= 101 53 11$	$101 55 0$	Haüy.
		$101 54 0$	Schabus.
		$101 52 30$	Kokscharow.
$\overset{r:r}{\text{d. h. } 2\,Xf}$	$= 156 13 38$	$156 10 0$	Haüy.
		$156 12 0$	Schabus.
		$156 14 23$	Kokscharow.
$r : u$	$= 169 3 23$	$169 45 0$	Phillips.
$r : i$	$= 151 47 26$		
$r : o$	$= 137 16 26$	$137 14 5$	Kokscharow.
$r : n$	$= 140 24 21$	$140 21 30$	Kokscharow.
$r : q$	$= 132 24 30$		
$\overset{r:f}{\text{über } o}$	$= 95 48 22$	$95 41 58$	Kokscharow.
$r : N$	$= 141 45 14$		
$r : s$	$= 138 38 0$		

[1] D. h. die Neigung der Fläche d_1, nicht zur anliegenden Fläche f_1, sondern zur andern Fläche f_2, welche durch die zweite Fläche d_2 von der Fläche d_1 getrennt ist

[2] Vergl. Fig. 4 bis.

Durch Rechnung.	Durch Messung.	
$u : T = 112°49'48''$	$112°50'0''$	Phillips.
	112 50 15	Schabus.
d. h. $2\frac{u:u}{X} = 134\ 20\ 24$	134 14 0	Haüy.
	134 19 30	Schabus.
	134 20 0	Kokscharow.
$u : i = 162\ 44\ 3$	162 43 0	Haüy.
	162 20 0	Phillips.
$u : f^1) = 102\ 15\ 24$	102 12 45	Kokscharow.
$u : o = 142\ 58\ 0$	143 20 0	Phillips.
$u : N = 142\ 59\ 40$		
$u : s = 144\ 12\ 10$	144 54 0	Haüy.
$i : T = 130\ 5\ 45$	130 12 0	Haüy.
	130 10 0	Phillips.
	130 16 45	Schabus.
d. h. $2\frac{i:i}{X} = 99\ 48\ 30$	99 40 0	Haüy.
	99 26 30	Schabus.
$i : R = 149\ 49\ 46$		
$i : q = 149\ 59\ 33$		
$i : N = 139\ 30\ 43$		
$i : s = 147\ 48\ 8$	148 36 0	Haüy.
	148 10 0	Phillips.
$f : T = 127\ 5\ 28$	126 51 0	Haüy.
	127 7 0	Kupffer.
	127 5 20	Schabus.
	127 4 5	Kokscharow.
d. h. $2\frac{f:f}{X} = 105\ 49\ 4$	106 18 0	Haüy.
	105 20 0	Phillips.
	105 49 20	Schabus.
	105 51 28	Kokscharow.
$f : e = 157\ 57\ 10$	157 54 45	Kokscharow.
$f : o = 138\ 31\ 56$	138 26 21	Kokscharow.
$f : q = 141\ 14\ 30$	141 9 6	Kokscharow.
$f : N = 132\ 52\ 4$		
$f : s = 139\ 50\ 4$	139 21 0	Haüy.

[1]) Die gegenseitige Neigung der Flächen u und f, die auf einer und derselben Hälfte des Krystalls liegen, z. B. im ersten gefärbten Krystalle (vergl. Fig. 4 bis), um diese Neigung zu messen, waren die Flächen genommen, die auf der rechten Hälfte des Krystalls sich befinden, und die durch die schmale Fläche q von einander getrennt sind.

Durch Rechnung.	Durch Messung.
	140° 0′ 0″ Phillips.
	139 59 30 Kupffer.
	(139 58 30) Kokscharow.
$f : \theta = 169° 39′ 30″$	
$\theta : T = 116\ 44\ 58$	
$\frac{\theta : \theta}{\text{d. h. 2 } Xf} = 126\ 30\ 4$	
$\theta : N = 133\ 53\ 28$	
$\theta : s = 137\ 16\ 20$	
$e : T = 114\ 51\ 54$	114 52 0 Schabus.
$\frac{e : e}{\text{d. h. 2 } Xf} = 130\ 16\ 12$	129 58 0 Haüy.
	130 16 0 Schabus.
$e : N = 153\ 19\ 53$	
$e : s = 154\ 40\ 56$	
$\frac{e : s}{\text{über } g \text{ u. } of} = 25\ 19\ 4$	25 18 30 Kokscharow.
$n : T = 108\ 9\ 16$	108 25 0 Haüy.
	108 24 0 Phillips.
	108 9 16 Schabus.
	108 10 33 Kokscharow.
$\frac{n : n}{\text{d. h. 2 } Xf} = 143\ 41\ 28$	143 10 0 Haüy.
	143 50 0 Levy.
	143 32 0 Phillips.
	143 41 28 Schabus.
	143 40 5 Kokscharow.
$n : o = 164\ 53\ 50$	165 18 0 Phillips.
	164 56 45 Kokscharow.
$n : g = 146\ 5\ 16$	
$n : q = 153\ 37\ 30$	153 39 11 Kokscharow.
$\frac{n_a : q}{\text{über } n_1} = 117\ 18\ 58$	(117 10 0) Kokscharow.
$\frac{n : s}{\text{zum vord. } sf} = 108\ 4\ 24$	108 5 0 Schabus.
	(108 8 50) Kokscharow.
$\frac{n : s}{\text{zum hint. } sf} = 91\ 24\ 32$	91 35 0 Levy.
$o : T = 123\ 15\ 26$	123 40 0 Haüy.
	123 10 0 Phillips.
	123 14 0 Schabus.
	123 16 35 Kokscharow.
$\frac{o : o}{\text{d. h. 2 } Xf} = 113\ 29\ 8$	112 40 0 Haüy.

	Durch Rechnung.	Durch Messung.
$o : q$	$= 168° 43' 40''$	$168° 41' 41''$ Kokscharow.
$\frac{o : s}{\text{zum vord. } s}$	$= 114\ 51\ 32$	$115\ 20\ 0$ Phillips.
$\frac{o : s}{\text{zum hint. } s}$	$= 99\ 42\ 4$	
$q : T$	$= 134\ 31\ 46$	$134\ 33\ 52$ Kokscharow.
$\frac{q : q}{\text{d. h. } 2X}$	$= 90\ 56\ 28$	$90\ 56\ 15$ Kokscharow.
$\frac{q : s}{\text{zum vord. } s}$	$= 118\ 56\ 32$	
$R : T$	$= 142\ 40\ 39$	
$\frac{R : R}{\text{d. h. } 2X}$	$= 74\ 38\ 42$	
$\frac{R : s}{\text{zum vord. } s}$	$= 121\ 13\ 28$	
$H : T$	$= 153\ 3\ 24$	$153\ 3\ 15$ Kokscharow.
$\frac{H : H}{\text{d. h. } 2X}$	$= 53\ 53\ 12$	
$H : R$	$= 169\ 37\ 15$	
$H : q$	$= 161\ 28\ 22$	$161\ 29\ 30$ Kokscharow.
$\frac{H : s}{\text{zum vord. } s}$	$= 123\ 9\ 54$	
$g : T$	$= 90\ 0\ 0$	
$\frac{g : M}{M = \infty P \infty}$	$= 108\ 52\ 53$	
$g : s$	$= 105\ 50\ 20$	
$N : T$	$= 107\ 40\ 2$	$107\ 20\ 0$ Phillips.
		$107\ 37\ 30$ Schabus.
$N : N$	$= \begin{cases} 144\ 39\ 56 \\ 35\ 20\ 4 \end{cases}$	$144\ 45\ 0$ Schabus.
$s : T$	$= 122\ 29\ 52$	$122\ 51\ 0$ Haüy.
		$122\ 28\ 0$ Phillips.
		$122\ 33\ 52$ Kupffer.
	$121° 50'$ bis	$122\ 32\ 0$ Breithaupt.
		$122\ 29\ 52$ Schabus.
		$(122\ 32\ 42)$ Kokscharow.
$s : s$	$= \begin{cases} 115\ 0\ 16 \\ 64\ 59\ 44 \end{cases}$	$114\ 18\ 0$ Haüy.
		$114\ 50\ 0$ Levy.
		$115\ 38\ 0$ Breithaupt.
		$115\ 0\ 16$ Schabus.
$s : M$	$= 147\ 30\ 8$	$(147\ 25\ 30)$ Kokscharow.
$\zeta : T$	$= 92\ 1\ 37$	$92\ 5\ 0$ Schabus.
$\zeta : \zeta$	$= \begin{cases} 175\ 56\ 46 \\ 4\ 3\ 14 \end{cases}$	$175\ 50\ 0$ Schabus.

Ferner, vorausgesetzt dass jede monoklinoëdrische Pyramide aus zwei Hemipyramiden zusammengesetzt ist (nämlich aus einer positiven, deren Flächen über den spitzen Winkel γ liegen und einer negativen deren Flächen über den stumpfen Winkel γ liegen) bezeichnen wir wie folgt.

In allen positiven Hemipyramiden, durch:

X, den Neigungswinkel, der die Fläche mit der Ebene bildet, welche die Axen *a* und *b* enthält (Winkel mit dem klinodiagonalen Hauptschnitt).

Y, den Neigungswinkel, der die Fläche mit der Ebene bildet, welche die Axen *a* und *c* enthält (Winkel mit dem orthodiagonalen Hauptschnitt).

Z, den Neigungswinkel, der die Fläche mit der Ebene bildet, welche die Axen *b* und *c* enthält (Winkel mit dem basischen Hauptschnitt).

μ, den Neigungswinkel der klinodiagonalen Polkante zur Verticalaxe *a*.

ν, den Neigungswinkel derselben Kante zur Klinodiagonalaxe *b*.

ϱ, den Neigungswinkel der orthodiagonalen Polkante zur Verticalaxe *a*.

σ, den Neigungswinkel der Mittelkante zur Klinodiagonalaxe *b*.

γ, den Neigungswinkel der Klinodiagonalaxe *b* zur Verticalaxe *a*.

Die Winkel aller negativen Hemipyramiden werden wir mit denselben Buchstaben bezeichnen, nur zu denjenigen Winkeln, die einer Aenderung in ihrer Grösse unterworfen sind, werden wir ein Accent hinzufügen. Auf diese Weise haben wir für die negativen Hemipyramiden: X', Y', Z', μ', ν'.

Diese Bezeichnung annehmend, erhalten wir durch Rechnung für:

$d = +P.$

$X = 75°\,51'\,19''$
$Y = 50\ \ 37\ \ 20$
$Z = 52\ \ 31\ \ \ 0$
$\mu = 49°\ \ 8'\ \ 9''$
$\nu = 51\ \ \ 7\ 47$
$\varrho = 71\ \ 34\ 12$
$\sigma = 72\ \ \ 3\ 50$
$\gamma = 79\ \ 44\ \ \ 4$

$\theta = +(2\,P\,2).$

$X = 63°\,15'\ \ 2''$
$Y = 54\ \ 15\ \ \ 0$
$Z = 55\ \ 55\ \ \ 0$
$\mu = 49°\ \ 8'\ \ 9''$
$\nu = 51\ \ \ 7\ 47$
$\varrho = 56°\,19'\ \ 3''$
$\sigma = 57\ \ \ 4\ 54$

$f = +(3\,P\,3).$

$X = 52°\,54'\,32''$
$Y = 58\ \ 32\ \ 26$
$Z = 59\ \ 57\ \ 39$
$\mu = 49°\ \ 8'\ \ 9''$
$\nu = 51\ \ \ 7\ 47$
$\varrho = 45\ \ \ 0\ 30$
$\sigma = 45\ \ 50\ 27$

$e = +(3\,P\,\tfrac{3}{2}).$

$X = 65°\ \ 8'\ \ 6''$
$Y = 36\ \ 29\ 36$
$Z = 74\ \ 18\ \ \ 0$
$\mu = 27°\,37'\ \ 4''$
$\nu = 72\ \ 38\ 52$
$\varrho = 45\ \ \ 0\ 30$
$\sigma = 64\ \ \ 6\ \ \ 6$

$r = -P.$

$X' = 78°\ \ 6'\,49''$
$Y' = 40\ \ 39\ 23$
$Z' = 41\ \ 58\ 39$
$\mu' = 39°\,10'\,19''$
$\nu' = 40\ \ 33\ 45$
$\varrho = 71\ \ 34\ 12$
$\sigma = 72\ \ \ 3\ 50$

$u = -(2\,P\,2).$

$X' = 67°\,10'\,12''$

$Y' = 44° 23' 46''$
$Z' = 45\ 33\ 30$
$\mu' = 39° 10' 19''$
$\nu' = 40\ 33\ 45$
$\varrho = 56\ 19\ 3$
$\sigma = 57\ 4\ 54$

$i = -(4\,P\,4)$.

$X' = 49° 54' 15''$
$Y' = 53\ 37\ 36$
$Z' = 54\ 28\ 8$
$\mu' = 39° 10' 19''$
$\nu' = 40\ 33\ 45$
$\varrho = 36\ 52\ 40$
$\sigma = 37\ 40\ 50$

$n = (P\infty)$.

$X = 71° 50' 44''$
$Y = 99\ 44\ 58$
$Z = 18° 9' 16''$

$o = (2\,P\infty)$.

$X = 56° 44' 34''$
$Y = 98\ 34\ 13$
$Z = 33\ 15\ 26$

$q = (3\,P\infty)$.

$X = 45° 28' 14''$
$Y = 97\ 17\ 56$
$Z = 44\ 31\ 46$

$R = (4\,P\infty)$.

$X = 37° 19' 21''$
$Y = 96\ 12\ 10$
$Z = 52\ 40\ 39$

$H = (6\,P\infty)$.

$X = 26° 56' 36''$
$Y = 94° 37' 54''$
$Z = 63\ 3\ 24$

$g = +\frac{1}{2}\,P\infty$.

$X = 90° 0' 0''$
$Y = 71\ 7\ 7$
$Z = 29\ 8\ 49$

$N = \infty P$.

$X = 72° 19' 58''$
$Y = 17\ 40\ 2$

$\varsigma = \infty P\,9$.

$X = 87° 58' 23''$
$Y = 2\ 1\ 37$

$s = (\infty P\,2)$.

$X = 57° 30' 8''$
$Y = 32\ 29\ 52$

In der Reihe, welche die Messungen enthält, sind die eingeklammerten Winkel diejenigen von mir gemessenen, die ich nicht als genügend genug betrachte (wegen verschiedener Umstände, die weiter unten angeführt sind).

Resultate der Krystallmessungen des Euklases.

Mir hat sich die Gelegenheit geboten sechs Euklaskrystalle zu messen, nämlich:

Krystall Nr. 1 von Russland, aus meiner Sammlung, der auf Fig. 4 und 4 bis dargestellt und der oben ziemlich ausführlich beschrieben wurde.

Krystall Nr. 2 von Russland, aus meiner Sammlung, der auf Fig. 5 und 5 bis dargestellt und oben beschrieben wurde.

Krystall Nr. 3 von Russland, aus meiner Sammlung, der auf Fig. 6 und 6 bis dargestellt und oben beschrieben wurde.

Krystall Nr. 4 von Brasilien, der sich in der Sammlung des verstorbenen wirklichen Staatsrath A. v. Kämmerer befand und der jetzt im Besitz des Herrn v. Benardaki ist.

Krystall Nr. 5 von Brasilien, aus meiner Sammlung.

Krystall Nr. 6 von Brasilien, aus meiner Sammlung.

Alle Messungen wurden von mir mit Hilfe des Mitscherlich'schen Goniometers

vollzogen, welches bloss mit einem Fernrohre versehen war. Folgende sind die von mir erhaltenen Resultate[1]):

Für $f : T$.

(Neigung der Krystallfläche f zur Spaltungsfläche T.)

Am Krystall Nr. 1.

$f_1 : T_1 = 127° \; 3' \; 0''$
$127 \; 2 \; 0$
$127 \; 4 \; 15$

Mittel $= 127° \; 3' \; 5''$ (1)
$f_2 : T_1 = 52 \; 55 \; 30$, folglich
Complement $= 127 \; 4 \; 30$ (2)
$f_2 : T_2 = 127 \; 2 \; 15$ (3)

Am Krystall Nr. 2.

$f_1 : T_1 = (127° \; 9' \; 15'')$ (4)
$f_2 : T_1 = (52 \; 57 \; 30)$, folglich
Complement $= (127 \; 2 \; 30)$ (5)

Am Krystall Nr. 3.

$f_1 : T_1 = 127° \; 4' \; 30''$ (6)

Am Krystall Nr. 4.

$f_1 : T_1 = 127° \; 2' \; 30''$ (7)

Alle Messungen mit Ausnahme der eingeklammerten, waren ziemlich befriedigend. Der mittlere Werth aus den Messungen (1), (2), (3), (4), (5), (6) und (7) ist gleich:

$f : T = \mathbf{127° \; 4' \; 5''}$

Für $f : f$.

(Neigung der Flächen der Hemipyramide f in den klinodiagonalen Polkanten).

Am Krystall Nr. $1 = 105° \; 53' \; 30''$ (8)
Am Krystall Nr. $2 = 105 \; 46 \; 15$ (9)
Am Krystall Nr. $3 = 105 \; 51 \; 37$ (10)
Am Krystall Nr. $4 = 105 \; 54 \; 30$ (11)

Das Resultat der Messung des Krystalls Nr. 2 ist merklich verschieden von allen anderen Resultaten. Der Fehler liegt aber eher im Krystall als in der Messung selbst, und hängt wahrscheinlich davon ab, dass eine der Flächen f sich nicht ganz auf ihren Platz befindet. Die vorhergehenden Messungen der Neigung $f : T$ erklären den Fall ziemlich gut;

[1]) Da wo es nöthig ist, werde ich die Flächen durch besondere Zahlen bezeichnen, so z. B. f_1, f_2 u. s. w. Ebenso werde ich die weniger vollkommenen Messungen wie oben in Paranthesen einschliessen.

in der That am Krystall Nr. 2 war erhalten worden: $f_1 : T_1 = 127° 9' 15''$ (Complement = $52° 50' 45''$) und $f_2 : T_1 = 52° 57' 30''$, folglich muss in diesem Krystalle die gesuchte Neigung $f_1 : f_2 = 52° 50' 45'' + 52° 57' 30'' = 105° 48' 15''$ sein, was sich bloss von dem durch unmittelbare Messung Gefundenen um 2 Minuten unterscheidet.

Jedenfalls beträgt der mittlere Werth aus den Messungen (8), (9), (10) und (11):

$$f : f = \mathbf{105° 51' 28''}$$

was im vollkommenen Einklang mit der Messung $f : T$ steht.

Für $r : T$.

(Neigung der Krystallfläche r zur Spaltungsfläche T).

Am Krystall Nr. 1.

$r_1 : T_1 = 101° 52' 0''$ (12)
$r_2 : T_2 = 101 52 45$
$101 52 0$

Mittel $= 101° 52' 22''$ (13)
$r_1 : T_2 = 78 8 0$
$78 8 55$

Mittel $= 78° 8' 27''$, folglich
Complement $= 101 51 33$ (14)

Am Krystall Nr. 2.

$r_1 : T_1 = 101° 51' 30''$ (15)
$r_2 : T_1 = 78 8 0$, folglich
Complement $= 101 52 0$ (16)

Der mittlere Werth aus den Messungen (12), (13), (14), (15) und (16) beträgt also $= 101° 51' 53''$.

Dieselbe Neigung habe ich auch am Krystall Nr. 3 gemessen, aber mir scheint es, dass es vielleicht besser wäre, diese Messungen nicht weiter in Rücksicht zu nehmen, indem der Krystall Nr. 3 ziemlich gross ist und daher wahrscheinlich die Lage der Flächen r (in Folge der Anhäufung mehrerer zusammengeschmolzenen Individuen, die diesen Krystall bilden) nicht ganz richtig ist. Diess ersieht man gleich aus den Neigungen $r_1 : T_1$ und $r_2 : T_1$, für welche ich durch Messung folgendes erhalten habe:

Am Krystall Nr. 3.

$r_1 : T_1 = 101° 48' 30''$ (17) folglich
Complement $= 78 11 30$
$r_2 : T_1 = 78 0 25$, folglich
Complement $= 101 59 35$ (18)

Also für ein und denselben Winkel findet ein Unterschied von 11 Minuten statt. Nach diesen zwei Messungen muss die gegenseitige Neigung der Flächen r, also $r_1 : r_2 = 78°$

$11' 30'' + 78° 0' 25'' = 156° 11' 55''$ seyn, und in der That von mir wurde für die genannte Neigung am Krystall Nr. 3 durch unmittelbare Messung der Winkel $= 156° 11' 50''$ erhalten. Jedenfalls beträgt der mittlere Werth aus den Messungen $_{(17)}$ und $_{(18)} = 101° 54' 2''$, was sich wenig von den oben angeführten Zahlen unterscheidet.

Der mittelste Werth aus den Messungen $_{(12)}$ $_{(13)}$, $_{(14)}$, $_{(15)}$, $_{(16)}$, $_{(17)}$ und $_{(18)}$ wird also seyn:

$$r : T = \mathbf{101° 52' 30''}.$$

Für $r : r$.

(Neigung der Flächen der Hemipyramide r in den klinodiagonalen Polkanten).

Am Krystall Nr. 1 $= 156° 16' 0''$
$156 16 0$
Mittel $= 156° 16' 0''$ $_{(19)}$

Am Krystall Nr. 2 $= 156° 15' 10''$
$156 15 30$
Mittel $= 156° 15' 20''$ $_{(20)}$

Am Krystall Nr. 3 $= 156° 11' 50''$ $_{(21)}$

Der mittlere Werth aus den Messungen $_{(19)}$, $_{(20)}$ und $_{(21)}$ beträgt:

$$r : r = \mathbf{156° 14' 23''}$$

Der erhaltene Werth steht auch im vollkommenen Einklang mit dem Resultat der Messung $r : T = 101° 52' 30''$, denn dieser letzte Winkel fordert $r : r = 156° 15' 0''$.

Für $n : T$.

(Neigung der Krystallfläche n zur Spaltungsfläche T).

Am Krystall Nr. 1.

$n_2 : T_2 = 108° 13' 30''$ $_{(22)}$

Am Krystall Nr. 2.

$n_1 : T_1 = 108° 15' 30''$ $_{(23)}$
$n_2 : T_1 = 71 46 30$
$71 47 0$
Mittel $= 71° 46' 45''$, folglich
Complement $= 108 13 15$ $_{(24)}$

Dieselbe Neigung habe ich auch am brasilianischen Krystall Nr. 6 gemessen, aber dieser Krystall war nicht hinreichend genug vollkommen ausgebildet, woher die erhaltenen Resultate nicht ganz gut übereinstimmen, nämlich ich habe erhalten:

Am Krystall Nr. 6.

$n_1 : T_1 = (108° 12' 0'')$ (25)

$n_2 : T_1 = (\ 72\ \ 1\ 30\ )$, folglich

Complement $= (107\ \ 58\ 30\ )$ (26)

Also für ein und denselben Winkel ein Unterschied von $13\frac{1}{2}$ Minuten.

Jedenfalls beträgt der mittlere Werth aus den Messungen (22), (23), (24), (25) und (26):

$$n : T = \mathbf{108° 10' 33''}$$

Für $n : n$.

(Neigung der Flächen des Klinodomas n in den klinodiagonalen Polkanten).

Am Krystall Nr. 2 $= 143° 32' 0''$ (27)

Am Krystall Nr. 6 $= (143\ \ 48\ 10)$ (28)

Der mittlere Werth aus den Messungen (27) und (28) beträgt:

$$n : n = \mathbf{143° 40' 5''}$$

Für $d : T$.

(Neigung der Krystallfläche d zur Spaltungsfläche T.)

Am Krystall Nr. 1.

$d_1 : T_1 = 104° 9' 10''$ (29)

$d_1 : T_2 = \ 75\ \ 51\ \ 0$

$\ 75\ \ 50\ \ 40$

Mittel $= 75° 50' 50''$, folglich

Complement $= 104\ \ 9\ \ 10$ (30)

Der mittlere Werth aus den Messungen (29) und (30) beträgt:

$$d : T = \mathbf{104° 9' 10''}$$

Für $o : T$.

(Neigung der Krystallfläche o zur Spaltungsfläche T.)

Am Krystall Nr. 1.

$o_2 : T_2 = 123° 15' 35''$ (31)

Am Krystall Nr. 2.

$o_2 : T_1 = 56° 44' 0''$

$\ 56\ \ 41\ \ 45$

$\ 56\ \ 43\ \ 30$

Mittel $= 56° 43' 5''$, folglich

Complement $= 123\ \ 16\ \ 55$ (32)

Dieselbe Neigung habe ich auch am brasilianischen Krystall Nr. 6 gemessen, aber auf der Fläche *o* erhielt ich bei der Messung ein doppeltes Bild, nämlich ein dunkles und ein schwaches, so dass für das erste das Instrument den Winkel = 123° 20′ 0″ und für das zweite den Winkel = 123° 14′ 30″ gab. Wenn wir das Mittel von diesen zwei Zahlen nehmen, so erhalten wir:

Am Krystall Nr. 6.

$o_1 : T_1 = (123° 17′ 15″)_{(33)}$

Der mittelste Werth aus den Messungen $_{(31)}$, $_{(32)}$ und $_{(33)}$ beträgt also:

$o : T = \mathbf{123° 16′ 35″}$

Für $q : T$.

(Neigung der Krystallfläche q zur Spaltungsfläche T.)

Am Krystall Nr. 1.

$q_1 : T_1 = 134° 33′ 30″_{(34)}$

$q_2 : T_2 = 134\ 32\ 45_{(35)}$

Am Krystall Nr. 2.

$q_2 : T_1 = 45° 25′ 30″$

$45\ 24\ 30$

$45\ 24\ 0$

Mittel = 45° 24′ 40″, folglich

Complement = $134\ 35\ 20_{(36)}$

Der mittlere Werth aus den Messungen $_{(34)}$, $_{(35)}$ und $_{(36)}$ beträgt also:

$q : T = \mathbf{134° 33′ 52″}$

Für $H : T$.

(Neigung der Krystallfläche H zur Spaltungsfläche T.)

Am Krystall Nr. 1 = 153° 3′ 15″$_{(37)}$

Also:

$H : T = \mathbf{153° 3′ 15″}$

Für $r : f$ (über o).

Am Krystall Nr. 1.

$r_1 : f_1 = 95° 45′ 0″_{(38)}$

$r_2 : f_2 = 95\ 40\ 0_{(39)}$

Am Krystall Nr. 2.

$r_2 : f_2 = 95° 42′ 40″_{(40)}$

Am Krystall Nr. 3.

$r_1 : f_1 = 95° 40' 10''$ (41)

Der mittlere Werth aus den Messungen (38), (39), (40) und (41) beträgt:

$r : f = \mathbf{95° 41' 58''}$

Für $r : o$.

Am Krystall Nr. 1 = 137° 14′ 30″ (42)
Am Krystall Nr. 2 = 137 13 40 (43)

Der mittlere Werth aus den Messungen (42) und (43) beträgt also:

$r : o = \mathbf{137° 14' 5''}$

Für $r : n$.

Am Krystall Nr. 1 = 140° 21′ 30″ (44)

Also:

$r : n = \mathbf{140° 21' 30''}$

Für $f : o$.

Am Krystall Nr. 1 = 138° 25′ 7″ (45)
Am Krystall Nr. 2 = 138 27 35 (46)

Der mittlere Werth aus den Messungen (45) und (46) beträgt also:

$f : o = \mathbf{138° 26' 21''}$

Für $f : q$.

Am Krystall Nr. 1 = 141° 7′ 30″
141 7 30

Mittel = 141° 7′ 30″ (47)
Am Krystall Nr. 2 = 141 10 43 (48)

Der mittlere Werth aus den Messungen (47) und (48) beträgt:

$f : q = \mathbf{141° 9' 6''}$

Für $d_1 : f_1$.

Am Krystall Nr. 1 = 157° 5′ 45″ (49)

Also:

$d_1 : f_1 = \mathbf{157° 5' 45''}$

Für $d_1 : f_2$.

(d. h. die Neigung der Fläche d_1, nicht zur anliegenden Fläche f_1, sondern zur anderen Fläche f_2, welche durch die zweite Fläche d_2 von der Fläche d_1, getrennt ist.)

Am Krystall Nr. 1 = 128° 49′ 10″ (50)

Also:

$$d_1 : f_2 = \mathbf{128^\circ\ 49'\ 10''}$$

Für $d : n$ (über g).

Am Krystall Nr. 1 = $120^\circ\ 2'\ 30''$ (51)

Also:

$$d : n = \mathbf{120^\circ\ 2'\ 30''}$$

Für $d : e$.

Am Krystall Nr. 1 = $157^\circ\ 8'\ 45''$

$$\begin{array}{r} 157\ \ 8\ \ 20 \\ \hline \end{array}$$

Mittel = $157^\circ\ 8'\ 32''$ (52)

Also:

$$d : e = \mathbf{157^\circ\ 8'\ 32''}$$

Für $u : f$.

(Gegenseitige Neigung der Flächen u und f, welche auf einer und derselben Hälfte des Krystalls liegen).

Am Krystall Nr. 1 = $102^\circ\ 12'\ 45''$ (53)

Also:

$$u : f = \mathbf{102^\circ\ 12'\ 45''}$$

Für $f : e$.

Am Krystall Nr. 1 = $157^\circ\ 54'\ 45''$ (54)

Also:

$$f : e = \mathbf{157^\circ\ 54'\ 45''}$$

Für $u : u$.

(Neigung der Flächen der Hemipyramide u in den klinodiagonalen Polkanten).

Am Krystall Nr. 1 = $134^\circ\ 20'\ 0''$ (55)

Also:

$$u : u = \mathbf{134^\circ\ 20'\ 0''}$$

Für $q : q$.

(Neigung der Flächen des Klinodomas q in den klinodiagonalen Polkanten).

Am Krystall Nr. 1 = $90^\circ\ 56'\ 15''$ (56)

Also:

$$q : q = \mathbf{90^\circ\ 56'\ 15''}$$

Für $n : o$.

Am Krystall Nr. 1 = 164° 56′ 45″ (57)

Also:

$$n : o = \mathbf{164^\circ\ 56'\ 45''}$$

Für $n : q$ (über o).

Am Krystall Nr. 1 = 153° 39′ 0″
153 38 45

Mittel = 153° 38′ 52″ (58)

Am Krystall Nr. 2 = 153° 39′ 30″ (59)

Der mittlere Werth aus den Messungen (58) und (59) beträgt also:

$$n : q = \mathbf{153^\circ\ 39'\ 11''}$$

Für $n_2 : q$ (über n_1 und o).

Am Krystall Nr. 2 = (117° 10′ 0″) (60)

Diese Messung war aber nicht gut genug.

Also:

$$n_2 : q = (\mathbf{117^\circ\ 10'\ 0''})$$

Für $o : q$.

Am Krystall Nr. 1 = 168° 41′ 50″ (61)
Am Krystall Nr. 2 = 168 41 30
168 41 0
168 41 30
168 41 47
168 42 0

Mittel = 168° 41′ 33″ (62)

Also der mittlere Werth aus den Messungen (61) und (62) beträgt:

$$o : q = \mathbf{168^\circ\ 41'\ 41''}$$

Für $H : g$.

Am Krystall Nr. 1 = 161° 29′ 30″ (63)

Also:

$$H : q = \mathbf{161^\circ\ 29'\ 30''}$$

Jetzt werde ich zu den Neigungen übergehen, in welchen die Flächen s eintreten. Dies sind die schwersten und am wenig befriedigsten Messungen, zum Theil der Streifung wegen, welche die Flächen s oft bedeckt, zum Theil auch, dass in der Lage dieser Flächen eine weit grössere Störung bemerkbar ist, als in der Lage der übrigen Flächen. Aus die-

sem Grunde ist es besser auf diese Messungen (hauptsächlich da sie nicht zahlreich genug sind) keine weitere Rücksicht zu nehmen. Ich habe nämlich erhalten:

Für $s : T$.

(Neigung der Krystallfläche s zur Spaltungsfläche T).

Am Krystall Nr. 1 = (122° 38′ 45″)
(122 40 0)
Mittel = (122° 39′ 22″) (64)

Am Krystall Nr. 2 = 122° 29′ 0″ (65)

Dieselbe Neigung wurde auch am brasilianischen Krystalle Nr. 5 wahrgenommen, und namentlich an zwei Flächen s_1 und s_2, die am scharfen Winkel des Prismas liegen. Die Resultate stimmten gar nicht mit einander überein, ich erhielt nämlich:

Am Krystall Nr. 5.

$s_1 : T_1 =$ 122° 29′ 45″ (66)
$s_2 : T_1 =$ (122 54 15) (67)

Also für ein und denselben Winkel findet ein Unterschied von $24\frac{1}{2}$ Minuten statt.

Wenn man die Messung (67) nicht in Rücksicht nimmt, so erhält man als mittleren Werth aus den Messungen (64), (65) und (66) für:

$s : T =$ (**122° 32′ 42″**)

Für $s : s$.

(Neigung der Flächen des Prismas s in den klinodiagonalen Kanten).

Am Krystall Nr. 1 = (114° 51′ 40″) (68)
Am Krystall Nr. 5 = (65 24 0), folglich
Complement = (114 36 0) (69)

Man thut besser diese beiden Messungen nicht weiter in Rücksicht zu nehmen.

Für $d : s$ (über g und n).

Am Krystall Nr. 1 = 48° 13′ 0″
48 9 0
Mittel = 48° 11′ 0″ (70)

Also:

$d : s =$ **48° 11′ 0″**

Für $f : s$.

Am Krystall Nr. 2 = 139° 56′ 0″ (71)
Am Krystall Nr. 4 = 140 1 0 (72)
Mittel = 139° 58′ 30″

*

Also:

$$f : s = (\mathbf{139^\circ\ 58'\ 30''})$$

Für $e : s$.

(Neigung des rechten hinteren oberen e zum linken vorderen s).

Am Krystall Nr. 1 = 25° 18′ 30″ (73)

Also:

$$e : s = \mathbf{25^\circ\ 18'\ 30''}$$

Für $n : s$.

(Neigung z. B. des linken oberen n zum linken vorderen s).

Am Krystall Nr. 1 = 108° 8′ 50″ (74)

Also:

$$n : s = \mathbf{108^\circ\ 8'\ 50''}$$

Für $s : M$.

(Neigung der Fläche s zum Orthopinakoid $M = \infty P\infty$).

Am Krystall Nr. 1 = 147° 25′ 30″ (75)

Also:

$$s : M = \mathbf{147^\circ\ 25'\ 30''}$$

Wie schon oben erwähnt wurde, so thut man besser, alle gemessenen Neigungen, wo die Flächen s eintreten, nicht in Rücksicht zu nehmen.

Specifisches Gewicht des russischen Euklases.

Das specifische Gewicht habe ich an den drei sich in meinem Besitz befindenden russischen Euklas-Krystallen bestimmt, und folgende Resultate erhalten:

1) Für den gefärbten Krystall, der auf Fig. 4 abgebildet ist und der 0,963 Gram. wiegt.

Bei einem Versuch = 3,101.

2) Für den gefärbten Krystall, der auf Fig. 5 abgebildet ist und der 1,294 Gram. wiegt.

Bei dem ersten Versuch = 3,104
Bei dem zweiten Versuch = 3,102

Mittel = 3,103

3) Für den farblosen Krystall, der auf Fig. 6 abgebildet ist und 3,110 Gram. wiegt.

Bei dem ersten Versuch = 3,097
Bei dem zweiten Versuch = 3,094

Mittel = 3,096

Also der mittlere Werth des specifischen Gewichts des russischen Euklases beträgt aus diesen drei Bestimmungen:

Sp. Gew. = **3,100.**

Besondere Bemerkungen.

Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig, hier in das Klare zu bringen, in welchem Grade das rechtwinkelige Axensystem für die Euklaskrystalle anwendbar ist.

Um das schiefwinkelige Axensystem des Euklases in ein rechtwinkeliges zu transformiren, werden wir Naumann's[1]) Methode befolgen. Wir behalten die Hauptaxe und Orthodiagonalaxe unverändert bei, und führen bloss, statt der Klinodiagonalaxe diejenige, in der Ebene des klinodiagonalen Hauptschnitts enthaltene Linie, welche auf der Hauptaxe normal ist, als neue Nebenaxe ein. Fällen wir jetzt von dem Endpunkte der Klinodiagonalaxe b eine Normale auf die Hauptaxe a, so wird der durch solche Normale abgeschnittene Theil der Hauptaxe $= b$. Cos. $\gamma = h$. a, und die Normale selbst wird $= b$. Sin. γ sein. Da nun, wie Naumann gezeigt hat, die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten fordert, dass die Grösse b. Cos. γ ein rationales Sulbmultiplum von a nach irgend einer Zahl h ist, so folgt daraus, dass die Fläche des Hemidomas $+ h P \infty$ in jeder monoklinoëdrischen Krystallreihe horizontal liegen müsse und, dass es also nur nöthig ist, die Centroparallelfläche desselben als Basis einzuführen, um dieselbe Krystallreihe orthoëdrisch zu machen. Für den Euklas berechnet sich b. Cos. $\gamma = 0{,}17310$, woher man annehmen kann, dass die Rolle einer solchen Basis in diesem Minerale die Fläche spielen wird, die durch das Centrum des Axensystems, parallel mit dem Hemidoma $+ \frac{1}{6} P \infty$, gelegen ist. Was aber die Länge der neu eingeführten Axe anbelangt, so ist diese offenbar $= b$. Sin. $\gamma = 0{,}95580$. Bezeichnen wir endlich die rechtwinkeligen Axen des Euklases: durch a' die Hauptaxe (welche unverändert geblieben ist und $= 1$), durch b' die Makrodiagonalaxe (welche in monoklinoëdrischem Axensystem die Orthodiagonalaxe war und $=$ 3,00086), und durch c' die Brachydiagonalaxe (neue Axe, welche ist $= 0{,}95580$), so erhalten wir für die rhombische Grundpyramide:

$$a' : b' : c' = 1 : 3{,}00086 : 0{,}95580.$$

Die krystallographischen Zeichen der Formen verwandlen sich in diesem Falle folgendermaassen:

$d = + P$ verwandelt sich in $\breve{P}\frac{6}{5}$
$r = - P$ « « « $\frac{7}{6}\breve{P}\frac{7}{6}$

1) Vergl. Elemente der theoretischen Krystallographie von Dr. Carl Fr. Naumann. Leipzig, 1856. S. 340.

$\Theta = +(2P2)$	verwandelt	sich	in	$2\breve{P}\frac{1}{5}^2$
$f = +(3P3)$	»	»	»	$3\breve{P}\frac{1}{5}^8$
$e = +(3P\frac{3}{2})$	»	»	»	$3\breve{P}\frac{1}{11}^8$
$u = -(2P2)$	»	»	»	$2\breve{P}\frac{1}{7}^2$
$i = -(4P4)$	»	»	»	$4\breve{P}\frac{2}{7}^4$
$n = (P\infty)$	»	»	»	$\breve{P}6$
$o = (2P\infty)$	»	»	»	$2\breve{P}12$
$q = (3P\infty)$	»	»	»	$3\breve{P}18$
$R = (4P\infty)$	»	»	»	$4\breve{P}24$
$H = (6P\infty)$	»	»	»	$6\breve{P}36$
$g = +\frac{1}{2}P\infty$	»	»	»	$\frac{1}{3}\breve{P}\infty$
$N = \sim P$	»	»	»	$\sim P$
$s = (\sim P2)$	»	»	»	$\sim\breve{P}2$
$\zeta = \sim P9$	»	»	»	$\sim\breve{P}9$

Die Einfachheit der krystallographischen Beizeichnung geht, wie man sieht, ganz verloren, sobald wir die monoklinoëdrische Krystallreihe des Euklases als hemiëdrisch rhombisch darstellen wollen. Weiss[1]) war in dieser Hinsicht nicht glücklicher; er ging von einer anderen Grundform aus, nämlich von einer rhombischen Pyramide mit folgendem Axenverhältniss:

$$a' : b'' : c''' = 1 : 2{,}25063 : 1{,}44486\,^{2})$$

und erhielt daher für die Formen der Euklaskrystalle die Zeichen, die sich, nach Naumann's Bezeichnungsweise, folgendermassen ausdrücken lassen:

$d = \frac{5}{4}\breve{P}\frac{5}{4}$	$e = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\breve{P}\frac{1}{9}\frac{1}{1}$	$o = \frac{3}{2}\breve{P}6$	$g = \frac{1}{2}\breve{P}\infty$
$r = \frac{7}{4}\breve{P}\frac{7}{3}$	$u = \frac{7}{4}\breve{P}\frac{7}{6}$	$q = \frac{9}{4}\breve{P}9$	$N = \sim\breve{P}2$
$\Theta = \frac{3}{2}\breve{P}\frac{6}{5}$	$i = 3\breve{P}\frac{1}{7}^2$	$R = 3\breve{P}12$	$s = \sim P$
$f = \frac{9}{4}\breve{P}\frac{9}{5}$	$n = \frac{3}{4}\breve{P}3$	$H = \frac{9}{2}\breve{P}18$	$\zeta = \sim\breve{P}18\,^{3})$

Was die Winkel anbelangt, so füge ich hier zur näheren Verdeutlichung derselben eine vergleichende Tabelle bei. In der ersten Spalte der Tabelle sind die Winkel gestellt, die mit Hilfe des rechtwinkeligen Axensystems $a' : b' : c' = 1 : 3{,}00086 : 0{,}95580$ und den dazu gehörigen krystallographischen Zeichen berechnet wurden; in der zweiten Spalte — die Winkel die mit Hilfe des rechtwinkeligen Axensystems $a'' : b'' : c''' = 1 : 2{,}25063 : 1{,}44486$ und den dazu gehörigen krystallographischen Zeichen berechnet

1) «Ueber das Krystallsystem des Euklases von C. S. Weiss», gelesen in der Akademie der Wissenschaften in Berlin am 11. November 1841.

2) Dieses Axenverhältniss berechnet sich wenn man die Neigung der Flächen der Hemipyramide f in den klinodiagonalen Polkanten $= 105° 49' 4''$ und den Winkel, der die klinodiagonale Endkante dieser Hemipyramide mit der Hauptaxe bildet $= 49° 8' 9''$ bei der Berechnung in Rücksicht nimmt.

3) Da b' ungefähr gleich $\frac{1}{3}\,b''$ und c' ungefähr gleich $\frac{1}{3}\,c''$ ist, so kann man leicht von den Zeichen der ersten Art zu den von Weiss berechneten übergehen.

wurden; in der dritten Spalte — die Winkel die mit Hilfe des monoklinoëdrischen Axensystems $a : b : c = 1 : 0{,}97135 : 3{,}00086$, $\gamma = 79° 44' 4''$ und den dazu gehörigen krystallographischen Zeichen berechnet wurden, und endlich in der vierten Spalte sind die von Kupffer, Schabus und mir gemessenen Winkel.

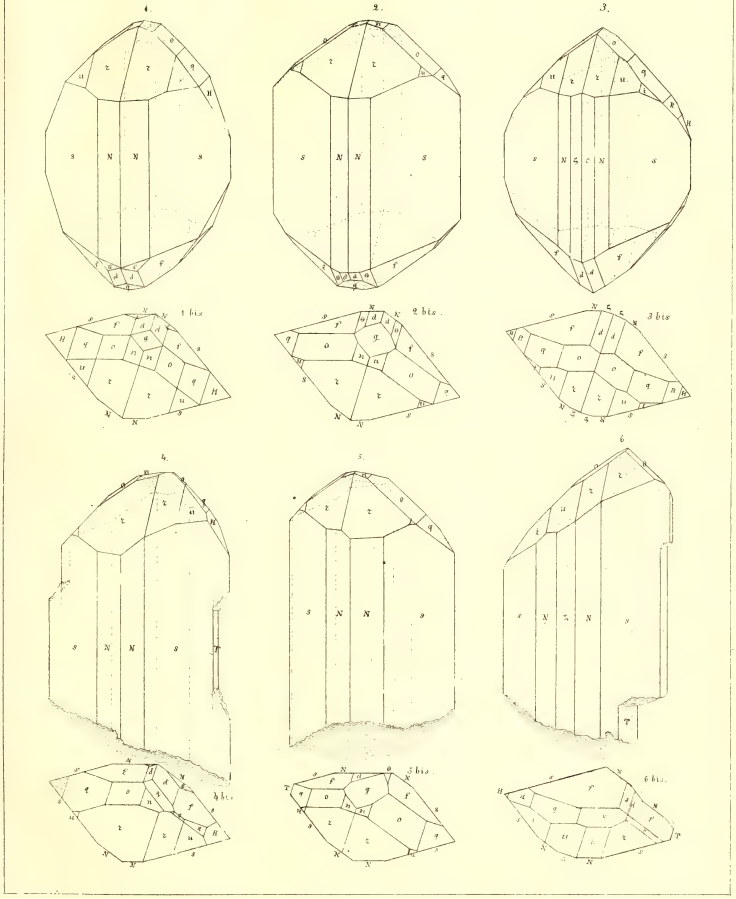
Berechnete Winkel aus $a' : b' : c' =$ 1 : 3,00086 : 0,95580.	*Berechnete* Winkel aus $a'' : b'' : c'' =$ 1 : 2,25063 : 1,44486	*Berechnete* Winkel aus $a : b : c =$ 1 : 0,97135 : 3,00086 $\gamma = 79° 44' 4''$	*Gemessene* Winkel.
$d : T = 104° 6'$	$104° 9'$	$104° 9'$	$104° 7'$ Sch.
			104 9 Kok.
$d : d = 151 48$	151 43	151 43	151 46 Sch.
$d : f = 157 6$	157 3	157 3	157 6 Kok.
$d_1 : f_2 = 128 54$	128 46	128 46	128 49 Kok.
$d : e = 157 13$	157 10	157 6	157 9 Kok.
$d : n$ über g $= 120 17$	120 30	120 8	120 3 Kok.
$d : s$ über g u. n $= 48 3$	48 15	48 13	48 11 Kok.
$r : T = 101 55$	101 59	101 53	101 54 Sch.
			101 53 Kok.
$r : r = 156 9$	156 3	156 14	156 12 Sch.
			156 14 Kok.
$r : o = 137 7$	137 15	137 16	137 14 Kok.
$r : n = 140 12$	140 21	140 24	140 22 Kok.
$r : f$ über o $= 95 46$	96 8	95 48	95 42 Kok.
$u : T = 112 54$	113 0	112 50	112 50 Sch.
$u : u = 134 12$	134 1	134 20	134 20 Sch.
			134 20 Kok.
$u : f^1) = 102 13$	102 38	102 15	102 13 Kok.
$i : T = 130 11$	130 19	130 6	130 17 Sch.
$i : i = 99 37$	99 22	99 49	99 27 Sch.
$f : T = 127 0$	127 5	127 5	127 7 Kupf.
			127 5 Sch.
			127 4 Kok.
$f : f = 106 0$	105 49	105 49	105 49 Sch.
			105 51 Kok.
$f : e = 158 3$	158 4	157 57	157 55 Kok.

1) Die gegenseitige Neigung der Flächen u und f, die auf einer und derselben Hälfte des Krystalls liegen.

Berechnete Winkel aus $a' : b' : c' =$ 1 : 3,00086 : 0,95580	*Berechnete* Winkel aus $a'' : b'' : c'' =$ 1 : 2,25063 : 1,44486	*Berechnete* Winkel aus $a : b : c =$ 1 : 0,97135 : 3,00086 $\gamma = 79° 44' 4''$	*Gemessene* Winkel.
$f : o = 138° 39'$	$138° 54'$	$138° 32'$	$138° 26'$ Kok.
$f : q = 141 19$	$141 34$	$141 15$	$141 9$ Kok.
$f : s = 140 0$	$139 54$	$139 50$	$140 0$ Kupf.
			$(139 59)$ Kok.
$e : T = 114 48$	$114 56$	$114 52$	$114 52$ Sch.
$e : e = 130 23$	$130 8$	$130 16$	$130 16$ Sch.
$e : s$ über $g = 25 16$	$25 25$	$25 19$	$25 19$ Kok.
$n : T = 108 10$	$108 11$	$108 9$	$108 9$ Sch.
			$108 11$ Kok.
$n : n = 143 39$	$143 39$	$143 41$	$143 41$ Sch.
			$143 40$ Kok.
$n : o = 164 53$	$164 53$	$164 54$	$164 57$ Kok.
$n : q = 153 37$	$153 37$	$153 38$	$153 39$ Kok.
$n_2 : q = 117 16$	$117 15$	$117 19$	$(117 10)$ Kok.
$n : s = 107 46$	$107 45$	$108 4$	$108 5$ Sch.
			$(108 9)$ Kok.
$o : T = 123 17$	$123 18$	$123 15$	$123 14$ Sch.
			$123 17$ Kok.
$o : q = 168 44$	$168 43$	$168 44$	$168 42$ Kok.
$q : T = 134 34$	$134 34$	$134 32$	$134 34$ Kok.
$q : q = 90 52$	$90 52$	$90 56$	$90 56$ Kok.
$H : T = 153 5$	$153 5$	$153 3$	$153 3$ Kok.
$H : q = 161 29$	$161 29$	$161 28$	$161 30$ Kok.
$N : T = 107 40$	$107 48$	$107 40$	$107 38$ Sch.
$N : N = 144 40$	$144 24$	$144 40$	$144 45$ Sch.
$s : T = 122 30$	$122 42$	$122 30$	$122 34$ Kupf.
			$122 30$ Sch.
			$(122 33)$ Kok.
$s : s = 115 0$	$114 36$	$115 0$	$115 0$ Sch.
$s : M = 147 30$	$147 18$	$147 30$	$(147 26)$ Kok.
$\zeta : T = 92 2$	$92 3$	$92 2$	$92 5$ Sch.
$\zeta : \zeta = 175 57$	$175 55$	$175 57$	$175 50$ Sch.

In dieser Tabelle sind, wie im Vorhergehenden, meine Messungen, die ich nicht als befriedigend genug betrachte, eingeklammert.

Aus Allem dem oben Erwähnten ist es nicht schwer zu ersehen, dass das rechtwinkelige Axensystem zur Entwickelung der Krystallisation des Euklases fast gar nicht anwendbar ist. In der That, bei der Anwendung der rechtwinkeligen Axen, erhält man nicht nur sehr complicirte krystallographische Zeichen, sondern auch Winkel, die sich viel mehr von den unmittelbar gemessenen unterscheiden, als diejenigen, welche mit Hilfe der schiefwinkeligen Axen berechnet werden.


1.
1 bis.
2.
2 bis.
3.
3 bis.
4.
4 bis.
5.
5 bis.
6.
6 bis.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
Tome I, N° 11.

ÜBER

DEN RUSSISCHEN ZIRKON.

Von

N. v. Kokscharow,
Mitgliede der Akademie.

(Mit 4 Tafeln).

Gelesen am 4. März 1859.

St. PETERSBURG, 1859.

Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:

in St. Petersburg	in Riga	in Leipzig
Eggers et Comp.,	Samuel Schmidt,	Leopold Voss.

Preis: 50 Kop. = 17 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Im August 1859. C. Vesselofski, beständiger Secretär.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

ÜBER

DEN RUSSISCHEN ZIRKON.

Von

N. v. Kokscharow.

In Russland findet sich der Zirkon am Ural, im Tunkinsker Gebirge (Gouvernement Irkutsk) und im Tomskischen Taiga (Gouvernement Tomsk).

Wenn man für die Grundform des Zirkons eine tetragonale Pyramide annimmt, deren Flächen in den Polkanten unter einem Winkel = 123° 19′ 34″ und in den Mittelkanten = 84° 19′ 46″ geneigt sind [1]), und wenn man durch a die Haupt- oder Verticalaxe und durch b eine jede von den zwei Horizontalaxen bezeichnet, so bekommt man folgendes Axenverhältniss:

$$a : b : b = 0{,}640373 : 1 : 1$$

und ferner können alle Formen, die sich an den Krystallen des russischen Zirkons haben bestimmen lassen, folgendermaassen ausgedrückt werden:

In den Fig.	Nach Weiss.	Nach Naumann.
	Tetragonale Pyramiden.	
	a) Der ersten Art.	
o	$(a : b : b)$	P
v	$(a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}b)$	$2P$
s	$(a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{3}b)$	$3P$
	b) Der zweiten Art.	
t	$(a : b : \infty b)$	$P\infty$

1) Dies sind dieselben Winkel, die A. T. v. Kupffer in seinem wohlbekannten Werke «Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen» (Berlin. 1825, S. 72) gegeben hat. Ich behalte diese Winkel bei, weil meine eigenen Messungen fast zu denselben Resultaten führen, ich habe nämlich durch unmittelbare Messungen für die Neigung der Flächen der Grundpyramide $o = P$ an der Spitze = 95° 40′ 56″ erhalten, was für die Neigung in den Polkanten = 128° 20′ 0″ giebt. (Vergl. weiter unten Resultate der Krystallmessungen des Zirkons).

In den Fig.	Nach Weiss.	Nach Naumann.
	Ditetragonale Pyramiden.	
x	$(a : \frac{1}{3}b : b)$	$3P3$
z	$(a : \frac{1}{5}b : b)$	$5P5$
	Tetragonales Prisma der ersten Art.	
M	$(\infty a : b : b)$	∞P
	Tetragonales Prisma der zweiten Art.	
a	$(\infty a : b : \infty b)$	$\infty P\infty$

Zu diesen Formen wäre es vielleicht nicht überflüssig, auch das basische Pinakoid oP hinzuzufügen, indem dasselbe schon vor mehreren Jahren von meinem Freunde, dem Capitain des Berg-Corps K. v. Romanowsky, an einem Zirkonkrystalle des Ilmengebirges entdeckt wurde. Da aber K. v. Romanowsky gar Nichts über diesen Gegenstand veröffentlicht hat, und da es schon zu lange her ist, dass der Krystall in meinen Händen war, damit ich jetzt noch eine klare Erinnerung über die wahre Lage der Fläche oP an demselben haben könnte, so habe ich die Fläche oP weder in der oben angeführten Reihe der Zirkonformen, noch in den Figuren eingestellt. Die ditetragonale Pyramide $z = 5P5$ ist, meines Wissens nach, bis jetzt noch von Niemand an den russischen Zirkonkrystallen beobachtet worden.

Die wichtigsten Combinationen der oben genannten Formen der russischen Zirkonkrystalle sind auf beigefügten Tafeln in schiefer und horizontaler Projection dargestellt, nämlich:

Fig. 1 und 1 bis)	P	.	∞P	.				
	o		M					
Fig. 2 und 2 bis)	P	.	∞P	.	$\infty P\infty$	.		
Fig. 3 und 3 bis)	o		M		a			
Fig. 4 und 4 bis)	P	.	$\infty P\infty$	.				
Fig. 5 und 5 bis)	o		a					
Fig. 6 und 6 bis)	P	.	$3P$	.	∞P	.	$3P3$	.
	o		s		M		x	
Fig. 7 und 7 bis)	P	.	$2P$	.	$3P$	.	∞P	.	$\infty P\infty$	.
	o		v		s		M		a
Fig. 8 und 8 bis)	P	.	∞P	.	$\infty P\infty$	.	$3P3$	.		
	o		M		a		x		
Fig. 9 und 9 bis)	P	.	$2P$	.	∞P	.	$\infty P\infty$	.	$3P3$	.
	o		v		M		a		x
Fig. 10 u. 10 bis)	P	.	$3P$	.	∞P	.	$\infty P\infty$	.	$3P3$	.
Fig. 11 u. 11 bis)	o		s		M		a		x	
Fig. 12 u. 12 bis)	P	.	∞P	.	$3P3$	.				
	o		M		x					

Fig. 13 und 13 bis) P . $2P$. ∞P . $\infty P\infty$.
o v M a

Fig. 14 und 14 bis) P . $2P$. ∞P . $\infty P\infty$. $3P3$.
o v M a x

Fig. 15 und 15 bis) P . $2P$. $3P$. ∞P . $\infty P\infty$.
o v s M a

Fig. 16 und 16 bis) P . $2P$. $3P$. ∞P . $\infty P\infty$. $3P3$.
o v s M a x

Fig. 17 und 17 bis) P . ∞P . $\infty P\infty$. $3P3$ $5P5$.
o M a x z

Fig. 18 und 18 bis) ∞P . $\infty P\infty$. $3P3$.
M a x

Fig. 19 und 19 bis) P . $\infty P\infty$. $3P3$.
o a x

Fig. 20 und 20 bis) P . $2P$.
o v

Fig. 21 und 21 bis) P . $2P$. ∞P .
o v M

Fig. 22 und 22 bis) $P\infty$.
t

Fig. 23 und 23 bis) P . $P\infty$. $3P3$.
o t x

Fig. 24 und 24 bis) P . $P\infty$. ∞P . $\infty P\infty$. $3P3$.
o t M a x

Zirkon vom Ural.

Man findet den Zirkon im Ural: anstehend in granitähnlichen Felsarten, und lose in verschiedenen Seifengebirgen.

Anstehend kommt der Zirkon in sehr ausgezeichneten Varietäten, und in ziemlich grosser Menge an mehreren Stellen des Ilmengebirges, besonders in der Umgegend des Ilmensees, und als Seltenheit und von weisser Farbe in der Mineralgrube Achmatowsk vor.

Im Ilmengebirge wurde der Zirkon im Jahre 1826 von Menge entdeckt[1]). Der Zirkon aus dieser Localität zeichnet sich im Allgemeinen durch besondere Schönheit seiner Krystalle aus, die gewöhnlich stark glänzend, bisweilen ganz oder wenigstens stellenweise durchsichtig und oft sehr bedeutend gross sind. Ihre Grösse ist sehr verschieden, sie variiren von der Grösse eines Stecknadelkopfes bis zu einer Länge von 4 Centimeter, und in einigen doch seltenen Fällen, begegnet man auch Krystallen, die eine Länge von 17

1) Труды Императорскаго Минералогическаго Общества въ Ст.-Петербургѣ. 1830, часть I, стр. 249.

Centimeter erreichen. So trifft man z. B. im Museum des Berginstituts zu St. Petersburg einen Krystall der 17 Centimeter lang ist, 10 Centimeter im grössten Durchmesser hat, und der 8 Pfund und 66 Zolotnik wiegt. Die Farbe des Zirkons aus dieser Localität wechselt, theils mehr theils weniger, zwischen gelb und röthlichbraun oder bräunlichroth. Die Krystalle, die in einem Gemenge von Feldspath, Eläolith und schwarzem Glimmer (welches Gustav Rose Miascit nennt) vorkommen, sind gelb; die kleineren derselben sind häufig ganz durchsichtig, die grösseren dagegen bloss an einigen Stellen durchsichtig, indem sie gewöhnlich in ihrem Inneren Sprünge und Klüfte haben, die ihrer Durchsichtigkeit schaden. Sie sind stark glänzend. Ihr specifisches Gewicht ist nach der Bestimmung von Gustav Rose = 4,663 [1]). Diese Zirkone trifft man, wie schon Gustav Rose erwähnt, gewöhnlich im Feldspath und Glimmer eingewachsen, sehr selten im Eläolith, und dann zwar nur in kleinen Krystallen. Ihre Combinationen sind auf Fig. 2, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16 und 20 abgebildet. Die Flächen der Grundpyramide $o = P$ und des tetragonalen Prismas der ersten Art $M = \infty P$ sind gewöhnlich glatt und glänzend, die Flächen der anderen tetragonalen Pyramiden $v = 2P$ und $s = 3P$ sind weniger glänzend und häufig in der Quere gestreift; die Flächen des tetragonalen Prismas der zweiten Art $a = \infty P\infty$ sind glänzend, aber meistentheils ganz drusig und nur sehr selten glatt; die Flächen der ditetragonalen Pyramide $x = 3P3$ sind zuweilen so glatt und glänzend wie die Flächen der Grundpyramide. In den Schurfen, die am schwarzen Glimmer vorzüglich reich sind, begegnet man sehr grossen bräunlichrothen Zirkonkrystallen von der Form der Fig. 1, 6, 12 und 21. Die Zirkonkrystalle, die hier in einer anderen, aus Feldspath, Albit und schwarzem Glimmer bestehenden Felsart vorkommen, sind in Form und Farbe ganz verschieden von den Vorigen, was auch schon Gustav Rose bemerkt hat. Diese letzten Krystalle erscheinen nämlich, nach dem eben erwähnten Gelehrten, in der sogenannten Hyazinthkrystallisation; die Flächen des tetragonalen Prismas der zweiten Art $a = \infty P\infty$ herrschen sehr vor und die Flächen der Grundpyramide $o = P$ erscheinen auf den Kanten dieses Prismas aufgesetzt; bei den grösseren Krystallen finden sich gewöhnlich auch noch die Flächen des tetragonalen Prismas der ersten Art $M = \infty P$, als mehr oder weniger schmale Abstumpfungsflächen der Kanten des Prismas $a = \infty P\infty$ und selbst die spitzern Pyramiden über diesen. In seltenen Fällen begegnet man auch an einigen Krystallen die Flächen der ditetragonalen Pyramiden $x = 3P3$ und $z = 5P5$. (Vergl. die Fig. 3, 4, 5, 8, 17 und 19). Ihre Farbe ist bräunlichroth. Die kleinen Krystalle sind ganz, die grösseren wenigstens stellenweise durchsichtig, dabei stark glänzend. Das specifische Gewicht mehrerer Krystalle fand Gustav Rose = 4,642 [2]). In einigen weiter gelegenen Stellen kommen gelblichbraune an den Kanten durchscheinende Zirkonkrystalle zusammen mit Pyrochlor und Aeschynit verwachsen vor. Nach Exemplaren zu urtheilen, die ich in

1) Zu diesem Zwecke wurden mehrere kleine durchsichtige Bruchstücke verwandt. (G. Rose. Reise nach dem Ural und Altai, Berlin 1842, zweiter Bd. S. 59).

2) Gustav Rose. Reise nach dem Ural und Altai, Berlin, 1842, zweiter Band, S. 63.

der Sammlung meines verehrten Freundes P. v. Kotschubey gesehen habe, so begegnet man auch bisweilen ganz kleine Zirkonkrystalle auf Korund aufgewachsen. In den topasführenden Granitgängen des Ilmengebirges trifft man kleine undurchsichtige Zirkonkrystalle von Hyazinthform, aber nur sehr unvollkommen ausgebildet und meistentheils im Albit eingewachsen, zusammen mit grünem Feldspath. Endlich findet sich der Zirkon, nach Gustav Rose, in ziemlich grossen undurchsichtigen Krystallen, von gelblichbrauner Farbe in der sogenannten Zirkonkrystallisation, jedoch mit kleinen Flächen des Prismas, in dem Syenit von Turgojaksk bei Miask, und in viel kleineren Krystallen von derselben Form und Undurchsichtigkeit, aber gelber Farbe, in der breitstängligen grünen Hornblende des Ilmengebirges.

In der Mineralgrube Achmatowsk begegnet man den Zirkon höchst selten und dann von weisser Farbe; sein Vorkommen in diesem Fundorte wurde bisher noch von Niemand erwähnt. Während meines Aufenthalts im Ural im Jahre 1856, wollte mein Freund K. v. Romanowsky meine Meinung über die Natur eines weissen Krystalls wissen, der aus der Grube Achmatowsk stammte und der auf einer schönen Druse von Klinochlorkrystallen (Ripidolith, v. Kobell) aufgewachsen war. Ich erkannte den Krystall für Zirkon. Der erwähnte Krystall war von weisser Farbe, bloss an den Kanten durchscheinend, ungefähr 15 Millimeter lang und ungefähr 5 Millimeter dick. Dass ist das einzige Zirkonexemplar aus Achmatowsk, welches mir bisher zu Gesichte gekommen ist.

Lose im Seifengebirge, kommt der Zirkon, nach der Beschreibung von Gustav Rose, gewöhnlich in kleinen, in der Regel fast mikroskopischen Krystallen vor. Diese Krystalle sind dadurch merkwürdig, dass sie wasserhell oder gelblichweiss und dabei sehr glattflächig sind und starken Demantglanz besitzen. Ihre Krystallisation ist auch ganz verschieden von der der Zirkone, welche anstehend in verschiedenen Stellen in der Umgegend des Ilmensees vorkommen, und zeichnet sich vorzüglichst durch das Vorherrschen der Flächen der ditetragonalen Pyramide $x = 3P3$ aus. Die eben erwähnten Krystalle wurden zuerst von Gustav Rose[1]) beschrieben und bei uns sind sie auf Fig. 18 dargestellt. So findet sich der Zirkon in den Seifenwerken Perwopawlowsk, Mariinsk und Klenowsk (bei der Hütte Beresowsk), in den Seifenwerken Neiwinsk, Neiwinsko-Stolbinskoi (bei der Hütte Newjansk) und in einigen anderen Seifenwerken.

Zirkon vom Tunkinskischen Gebirge.

Im Tunkinskischen Gebirge kommt der Zirkon in der, dem Herrn Alibert gehörenden, Graphitgrube Mariinskaja vor. Ich habe diesen Zirkon schon im Jahre 1853 beschrieben[2]). Nämlich in der Sitzung der K. K. Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg am 8. März des Jahres 1853, überreichte das wirkliche Mitglied derselben, General-Major v. Ste-

1) Gustav Rose. Reise nach dem Ural und Altai, Bd. 1, S. 228, 231, 233 und 236, Bd. II, S. 143.

2) Verhandlungen der K. K. Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg. Jahrg. 1852 u. 1853. S. 333.

phan, im Namen seiner Excellenz des Kriegs-Gouverneurs von Irkutsk K. K. v. Wenzel eine Sendung von Mineralien, welcher folgendes Schreiben des Kriegs-Gouverneurs, beigefügt war:

«Die Mineralien stammen aus der Fundgrube Mariinskaja, in dem Tunkinskischen «Gebirge, gegen 400 Werst westlich von Irkutsk, unweit der Chinesischen Grenze. Die «genannte Grube gehört dem Herrn Alibert, der hier einen ausgezeichnet reinen und «milden Graphit zu Tage fördert. Das Tunkinskische Gebirge bildet einen Seitenzweig «des Ssajanskischen Gebirgszuges, mit welchem es parallel streicht. Derselbe ist nicht sehr «hoch, denn seine hervorragendsten Punkte erreichen, wie es scheint, kaum mehr als «6000 Fuss, von welcher Höhe aber, neun Zehntheile, aus schroffen, zerklüfteten und «mannigfach zerrissenen, die abenteurlichsten Formen bietenden und die Untersuchung «ungemein erschwerenden, Felsen bestehen. Von der Ferne aus gleicht das Tunkinskische «Gebirge einem Gewölk, welches sich in mehreren Etagen über den Horizont erhebt».

Diese Mineralien-Sendung aus der Grube Mariinskaja, die mir von der Gesellschaft zur näheren Bestimmung übergeben wurde, enthielt unter anderen Mineralien, wie z. B. gelben Cancrinit, Graphit, Moroxit, Eisenkies und Magneteisenerz, auch einige einzelne und in der Felsart eingewachsene Zirkonkrystalle. Der grösste von diesen letzteren war das Bruchstück eines grossen Krystalls, von 1,5 Centimeter im Durchmesser. Seinem Aeusseren nach hatte der Krystall einige Aehnlichkeit mit einigen Zirkonkrystallen des Urals. Er bot nämlich die Form des tetragonalen Prismas der ersten Art $M = \infty P$ dar, dessen Kanten durch die schmalen Flächen des tetragonalen Prismas der zweiten Art $a = \infty P\infty$ abgestumpft sind und dessen Enden durch die Flächen der tetragonalen Grundpyramide $o = P$, der tetragonalen Pyramide $s = 3P$ und der ditetragonalen Pyramide $x = 3P3$ begränzt sind (Fig. 10). Die kleineren Krystalle, welche im grobkörnigen Granite eingewachsen waren, boten fast dieselbe Krystallform, als der eben beschriebene grosse Krystall dar. Der tunkinsker Zirkon ist an den Kanten durchscheinend, von brauner Farbe und theilweis schaaliger Textur, wie man dieselbe hin und wieder an einigen Krystallen des Vesuvians vom Wilui und sogar an manchen Zirkonkrystallen vom Ural beobachtet. Vor dem Löthrohr schmilzt er nicht, nimmt jedoch eine weisse Farbe an; mit Borax schmilzt er schwer zu einer durchsichtigen Perle. Im Allgemeinen zeigt das Mineral alle dem Zirkon aus anderen Localitäten eigenthümlichen Erscheinungen.

Zirkon aus dem Tomskischen Gouvernement.

Hier wurden, im Jahre 1843, vom General-Major des Bergkorps Professor E. von Hofmann einige lose Zirkonkrystalle im Sande der Goldwäsche Ilginsk, am Bache Kelbess in der Tomskischen Taiga, im Kreise von Atschinsk entdeckt. Diese Zirkonkrystalle sind in Russland mehr unter dem Namen «Engelhardit» als Zirkon bekannt. Sie sind ganz farblos oder von hellgelblichweisser Farbe, ganz durchsichtig ohne die geringsten Risse,

stark glänzend von demantartigem Glanz und ziemlich gross, denn einige derselben erreichen eine Grösse von 12 Millimeter im grössten Durchmesser. Ihre Krystallisation ist eine ganz merkwürdige und ganz verschiedene von allen bis jetzt bekannten Zirkonen, woher es vielleicht besser wäre, den für sie vorgeschlagenen Namen «Engelhardit» beizubehalten. Die Engelharditkrystalle bieten nämlich grösstentheils die Form einer tetragonalen Pyramide dar, die aber nicht die gewöhnliche Grundpyramide des Zirkons, oder eine von den tetragonalen Pyramiden der ersten Art, sondern die tetragonale Pyramide der zweiten Art (erste stumpfere tetragonale Pyramide) $t = P\infty$ (Fig. 22) ist. In einigen Krystallen sind die Mittelecken dieser Pyramide, durch die mehr oder weniger schmalen Flächen der ditetragonalen Pyramide $x = 3P3$, zugespitzt, und durch die kleinen Flächen der Grundpyramide $o = P$ zugeschärft (Fig. 23). Endlich bieten, zwar in seltenen Fällen, die Krystalle die Form der Fig. 24 dar, eine Combination, in welcher auch die Flächen des tetragonalen Prismas der ersten Art $M = \infty P$ und des tetragonalen Prismas der zweiten Art $a = \infty P\infty$ eintreten. An einigen Krystallen sind die Flächen aller dieser Formen ziemlich glatt und glänzend, an anderen dagegen glänzend, aber mehr oder weniger abgerundet.

Ich habe diese Krystalle bloss annäherungsweise messen können. Der grösste Theil der Messungen wurde mit dem gewöhnlichen Wollaston'schen Goniometer ausgeführt, und bloss zwei Winkel wurden, auch nur annäherungsweise, mit dem Mitscherlich'schen Goniometer, welches bloss mit einem Fernrohre versehen war, gemessen. Die Resultate der letzten Messungen sind folgende:

Für $o : o$.

(In den Mittelkanten).

An einem Krystalle $= 84° 21' 45''$ (im gewöhnlichen Zirkon ist dieser Winkel $= 84° 19' 46''$).

Für $t : t$.

(In den Polkanten).

An einem Krystalle $= 135° 18' 20''$
Am anderen Krystalle $= 135\ 19\ 0$

Mittel $= 135° 18' 40''$

(Im gewöhnlichen Zirkon ist dieser Winkel $= 135° 10' 6''$).

Wenn sich mir in dieser Abhandlung die Gelegenheit geboten hat, die Beschreibung der Engelharditkrystalle zu geben, so verdanke ich dieselbe der Güte des General-Majors Professors v. Hofmann, der, sobald er in Erfahrung brachte, dass ich mich mit der Beschreibung des Zirkons beschäftige, mir alle Krystalle dieses Minerals, die sich in seinem Besitze befanden, mit folgendem Briefe sandte:

«Ich schicke Ihnen meinen ganzen Vorrath von Engelhardit-Stücken, an welchen «noch einige Krystallflächen zu sehen sind, deutlich genug, um die Flächen eines Quadrat-

«octaëders zu erkennen. Sie sind alle 12 aus dem Sande der Goldwäsche Ilginsk am «Bache Kelbess in der Tomskischen Taiga, im Kreise von Atschinsk. Die Goldwäsche ge- «hörte Fedor Petrowitsch Solowiew, von dem ich 1843 vier kleine Krystalle bekam. «Ich fand die Härte über Quarz und das specifische Gewicht = 4,3 bis 4,4; beides führte «mich auf Zirkon, aber die Krystallform erschien mir fremd. Ich theilte die 4 Krystalle «Nordenskiöld mit, der sie mass und für zwei- und eingliederig hielt, und mir beifolgen- «des Modell schickte. Nun glaubte ich mich berechtigt, sie für eine neue Species zu halten, «welche ich Engelhardit nach meinem Lehrer nannte. Ich hatte unterdessen Solowiew «gebeten, mir mehr Material zu schicken. Obgleich die Goldwäsche schon verlassen war, «so schickte er dorthin und ich bekam einige Gramm abgerundete Körner, unter denen «aber auch Krystalle waren, welche mir deutlich die Form eines Quadratoctaëders zeigten. «Da ich nun überzeugt wurde, dass es nur eine Varietät von Zirkon sei, so habe ich die «Sache weiter nicht bekannt gemacht, obgleich Nordenskiöld dafür war, der, nach seiner «Ansicht von der Species, mich für berechtigt hielt, den Namen Engelhardit beizubehalten. «Da er vermuthete, dass diese Varietät viel Nord-Erde enthielt, welche Svanberg im «Norwegischen Zirkon gefunden hatte, so wünschte er eine Analyse, die Svanberg an- «stellen sollte. Ich übergab Nordenskiöld den grössten Theil der abgerundeten Körner, «er hat sie an Svanberg befördert, schon vor 5—6 Jahren, aber als ich ihn im vorigen «Jahre sah, hatte er noch keine Nachricht, und so steht die Sache bis jetzt. Hat Svan- «berg etwas publicirt, ich weiss es nicht. Benutzen Sie die Steine zur Beschreibung, und «geben Sie sie mir dann zurück, wenn Sie sie nicht mehr brauchen. Sie haben nur den «Namen Engelhardit getragen».

Winkel der Krystalle des Zirkons.

Wenn man das, in der allgemeinen Charakteristik gegebene, Axenverhältniss der Grundform, $a : b : b = 0{,}640373 : 1 : 1$ annimmt, so ergeben sich folgende Winkel:

Durch Rechnung.	Durch Messung [1]).
$\left.\begin{matrix}o:o\\ \text{in } X\end{matrix}\right\} = 123°\ 19'\ 34''$	$123°\ 20'\ 8''$ * Kupffer.
	123 20 34 * } Kokscharow.
	123 20 21 ** }
$\left.\begin{matrix}o:o\\ \text{in } Z\end{matrix}\right\} = 84\ 19\ 46$	84 19 50 * Kupffer.
	84 19 46 * Kokscharow.
$\left.\begin{matrix}o:o\\ \text{an der}\\ \text{Spitze}\end{matrix}\right\} = 95\ 40\ 14$	95 39 41 * }
	95 40 14 ** } Kupffer.
	95 41 50 * }
	95 40 56 ** } Kokscharow.

1) Hier sind die unmittelbar gefundenen Winkel mit * und die als Endresultat erhaltenen mit ** bezeichnet.

Durch Rechnung.		Durch Messung.
$o : M$	$= 132° 9' 53''$	$132° 10' 42''$ * Kupffer.
		$132 \quad 9 \quad 53$ * Kokscharow.

Durch Rechnung.

$o : a$	$= 118° 20' 13''$	$v : x$	$= 156° 21' 37''$	$x : a$	$= 148° 16' 46''$
$o : v$	$= 161 \quad 4 \quad 5$	$\frac{s : s}{\text{in } X}$	$= 96 \quad 51 \quad 8$	$\frac{x : x}{\text{in } X}$	$= 147 \quad 3 \quad 24$
$o : s$	$= 152 \quad 22 \quad 19$	$s : M$	$= 159 \quad 47 \quad 34$	$\frac{x : x}{\text{in } Y}$	$= 132 \quad 43 \quad 12$
$o : x$	$= 150 \quad 3 \quad 28$	$s : a$	$= 131 \quad 34 \quad 26$	$z : M$	$= 142 \quad 42 \quad 36$
$o : z$	$= 138 \quad 41 \quad 8$	$s : x$	$= 154 \quad 53 \quad 52$	$z : a$	$= 159 \quad 39 \quad 7$
$o : t$	$= 151 \quad 39 \quad 47$	$\frac{t : t}{\text{in } Y}$	$= 135 \quad 10 \quad 6$	$\frac{z : z}{\text{in } X}$	$= 158 \quad 23 \quad 2$
$\frac{v : v}{\text{in } X}$	$= 103 \quad 30 \quad 36$	$t : M$	$= 112 \quad 24 \quad 57$	$\frac{z : z}{\text{in } Y}$	$= 115 \quad 56 \quad 14$
$v : M$	$= 151 \quad 5 \quad 48$	$t : a$	$= 122 \quad 38 \quad 4$	$M : M$	$= 90 \quad 0 \quad 0$
$v : a$	$= 128 \quad 14 \quad 42$	$t : x$	$= 146 \quad 15 \quad 47$	$M : a$	$= 135 \quad 0 \quad 0$
$v : s$	$= 171 \quad 18 \quad 14$	$x : M$	$= 143 \quad 19 \quad 8$		

Bezeichnen wir jetzt im Allgemeinen:

In den ditetragonalen Pyramiden mPn.

Die normalen Polkanten durch X.
Die diagonalen Polkanten durch Y.
Die Mittelkanten durch Z.

In den tetragonalen Pyramiden der ersten Art mP.

Die Polkanten durch X.
Die Mittelkanten durch Z.
Den Neigungswinkel der Fläche zur Verticalaxe a durch i.
Den Neigungswinkel der Polkante zur Verticalaxe a durch r.

In den tetragonalen Pyramiden der zweiten Art $mP\infty$.

Die Polkanten durch Y.
Die Mittelkanten durch Z.
Den Neigungswinkel der Fläche zur Verticalaxe a durch i.
Den Neigungswinkel der Polkante zur Verticalaxe a durch r.

Diese Bezeichnung beibehaltend, erhalten wir ferner durch Rechnung:

Für $o = P$.

$\frac{1}{2} X = 61° 39' 47''$ $\qquad X = 123° 19' 34''$
$\frac{1}{2} Z = 42 \quad 9 \quad 53$ $\qquad Z = 84 \quad 19 \quad 46$
$= 47° 50' 7''$
$r = 57 \quad 21 \quad 56$

Für $v = 2P$.

$\frac{1}{2}X = 51° 45' 18''$ $\quad X = 103° 30' 36''$
$\frac{1}{2}Z = 61 \ \ 5 \ 48$ $\quad Z = 122 \ 11 \ 36$
$i = 28° 54' 12''$
$r = 37 \ 58 \ 57$

Für $s = 3P$.

$\frac{1}{2}X = 48° 25' 34''$ $\quad X = \ 96° 51' 8''$
$\frac{1}{2}Z = 69 \ 47 \ 34$ $\quad Z = 139 \ 35 \ 8$
$i = 20° 12' 26''$
$r = 27 \ 29 \ 54$

Für $t = P\infty$.

$\frac{1}{2}Y = 67° 35' 3''$ $\quad Y = 135° 10' 6''$
$\frac{1}{2}Z = 32 \ 38 \ 4$ $\quad Z = \ 65 \ 16 \ 8$
$i = 57° 21' 56''$
$r = 65 \ 38 \ 18$

Für $x = 3P3$.

$\frac{1}{2}X = 73° 31' 42''$ $\quad X = 147° \ 3' 24''$
$\frac{1}{2}Y = 66 \ 21 \ 36$ $\quad Y = 132 \ 43 \ 12$
$\frac{1}{2}Z = 63 \ 43 \ 8$ $\quad Z = 127 \ 26 \ 16$

Für $z = 5P5$.

$\frac{1}{2}X = 79° 11' 31''$ $\quad X = 158° 23' \ 2''$
$\frac{1}{2}Y = 57 \ 58 \ 7$ $\quad Y = 115 \ 56 \ 14$
$\frac{1}{2}Z = 72 \ 58 \ 22$ $\quad Z = 145 \ 56 \ 44$

Resultate der Krystallmessungen des russischen Zirkons.

Ich habe sechs kleine Zirkonkrystalle vom Ilmengebirge gemessen. Diese Krystalle waren ziemlich gut ausgebildet, vorzüglich der Krystall Nr. 1. Alle Messungen, mit Ausnahme der $_{(14)}$, wurden mit Hilfe des Mitscherlich'schen Goniometers, welches bloss mit einem Fernrohre versehen war, ausgeführt. Die Messung $_{(14)}$ wurde am Goniometer, welches mit zwei Fernröhren versehen war, vollzogen.

Folgendes sind die erhaltenen Resultate [1]):

1) Ich bezeichne hier jede Fläche des oberen Endes vom Krystalle durch eine besondere Zahl, z. B. o_1, o_2 u. s. w. Die Flächen des unteren Endes vom Krystalle dnrch dieselben Zahlen, nur mit dem Unterschiede, dass dieselben eingeklammert sind.

Für die doppelte Neigung der Fläche der Grundpyramide $o = P$ zur Verticalaxe.

Am Krystall Nr. 1.

$o_1 : o_3 = 95° 42' 0''$ (1)
$(o_1) : (o_3) = 95\ 40\ 10$
$95\ 40\ 0$
Mittel $= 95° 40' 5''$ (2)
$o_2 : o_4 = 95° 44' 10''$
$95\ 45\ 0$
Mittel $= 95° 44' 35''$ (3)
$(o_2) : (o_4) = 95\ 42\ 0$
$95\ 38\ 40$
Mittel $= 95° 40' 20''$ (4)
$o_1 : (o_3) = 84\ 20\ 50$
$84\ 20\ 0$
Mittel $= 84° 20' 25''$ also
Complement $= 95\ 39\ 35$ (5)
$(o_1) : o_3 = 84\ 19\ 55$
$84\ 20\ 0$
Mittel $= 84° 19' 58''$ also
Complement $= 95\ 40\ 2$ (6)
$o_2 : (o_4) = 84\ 21\ 0$, also
Complement $= 95\ 39\ 0$ (7)
$o_4 : (o_2) = 84\ 14\ 40$, also
Complement $= 95\ 45\ 20$ (8)
$o_2 : M_2 = 132\ 10\ 0$, also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 40\ 0$ (9)
$o_3 : M_3 = 132\ 11\ 30$, also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 37\ 0$ (10)

Am Krystall Nr. 2.

$o_1 : (o_3) = 84° 21' 20''$ also
Complement $= 95\ 38\ 40$ (11)
$o_1 : M_1 = 132\ 11\ 0$, also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 38\ 0$ (12)
$(o_3) : M_1 = 132° 8' 30''$ also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 43\ 0$ (13)

Am Krystall Nr. 3.

$o_1 : o_3 = 95° 41' 30''$ (14) mit 2 Fernr.

Am Krystall Nr. 4.

$o_1 : o_3 = 95° 46' 0''$ (15)
$(o_1) : (o_3) = 95\ 38\ 0$ (16)
$o_2 : o_4 = 95\ 40\ 30$ (17)
$(o_2) : (o_4) = 95\ 40\ 0$ (18)
$o_2 : (o_4) = 84\ 20\ 0$, also
Complement $= 95\ 40\ 0$ (19)
$o_4 : (o_2) = 84\ 21\ 45$, also
Complement $= 95\ 38\ 15$ (20)

Am Krystall Nr. 5.

$o_1 : o_3 = 95° 38' 40''$ (21)
$(o_1) : (o_3) = 95\ 40\ 0$ (22)
$o_2 : o_4 = 95\ 44\ 0$ (23)
$(o_2) : (o_4) = 95\ 44\ 45$ (24)
$o_3 : (o_1) = 84\ 24\ 0$, also
Complement $= 95\ 36\ 0$ (25)
$o_2 : (o_1) = 84\ 20\ 0$, also
Complement $= 95\ 40\ 0$ (26)
$o_4 : (o_2) = 84\ 14\ 20$, also
Complement $= 95\ 45\ 40$ (27)
$o_1 : M_1 = 132\ 8\ 30$, also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 43\ 0$ (28)
$o_4 : M_4 = 132\ 7\ 40$, also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 44\ 40$ (29)
$(o_1) : M_3 = 132\ 12\ 0$, also
$\overset{o:o}{\text{an der Spitze}} = 95\ 36\ 0$ (30)

Am Krystall Nr. 6.

$(o_1) : (o_3) = 95^\circ\ 45'\ 15''$ (31)
$o_1 : (o_3) = 84\ \ 20\ \ 0$, also
Complement $= 95\ \ 40\ \ 0$ (32)

Der mittelste Werth beträgt also aus den Messungen (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28), (29), (30), (31) und (32):

$o : o$ an der Spitze $= 95^\circ\ 40'\ 56''$

Für die Neigung der Flächen der Grundpyramide $o = P$ in den Polkanten.

Am Krystall Nr. 1.

$o_1 : o_2 = 123^\circ\ 20'\ 50''$
$123\ \ 21\ \ 17$
Mittel $= 123^\circ\ 21'\ 4''$ (33)
$(o_1) : (o_2) = 123\ \ 21\ \ 50$ (34)
$o_1 : o_4 = 123\ \ 23\ \ 0$ (35)
$(o_1) : (o_4) = 123\ \ 17\ \ 53$ (36)
$o_3 : o_4 = 123\ \ 20\ \ \mathbf{7}$ (37)
$(o_3) : (o_4) = 123\ \ 23\ \ 15$ (38)
$o_2 : o_3 = 123\ \ 21\ \ 17$ (39)
$(o_2) : (o_3) = 123\ \ 19\ \ 33$ (40)
$o_1 : (o_2) = \ \ 56\ \ 37\ \ 40$, also
Complement $= 123\ \ 22\ \ 20$ (41)
$o_2 : (o_1) = \ \ 56\ \ 43\ \ 10$, also
Complement $= 123\ \ 16\ \ 50$ (42)
$o_1 : (o_4) = \ \ 56^\circ\ 45'\ 43''$, also
Complement $= 123\ \ 14\ \ 17$ (43)
$o_4 : (o_1) = \ \ 56\ \ 35\ \ 10$, also
Complement $= 123\ \ 24\ \ 50$ (44)
$o_4 : (o_2) = \ \ 56\ \ 36\ \ 50$, also
Complement $= 123\ \ 23\ \ 10$ (45)
$o_3 : (o_4) = \ \ 56\ \ 40\ \ 53$, also
Complement $= 123\ \ 19\ \ \ 7$ (46)
$o_2 : (o_3) = \ \ 56\ \ 41\ \ \ 0$, also
Complement $= 123\ \ 19\ \ \ 0$ (47)
$o_3 : (o_2) = \ \ 56\ \ 38\ \ 50$, also
Complement $= 123\ \ 21\ \ 10$ (48)

Am Krystall Nr. 2.

$o_1 : o_4 = 123^\circ\ 17'\ 10''$ (49)

Der mittelste Werth aus den Messungen (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47), (48) und (49) beträgt also:

$o : o$ in den Polkanten $= \mathbf{123^\circ\ 20'\ 21''}$

Die mittleren Werthe, für die nicht reducirten, d. h. directen Messungen, werden folgende sein:

$o : o$, in den Polkanten, aus den Messungen (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40) und (49) $= 123^\circ\ 20'\ 34''$.

$o : o$, an der Spitze, aus den Messungen (1), (2), (3), (4), (14), (15), (16), (17), (18), (21), (22), (23), (24) und (31) $= 95^\circ\ 41'\ 50''$.

$o : o$, in den Mittelkanten, aus den Messungen (5), (6), (7), (8), (11), (19), (20), (25), (26), (27), und (32) $= 84^\circ\ 19'\ 46''$.

$o : o$, bei den Mittelecken, aus den Messungen (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47) und (48) = $56° 39' 55''$.

$o : M$, aus den Messungen (9), (10), (12), (13), (28), (29) und (30) = $132° 9' 53''$.

A. T. v. Kupffer[1]) hat, wie es bekannt ist, den Zirkon vom Ilmengebirge, mit grosser Ausführlichkeit gemessen und folgende Resultate erhalten:

$$
\begin{array}{rl}
(o_3) : M_1 = & 132° 12' 12'' \\
o_1 : M_1 = & 132 \quad 9 \quad 12 \\
\hline
\text{Mittel} = & 132° 10' 42'', \text{ also} \\
\left.\begin{matrix} o : o \\ \text{an der} \\ \text{Spitze} \end{matrix}\right\} = & 95 \quad 38 \quad 36 \quad (a) \\
o_1 : o_3 = & 95 \quad 39 \quad 36 \\
& 95 \quad 39 \quad 36 \\
\hline
\text{Mittel} = & 95° 39' 36'' \quad (b) \\
o_3 : (o_1) = & 84 \quad 18 \quad 12 \\
& 84 \quad 18 \quad 18 \\
\hline
\text{Mittel} = & 84° 18' 15'', \text{ also} \\
\text{Complement} = & 95 \quad 41 \quad 45 \quad (c) \\
o_1 : (o_3) = & 84 \quad 21 \quad 24, \text{ also} \\
\text{Complement} = & 95 \quad 38 \quad 36 \quad (d) \\
(o_3) : (o_1) = & 95 \quad 39 \quad 54 \quad (e)
\end{array}
$$

Der mittelste Werth aus den Messungen (a), (b), (c), (d) und (e) beträgt also:

$$\left.\begin{matrix} o : o \\ \text{an der Spitze} \end{matrix}\right\} 95° 39' 41''$$

$$
\begin{array}{rl}
o_1 : o_5 & 123° 18' 36'' \quad (f) \\
o_3 : o_4 & 123 \quad 21 \quad 0 \quad (g) \\
o_2 : o_3 & 123 \quad 21 \quad 42 \quad (h) \\
o_1 : o_2 & 123 \quad 19 \quad 30 \quad (i) \\
(o_3) : (o_4) & 123 \quad 20 \quad 48 \quad (k) \\
(o_1) : (o_4) & 123 \quad 19 \quad 12 \quad (l)
\end{array}
$$

Der mittelste Werth aus den Messungen (f), (g), (h), (i), (k) und (l) beträgt also:

$$\left.\begin{matrix} o : o \\ \text{in den Polkanten} \end{matrix}\right\} = 123° 20' 8''.$$

A. T. v. Kupffer giebt, nach seiner Art combinirt, für alle diese Messungen als End- und wahrscheinlichstes Resultat:

1) A. T. v. Kupffer. Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen, Berlin, 1825, S. 66.

$$\left.\begin{matrix} o:o \\ \text{an der Spitze} \end{matrix}\right\} = 95^\circ\ 40'\ 14''$$

$$\left.\begin{matrix} o:o \\ \text{in den Polkanten} \end{matrix}\right\} = 123^\circ\ 19'\ 34''$$

Man sieht also, dass meine Messungen mit denen von A. T. v. Kupffer, sehr gut übereinstimmen, was überhaupt schon oben in der allgemeinen Charakteristik erwähnt wurde.

Nachtrag.

Zu der Zeit als meine Abhandlung unter der Presse war, erhielt ich Bd. CVII, 1859 von Poggendorffs Annalen, in welchen H. Dauber die Resultate seiner sehr genauen und zahlreichen Messungen, die er an Zirkonkrystallen aus verschiedenen Localitäten ausgeführt hat, veröffentlicht.

An drei gut ausgebildeten Krystalle aus dem Ilmengebirge fand H. Dauber, durch unmittelbare Messungen, folgende Winkel:

Für die Neigung der Flächen der Grundpyramide $o = P$ in den Polkanten.

$o:o$ in x	=	$123^\circ\ 26'\ 54''$
		$123\ 22\ 42$
		$123\ 22\ 18$
		$123\ 20\ 42$
		$123\ 20\ 42$
		$123\ 20\ 42$
		$123\ 20\ 42$
		$123\ 19\ 42$
		$123\ 19\ 44$
		$123\ 19\ 24$
		$123\ 19\ 12$
		$123\ 17\ 42$
		$123\ 16\ 42$
		$123\ 16\ 42$
Mittel	=	$123^\circ\ 19'\ 55''$

Für die doppelte Neigung der Fläche der Grundpyramide $o = P$ zur Verticalaxe.

$$o : o \text{ an der Spitze} = \begin{array}{r} 95^\circ\ 49'\ 6'' \\ 95\ 42\ 6 \\ 95\ 41\ 6 \\ 95\ 37\ 24 \end{array}$$

$$\text{Mittel} = 95^\circ\ 42'\ 26''$$

Für die Neigung der Fläche der Grundpyramide $o = P$ zur anliegenden Fläche des Prismas $M = \infty P$.

$$o : M = \begin{array}{r} 132^\circ\ 0'\ 36'' \\ 132\ 6\ 36 \\ 132\ 8\ 36 \\ 132\ 13\ 36 \end{array}$$

$$\text{Mittel} = 132^\circ\ 7'\ 21''$$

Nach Reducirung aller dieser Messungen zur Neigung der Flächen o in den Polkanten, hat H. Dauber für den russischen Zirkon im Mittel $o : o = 123^\circ 20' 53''$ erhalten.

Ferner hat derselbe Gelehrte, auch durch zahlreiche Messungen an verschiedenen Krystallen, für die Neigung in den Polkanten gefunden:

Im farblosen Zirkon von Pfitschthal in Tyrol $= 123^\circ\ 20'\ 46''$.

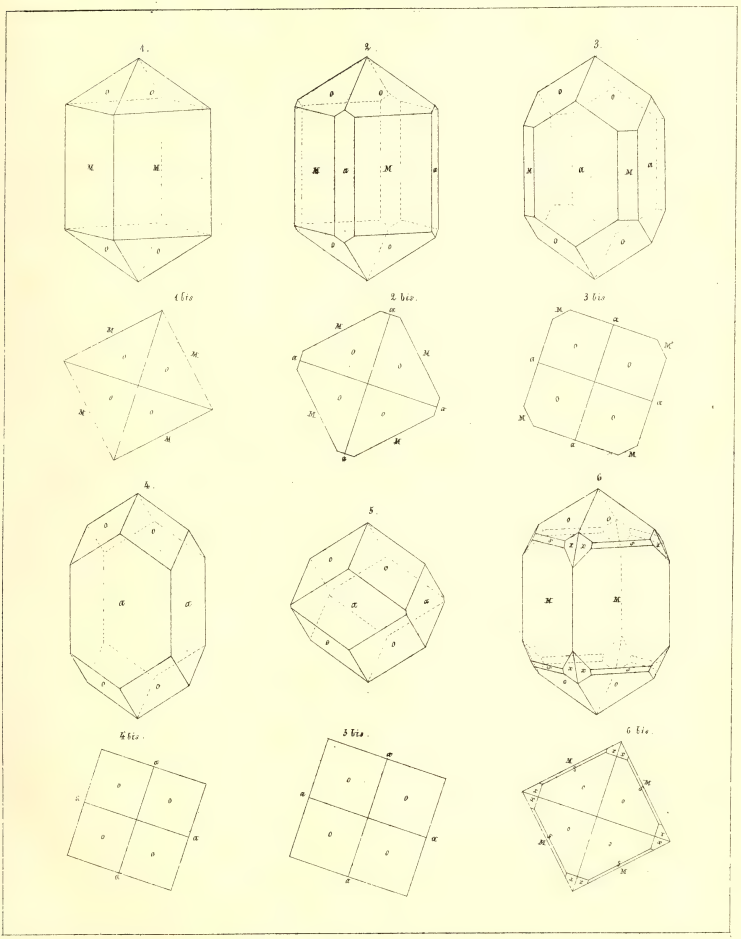
Im Zirkon von Fredrikvärn $= 123^\circ\ 20'\ 33''$.

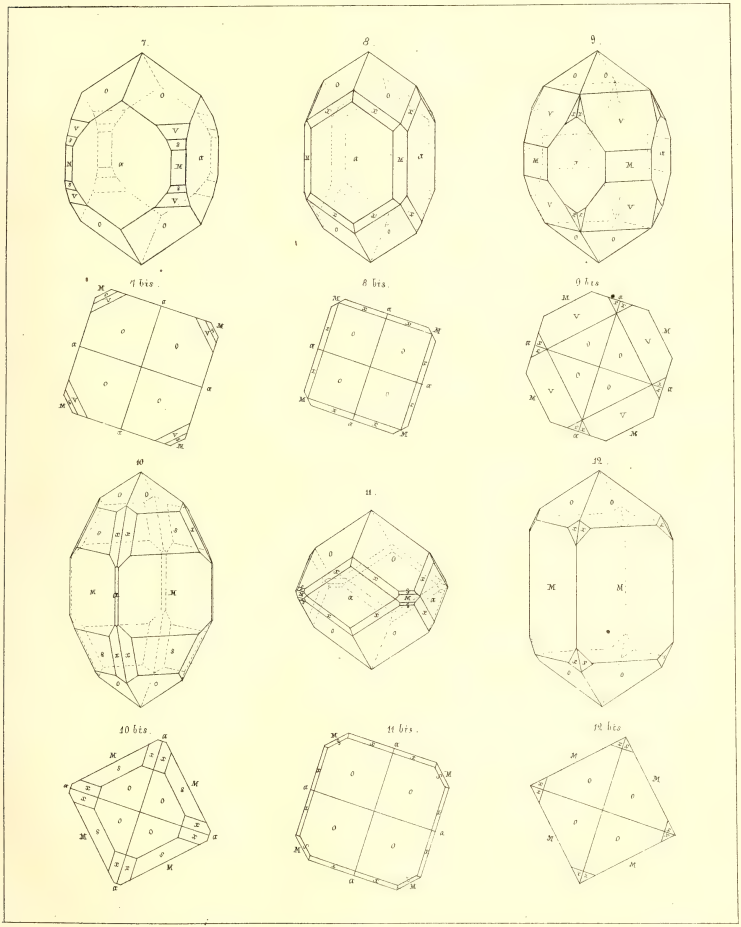
Im Zirkon aus den Geröllen von Ceylon $= 123^\circ\ 19'\ 50''$.

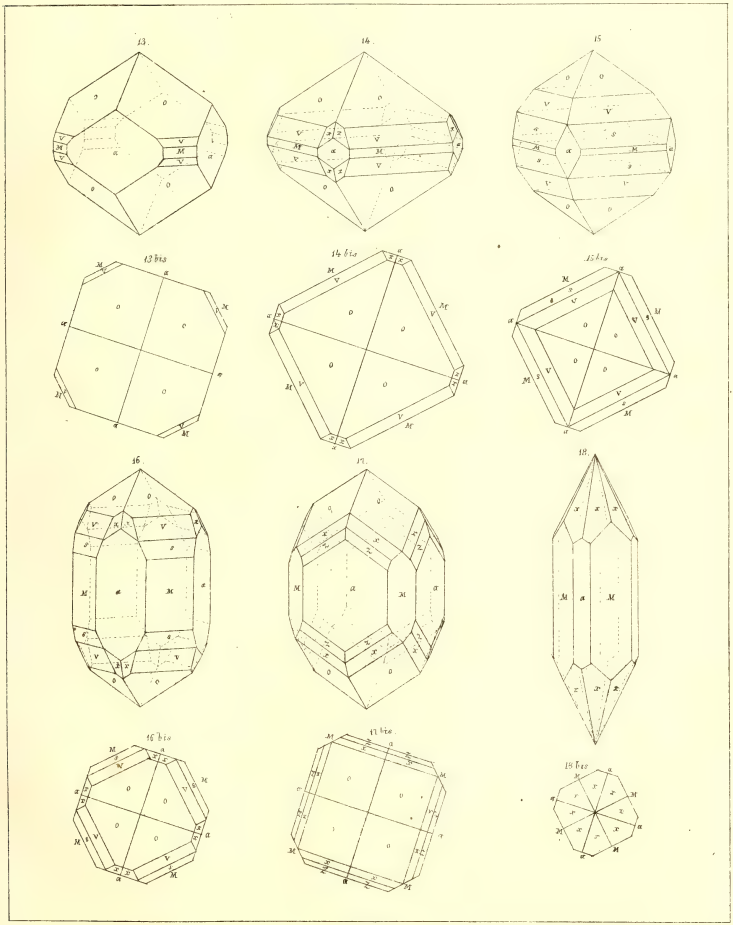
Nach seiner Regel combinirt und auch die Messungen von A. v. Kupffer in Rücksicht nehmend, giebt endlich H. Dauber als Endresultat mit einem wahrscheinlichen Fehler $= 8$ Secunden:

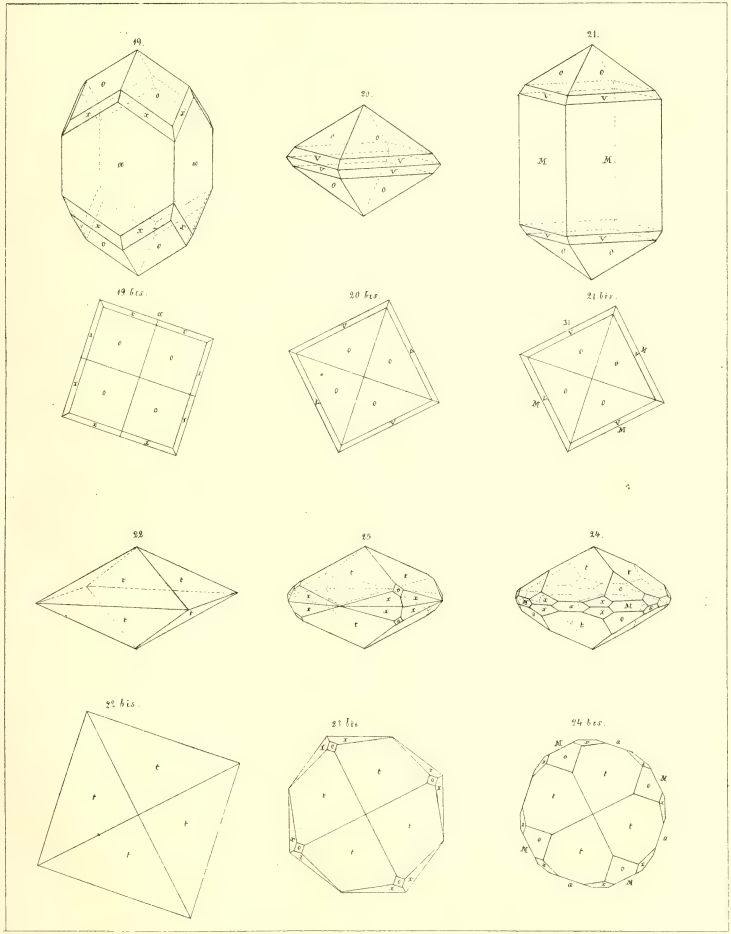
$$o : o \text{ in } X = \mathbf{123^\circ\ 19'\ 57''}.$$

Dies, durch Dauber's Bestimmungen erhaltene Resultat steht im vollkommensten Einklang mit dem von mir erhaltenen. Ebenfalls habe ich durch sehr zahlreiche Messungen für die Neigung der Flächen an der Spitze der Grundpyramide $o = P$ des Zirkons $= 95^\circ\ 40'\ 56''$ gefunden. Nun, wenn man diesen Winkel als Data annimmt, so erhält man durch Rechnung $o : o$ (in X) $= 123^\circ\ 20'\ 0''$ d. h. man findet den Winkel, der sich bloss um 3 Secunden von dem von H. Dauber gegebenem unterscheidet.


1.
2.
3.
1 bis
2 bis
3 bis
4.
5.
6.
4 bis
5 bis
6 bis


7.
8.
9.
7 bis.
8 bis.
9 bis.
10.
11.
12.
10 bis.
11 bis.
12 bis.


13.
14.
15.
13 bis.
14 bis.
15 bis.
16.
17.
18.
16 bis.
17 bis.
18 bis.


19.
19 bis.
20.
20 bis.
21.
21 bis.
22.
23.
24.
24 bis.
25.
25 bis.
26.
26 bis.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 12.

EURIPIDEISCHE STUDIEN.

VON

August Nauck,
Mitgliede der Akademie.

Erster Theil.

Gelesen am 3. Juni 1859.

ST. PETERSBURG, 1859.

Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:

in St. Petersburg	in Riga	in Leipzig
Eggers et Comp.,	Samuel Schmidt,	Leopold Voss.

Preis: 1 R. 10 Kop. = 1 Thlr. 7 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

C. Vesselofski, beständiger Secretär.

Im September 1859.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

EURIPIDEISCHE STUDIEN.

Von **August Nauck.**

Die wichtigsten für die Euripideische Kritik uns zu Gebote stehenden handschriftlichen Hilfsmittel sind erst im Jahre 1855 durch A. Kirchhoff der allgemeinen Benutzung zugänglich geworden. Es geht aus dessen Ausgabe zur Genüge hervor dass der Text dieses Dichters an Entstellungen und Verderbnissen jeder Art in hohem Maasse leidet und dass er besonders, wie es bei einem vielgelesenen, sentenzenreichen und in der Form doch äusserst knappen Autor kaum anders erwartet werden konnte, von ungeschickten Händen in der ausgedehntesten Weise interpolirt worden ist. Natürlich kann unter diesen Umständen von einer auch nur annähernd befriedigenden Emendation des Dichters nicht die Rede sein. Zahllose Fehler werden, falls nicht unerwarteter Weise ein glücklicher Zufall uns neue Quellen erschliessen sollte, für immer wo nicht unentdeckt, doch ungeheilt bleiben. Indess ist dadurch die Berechtigung sich an der Heilung einzelner Schäden zu versuchen nicht ausgeschlossen, und ich glaube dass auch nach allen bisherigen Bemühungen nicht weniges mit vollkommener Sicherheit sich verbessern lässt. Als ich in der Teubnerschen *Bibliotheca scriptorum Graec. et Rom.* den Euripides bearbeitete, die erste Ausgabe erschien 1854, die zweite zu Anfang des Jahres 1857, fand ich mannichfachen Anlass von der bisherigen Ueberlieferung abzuweichen. Eine Begründung der von mir vorgenommenen Textesänderungen war durch den Plan der Sammlung verboten, und später habe ich nur beiläufig über einzelne Stellen mich auszusprechen Gelegenheit gefunden. Das Versäumte nachzuholen wird die Aufgabe der folgenden Blätter sein, die dem doppelten Zwecke dienen sollen, früher geäusserte Ansichten zu begründen und manche Zweifel oder Vermuthungen, die sich inzwischen mir aufgedrängt haben, vorzutragen. Das bereits in meiner zweiten Bearbeitung für die voraufgeschickte *Annotatio critica* befolgte Princip, mich wesentlich an Kirchhoffs Ausgabe anzuschliessen und auf der durch diese Arbeit gewonnenen Grundlage fortzubauen, glaubte ich auch hier festhalten zu müssen, obwohl ich mich dadurch in die Nothwendigkeit versetzt sehen werde einzelne Fragen, die bereits er-

ledigt zu sein schienen, einer neuen Besprechung zu unterwerfen. Uebrigens kann es nicht meine Absicht sein, alle Stellen die zu Bedenken Anlass geben zu verzeichnen: vielmehr werde ich überwiegend positive Ansichten aussprechen und nur in seltneren Fällen solche ἀπορίαι anregen deren λύσεις ich von anderen erwarte.

1. Hecuba.

Πολυμήστορος πρὸς δῶμα Θρῃκίου ξένου,
ὃς τὴν ἀρίστην Χερσονησίαν πλάκα
σπείρει, φίλιππον λαὸν εὐζύνων δορί.

Das handschriftliche Χερρονησίαν hat Kirchhoff mit Unrecht beibehalten, ohne auch nur zu erwähnen dass Brunckes Aenderung Χερσονησίαν durch das Citat bei Stephanus Byz. p. 691,16 bestätigt wird [1]). Dass der Artikel τὴν hier entbehrlich und nicht einmal passend ist, fühlte G. Hermann: statt seines Vorschlages τήνδ' ἀρίστην ist wohl die leichtere Aenderung γῆν ἀρίστην vorzuziehen.

ὦ πότνια χθών,
μελανοπτερύγων μῆτερ ὀνείρων,
ἀποπέμπομαι ἔννυχον ὄψιν,
ἣν περὶ παιδὸς ἐμοῦ τοῦ σωζομένου κατὰ Θρῄκην
ἀμφὶ Πολυξείνης τε φίλης ζυγατρὸς δι' ὀνείρων
εἶδον γὰρ φοβερὰν ὄψιν ἔμαθον ἐδάην.

Die Verbindung der synonymen Begriffe εἶδον ἔμαθον ἐδάην, das völlig unpassende γάρ, die Wiederholung von ὄψιν bei φοβεράν, endlich das aufgelöste Metrum, diese Dinge zusammen genommen weisen auf eine Interpolation hin, und mit Recht hat Hartung die Worte εἶδον γὰρ und ὄψιν ἔμαθον als unecht bezeichnet. Indess auch δι' ὀνείρων ist nach dem voraufgegangenen ἔννυχον ὄψιν ein lästiger Pleonasmus; denn ἔννυχος ὄψις bedeutet eben das Traumbild. Was das Metrum anbelangt, so wird jeder der weiss wie sehr die antiken Dichter nach Symmetrie streben, es wahrscheinlich finden müssen, dass dem ersten Hexameter ἣν — Θρῄκην ein zweiter entsprach, wie bald nachher 90 f. in einem ganz gleichen Falle. Hiernach vermuthe ich

ἣν περὶ παιδὸς ἐμοῦ τοῦ σωζομένου κατὰ Θρῄκην
ἀμφὶ Πολυξείνης τε φίλης φοβερὰν ἐδάημεν.

Der Pluralis ἐδάημεν neben dem Singularis ἀποπέμπομαι darf nicht befremden. So heisst es unten 806: αἰδέσθητί με, εἴκτειρον ἡμᾶς, ὡς γραφεύς τ' ἀποσταθεὶς ἰδοῦ με καὶ ἀνάθρησον οἷ' ἔχω κακά. Vergl. statt vieler anderer Stellen Ion 391: εἰ πρὸς τοῦ θεοῦ κω-

1) In ähnlicher Weise ist das tragische πόρσω wiederholt von den Abschreibern in πόρρω verändert worden; vgl. Eur. Tro. 188, wo die Variante πρόσω auf die ursprüngliche Form hinweist.

λυόμεσθα μὴ μαθεῖν ἃ βούλομαι (nebst Schol. Il. N, 257) und Ion 595: ἦν δ' εἰς τὸ πρῶτον πόλεος ὁρμηθεὶς ζυγὸν ζητῶ τις εἶναι, τῶν μὲν ἀδυνάτων ὕπο μισησόμεσθα.

σώσατε παῖδ' ἐμόν,
ὃς μόνος οἴκων ἄγκυρά τ' ἐμῶν
τὴν χιονώδη Θρῄκην κατέχει.

Das unpassende τε hat ein Byzantinischer Verbesserer in ein müssiges ἔτι verwandelt. Kirchhoff vermuthet ἄγκυρα πέλων, wo das Fehlen des possessiven Pronomen missfällt. Vielleicht darf auch der Umstand gegen Kirchhoffs Vermuthung geltend gemacht werden, dass weder bei Sophocles noch bei Euripides das Participium πέλων sich nachweisen lässt, wogegen Aeschylus Prom. 898 πέλουσαν gebraucht hat[1]). Offenbar hat Meineke Theocr. p. 472 das richtige gesehen, wenn er vorschlägt

ὃς μόνος οἴκων ἄγκυρ' ἁμῶν,

wobei nur gezweifelt werden kann, ob das Wort mit dem Spiritus asper oder lenis zu schreiben sei. Aus ΑΓΚΥΡ'ΑΜΩΝ wurde ΑΓΚΥΡΑ'ΜΩΝ d. h. ἄγκυρα ἐμῶν, und zur Vermeidung des Hiatus schaltete man τ' ein, wie z. B. ποτᾶται ἐπὶ γαῖαν Hipp. 1272 in ποτᾶται δ' ἐπὶ γαῖαν verderbt worden ist.

οὔποτ' ἐμὰ φρὴν ὧδ' ἀλίαστος
φρίσσει ταρβεῖ.

Was φρὴν ἀλίαστος bedeuten soll, dürfte schwer zu sagen sein. Wie der Ursprung und der Gebrauch des Wortes hinlänglich lehren, ist ἀλίαστος derjenige dem man sich nicht entziehen kann. So finden wir μάχη ἀλίαστος, ἀνίη ἀλίαστος, Ὑλάδης ἀλίαστος u. a. Vermuthlich ist zu lesen ἀλίαστον, wie Homer sagt μηδ' ἀλίαστον ὀδύρεο Il. Ω, 549. Zur Bestätigung dieser Vermuthung dient die wenngleich verderbte Glosse in den Anecd. Bekk. p. 383,8: ἀλίαστον· τὸ μάταιον. Εὐριπίδης. ἔστι δὲ τὸ ἀνέγκλητον (offenbar ist zu lesen τὸ ἀνέκκλιτον), ὃ οὐκ ἔστι φυλάξασθαι, κατὰ ἀπόφασιν. Vgl. meine Trag. Gr. fragm. p. 550 f.

εἶδον γὰρ βαλιὰν ἔλαφον λύκου αἵμονι χαλᾷ
σφαζομέναν ἀπ' ἐμῶν γονάτων σπασθεῖσαν ἀνάγκᾳ
οἰκτρῶς. καὶ τόδε δεῖμά μοι.
ἦλθ' ὑπὲρ ἄκρας πύμβου κορυφᾶς
φάντασμ' Ἀχιλέως.

1) Der Tragoedie scheint entlehnt zu sein der Vers
τράπεζα χωρεῖ τῶν λέγων φάτνη πέλει
im Floril. Monac. p. 277, 5 ed. Meinek. und bei Simplicius in Epictet. p. 425. Wenigstens durfte ten Brink ihn nicht dem Menander beilegen wollen. Unrichtig vermuthete Bernhardy in Ersch-Grubers Encyclop. I Bd. 39 p. 147 nach dem Vorgang von H. Grotius, Euripides habe in einer verlorengegangenen Tragoedie gesagt
ὁ βίος γὰρ ὄνομ' ἔχει, πόνος δ' ἔργῳ πέλει.
Plutarch Mor. p. 120 A bietet statt πόνος δ' ἔργῳ πέλει etwas ganz anderes, nämlich πόνος ἐγώ σ'. Hiernach liess sich mit Hinzufügung eines einzigen Buchstaben das ursprüngliche herstellen,
ὁ βίος γὰρ ὄνομ' ἔχει, πόνος γεγώς.

Statt αἵμονι χαλᾷ verlangte A. Hecker im Philologus V p. 510 αἵμοσι χαλαῖς, vermuthlich deshalb, weil der Wolf zwei Füsse gebraucht um seinen Raub zu zerfleischen. Dass der Pluralis stehen konnte lehrt Theocr. epigr. 6,4: τραχὺς γὰρ χαλαῖς ἀμφεπίαξε λύκος. Indess ist auch nicht der leiseste Grund vorhanden den Singularis anzufechten. Es wird genügen auf zwei Stellen der Hecuba zu verweisen, 656: ῥύπτεταί τε παρειάν, δίαιμον ὄνυχα τιθεμένα, und 673: πάντων Ἀχαιῶν διὰ χερός. Andere Belege für den Singularis giebt Pflugk im Herc. Fur. p. 29. In V. 91 ist ἀνάγκᾳ völlig unpassend; denn wie soll es als eine Nothwendigkeit betrachtet werden dass der Wolf das Hirschkalb aus dem Schoosse der Hecuba reisst? und wie soll Hecuba in der gefühllosen Grausamkeit und Mordgier der Hellenen eine Nothwendigkeit erblicken? Auch das Metrum scheint auf einen Fehler hinzuweisen, indem V. 92 einen Fuss zu viel oder zu wenig enthält. Daher hatte Porson, wie ich glaube, Recht ἀνάγκᾳ οἰκτρῶς in ἀνοίκτως zu ändern. Aus dem ursprünglichen σπασθεῖσαν ἀνοίκτως erklärt sich diese Verderbniss ohne Schwierigkeit, wenn man sich erinnert wie leicht hier ανανοικτως statt ανοικτως geschrieben werden konnte.

96 ἀπ᾽ ἐμᾶς οὖν ἀπ᾽ ἐμᾶς τόδε παιδὸς
πέμψατε, δαίμονες, ἱκετεύω.

Der erste dieser Verse ermangelt der Caesur, der zweite widerstrebt jedem rhythmischen Gefühl in so auffallender Weise, dass man sich wundern muss ihn bisher unangefochten zu sehen. Die Rede würde an Kraft und Nachdruck ungemein gewinnen, wenn Hecuba einfach schlöss: ἀπ᾽ ἐμᾶς, ἀπ᾽ ἐμᾶς τόδε παιδός.

145 ζ᾽ Ἀγαμέμνονος ἱκέτις γονάτων.

Es ist schwer zu glauben, dass in anapaestischen Systemen ein correcter Dichter die unmittelbare Aufeinanderfolge eines Daktylus und Anapaestus sich gestattet habe. Die wenigen Beispiele welche für diese Licenz angeführt werden können, scheinen ohne Ausnahme auf Abschreibersünden zu beruhen, und die meisten derselben sind bereits durch die Kritik beseitigt. So zweifle ich denn auch nicht dass der vorliegende Vers verderbt sei. Ehemals habe ich eine Umstellung versucht, Ἀγαμέμνονος ζ᾽ ἱκέτις γονάτων. Gleich berechtigt ist wohl die Aenderung

ζ᾽ Ἀγαμέμνονος ἱκτὴρ γονάτων.

Die Form ἱκτήρ gebraucht Euripides Heracl. 102. 764. Suppl. 10 und als Femininum Sophocles Oed. R. 185: πολλαί τ᾽ ἔπι ματέρες — λυγρῶν πόνων ἱκτῆρες ἐπιστενάχουσιν. Gerade weil die Hecuba angeredet wird, konnte ein Verbesserer leicht darauf verfallen das gewöhnlich masculinisch gebrauchte ἱκτήρ in die Femininform ἱκέτις zu verwandeln, und obendrein lag es nahe statt ἱκτήρ das bekanntere ἱκέτης zu setzen. Aus diesen Gründen halte ich ἱκτήρ für vollkommen gerechtfertigt; die leichteste Emendation wäre freilich

ζ᾽ Ἀγαμέμνονος ἱκτὶς γονάτων.

Allein dagegen ist geltend zu machen, dass ἱκτίς, ein unseren Lexicographen unbekanntes Wort, keine ältere Autorität für sich zu haben scheint als den Alexandrinischen Dichter Lycophron. Hier lesen wir V. 1164:

λιταῖς Ξενείαν ἱκέτιδες γουνούμεναι.

Wer indess beobachtet hat, mit welcher Sorgfalt Lycophron die Auflösungen im Trimeter meidet, wird nicht zweifeln dass wir verbessern müssen

λιταῖς Ξενείαν ἱκτίδες γουνούμεναι.

Die Aenderung von G. Hermann Opusc. V p. 251 ἵκτορες γουνούμεναι entfernt sich ohne Noth von der durch vortreffliche Handschriften geschützten Ueberlieferung und entbehrt innerer Wahrscheinlichkeit.

ἄιε ματέρος
αὐδάν, ὦ τέκνον, ὡς εἰδῇς
οἷαν οἷαν ἀίω φάμαν
περὶ σᾶς ψυχᾶς.

Zu Gunsten des Metrum habe ich ehemals vermuthet dass ὦ und das eine οἷαν zu tilgen sei. Die urkundliche Ueberlieferung zeigt uns jedoch einen andern Weg. Statt εἰδῇς bieten alle guten Handschriften ἴδῃς, was bei der stehenden Verwechselung dieser Formen allerdings als ziemlich irrelevant erscheinen würde, wenn nicht etwas bei weitem wichtigeres hinzukäme: in der besten Handschrift fehlen die Worte οἷαν οἷαν gänzlich. Hiernach wird zu schreiben sein

ἄιε ματέρος
αὐδάν, τέκνον, ὡς ἀίω φάμαν
περὶ σᾶς ψυχᾶς.

Dass die Abschreiber zu den Vocativen gern ein erklärendes ὦ hinzufügten, lässt sich an vielen Beispielen wahrnehmen, wie Or. 160. 161. 186. Vielleicht gehört dahin auch Hec. 186:

ὦ τέκνον τέκνον μελέας ματρός,

wo entweder mit W. Dindorf τέκνον ὦ τέκνον oder wahrscheinlicher τέκνον τέκνον μελέας ματρός zu lesen ist.

187 τί τόδ' ἀγγέλλεις;

Diese Worte würden richtig sein, wenn Hecuba ihrer Tochter Polyxena bereits eine Kunde gebracht hätte von dem sie erwartenden Loose. Da sie aber nach der ersten Ankündigung einer bevorstehenden Trauerbotschaft nur in abgebrochenen Ausrufungen (οἴμοι, τέκνον. αἰαῖ σᾶς ψυχᾶς. τέκνον τέκνον μελέας ματρός) ihrem Schmerze Luft macht, da Polyxena trotz wiederholter Fragen und Bitten noch nichts erfahren hat, so scheint es nicht bloss angemessener sondern absolut nothwendig zu schreiben

τί ποτ' ἀγγέλλεις;

wodurch Polyxena zur endlichen Mittheilung der versprochenen Nachricht drängt. Ueber die Verwechselung von τόδε und ποτέ vgl. Andr. 440:

ὅταν τόδ' ᾖ τάδ', οἴσομεν· σὲ δὲ κτενῶ.

Augenscheinlich ist in dieser Ueberlieferung nichts anderes enthalten als

ὅταν ποτ' ᾖ τάδ', οἴσομεν· σὲ δὲ κτενῶ.

Diejenigen welche meinten, Euripides habe geschrieben ὅταν τόδ' ᾖ, τάδ' οἴσομεν, bedachten nicht dass τόδε und τάδε auf ein und dasselbe hinweisen muss, dass folglich die Wiederholung des Demonstrativum zwecklos, der Wechsel des Numerus aber ausserordentlich verkehrt ist; ausserdem liessen sie den Rhythmus unbeachtet; eine Zerlegung des Trimeters in drei gleiche Theile, wie sie entstehen würde, wenn man läse

ὅταν τόδ' ᾖ, ‖ τάδ' οἴσομεν· ‖ σὲ δὲ κτενῶ,

ist von den Tragikern consequent gemieden worden: warum? wird jedem rhythmisch gebildeten Ohre sofort klar sein.

223 Θύματος δ' ἐπιστάτης
ἱερεύς τ' ἐπέστη τοῦδε παῖς Ἀχιλλέως.

Da die Opferung der Polyxena noch nicht vollzogen sondern nur beabsichtigt ist, so habe ich kein Bedenken getragen ἐπέστη in ἐπέσται zu ändern. Ueber den Gebrauch dieses Verbum vgl. Aesch. Pers. 240: τίς δὲ πειράνωρ ἕπεστι κἀπιδεσπόζει στρατοῦ; und ebenda 550: Δαρεῖος ἀβλαβὴς ἐπῆν τόξαρχος πολιήταις.

εἰ δ' ἔστι τοῖς δούλοισι τοὺς ἐλευθέρους
235 μὴ λυπρὰ μηδὲ καρδίας δηκτήρια
ἐξιστορῆσαι, σοὶ μὲν εἰρῆσθαι χρεών,
ἡμᾶς δ' ἀκοῦσαι τοὺς ἐρωτῶντας τάδε.

Hecuba bittet in diesen Versen um die Erlaubniss an den Odysseus einige Fragen zu richten. Der Inhalt dieser Fragen ist noch unbekannt und wird mit den Worten μὴ λυπρὰ μηδὲ καρδίας δηκτήρια nur ganz allgemein und mit absichtlicher Unbestimmtheit angedeutet. Darum halte ich τάδε in der jetzigen Verbindung für unmöglich. Einen vollkommen angemessenen Sinn erhalten wir durch die Vertauschung von χρεών und τάδε V. 236 f., wenn wir schreiben

σοὶ μὲν εἰρῆσθαι τάδε,
ἡμᾶς δ' ἀκοῦσαι τοὺς ἐρωτῶντας χρεών.

Wie häufig auf einander folgende Versausgänge ihre Stellen gewechselt haben, ist von mir früher gezeigt worden *Observ. crit. de tragicorum Graec. fragm.* p. 36 f. Vgl. unten zu Hec. 581 f. Phoen. 473 f.

247 ΕΚ. ἔσωσα δῆτά σ' ἐξέπειμψά τε χθονός;
ΟΔ. ὥστ' εἰσορᾶν γε φέγγος ἡλίου τόδε.
ΕΚ. τί δῆτ' ἔλεξας δοῦλος ὢν ἐμὸς τότε;

230 ΟΔ. πολλῶν λόγων εὑρήμαθ', ὥστε μὴ θανεῖν.

Euripides würde den Vorwurf der Abgeschmacktheit verdienen, wenn diese fast von allen Handschriften gebotene Folge der angeführten Verse die authentische wäre. Nothwendig müssen, wie schon alte Abschreiber erkannt haben, die beiden Verspaare ihre Stelle tauschen. Denn nachdem Odysseus gerettet und aus Troja entlassen ist, hat er nicht mehr πολλῶν λόγων εὑρήματα aufgeboten, um dem Tode zu entgehen. Daher ist auf die *libri antiqui et boni* hier nicht das mindeste zu geben, sondern wir haben die durch die Vernunft gebotene Ordnung herzustellen. Oder soll man eine einleuchtend richtige Emendation deshalb verwerfen, weil sie eine Autorität für sich hat die an sich keine Autorität ist?

260 πότερα τὸ χρῆν σφ' ἐπήγαγ' ἀνθρωποσφαγεῖν;

Die Form χρῆν kann ihrer Bildung wie dem sonstigen Gebrauche nach nur Imperfectum sein. Denn wie zuerst meines Wissens H. L. Ahrens de crasi et aphaeresi p. 6 f. erkannt hat, sind sämmtliche Formen des vermeintlichen Verbum χρή aus dem Verbum εἶναι zu erklären: der Coniunctivus χρῇ ist gebildet aus χρὴ ᾖ, der Optativus χρείη aus χρὴ εἴη, der Infinitivus χρῆναι aus χρὴ εἶναι, das Participium χρεών aus χρὴ ὄν (mit einem Quantitätswechsel wie in βασιλέως statt βασιλῆος, λεώς statt λῆός), das Imperfectum χρῆν aus χρὴ ἦν, das Futurum χρῆσται aus χρὴ ἔσται. Der durch die Bedeutung des Wortes unmöglich gemachte Imperativus müsste nothwendig χρήστω lauten. Die Imperfectform ἐχρῆν beruht auf einem Missverständnisse, hat sich aber neben dem älteren χρῆν so frühzeitig eingebürgert, dass sie als mustergiltig zu betrachten ist. Für das in den vulgären Grammatiken angeführte Futurum χρήσει fehlt es an sicheren Belegstellen; denn bei Herodot 7, 8, 10 schwankt die Lesart zwischen χρήσει παρεῖναι und χρὴ συμπαρεῖναι, bei Plato Leg. VII p. 809 B ist χρήσει entschieden falsch: ich habe in den Observ. crit. de trag. Graec. fragm. p. 24 χρή σει vermuthet, Dindorf hat neuerdings im Pariser Thesaurus sich für χρή entschieden. Mit der Erkenntniss dieses einfachen Sachverhaltes sind die abenteuerlichen Hypothesen beseitigt, mit denen man in alter und neuer Zeit einzelne Formen von χρή entweder zu erklären suchte oder ganz willkürlich erdichtete. Zu den Dichtungen gehört es, wenn Eustathius Il. p. 751, 55. 1179, 37. Od. p. 1647, 37 die Behauptung aufstellt, χρῆν sei auch Infinitivus, und zwar ist es unsere Stelle, welche diesen Irrthum veranlasst hat. Nur als Infinitivus aber würde, wie auch Porson urtheilte, χρῆν hier passend sein. Darum glaube ich dass zu lesen ist

πότερα τὸ χρή σφ' ἐπήγαγ' ἀνθρωποσφαγεῖν.

Hierfür spricht Herc. F. 828: τὸ χρή νιν ἐξέσωζεν, wo ebenfalls ein Corrector τὸ χρῆν vermuthet hat mit der abgeschmackten Bemerkung, die uns lehrt was für einen Grammatiker wir vor uns haben: γρ. τὸ χρῆν· ὃ ταὐτὸν μέν ἐστι τῷ χρεών, συγκέκοπται δὲ ἐκ τοῦ χρῆναι. Vielleicht ist auch Herc. F. 311 zu lesen:

τὸ χρὴ γὰρ οὐδεὶς μὴ χρεὼν θήσει ποτέ,

wo die Vulgate ὃ χρὴ lautet. Sicherlich unrichtig ist es wenn Scaliger und Musgrave in dem Verse der Hecuba vorschlugen

ποτερα τὸ χρεων σφ' ἐπήγαγ' ἀνθρωποσφαγεῖν.

Denn χρεών ist zwar öfters im Epos, aber nie von einem Tragiker einsilbig gemessen worden: über die allein widerstrebenden Stellen, Eur. Iph. Taur. 1486 und fr. 733, 3, verweise ich auf die betreffenden Anmerkungen. Scheinbar, aber nicht hinreichend verbürgt ist die Vermuthung von Ahrens, dass χρῆν oder, wie er will, χρήν für χρεών stehen könne, wie πάρηρος und ξυνήν aus παρήορος und ξυνήων contrahirt sei.

279 ταύτῃ γέγηθα κἀπιλήθομαι κακῶν.

Für ihre Leiden findet Hecuba, wie sie unmittelbar nachher sagt, einen Trost im Besitze der Polyxena; aber ἐπιλήθομαι κακῶν enthält eine Uebertreibung, die für die gegenwärtige Situation, wo das Mitleid des Odysseus erregt werden soll, nicht passend zu sein scheint. Seltsam muss es auch klingen, wenn die nämliche Polyxena in zwei auf einander folgenden Versen durch αὕτη und ἥδε bezeichnet wird. Orest. 66 lesen wir

ταύτῃ γέγηθε κἀπιλήθεται κακῶν.

Es scheint somit kaum zweifelhaft, dass der hier entbehrliche und wenig angemessene Vers von dort entlehnt ist.

296 οὐκ ἔστιν οὕτω στερρὸς ἀνθρώπου φύσις,
ἥτις γόων σῶν καὶ μακρῶν ὀδυρμάτων
κλύουσα θρήνους οὐκ ἂν ἐκβάλοι δάκρυ.

Der Grammatiker Gregorius Corinth. de dial. p. 64 ed. Schaef., der diese Stelle wegen des femininisch gebrauchten στερρός anführt, bietet zu Anfang τίς οὕτω στερρός. Wägen wir ohne Superstition für die Handschriften nach innerer Wahrscheinlichkeit beide Lesarten gegen einander ab, so liegt es auf der Hand dass τίς den Vorzug verdient. Dass ein Abschreiber das gewähltere τίς statt der Negation gesetzt habe, scheint nicht glaublich; dagegen lag es sehr nahe die Frage τίς οὕτω στερρὸς φύσις in die negative Behauptung οὐκ ἔστιν οὕτω στερρὸς φύσις umzusetzen, wie anderwärts ποῦ in οὐ geändert worden ist, vgl. Cycl. 197. Porson zu Orest. 792 und Soph. Trach. 1246, wo ich ποῦ δυσσέβεια statt οὐ δυσσέβεια vermuthe. Wenn ἔστιν bei Gregorius Cor. fehlt, so lässt sich zweifeln, ob er nur zufällig es ausgelassen oder in seiner Handschrift nicht vorgefunden hat. Im letzteren Falle würde zu schreiben sein:

φεῦ φεῦ (oder αἰαῖ oder αἴμοι), τίς οὕτω στερρὸς ἀνθρώπου φύσις —;

Ueber die Fragform vergleiche man die sinnverwandte Stelle Eur. fr. 33, 2: τίς ἂν κλύων τῶνδ' οὐκ ἂν ἐκβάλοι δάκρυ;

332 αἰαῖ· τὸ δοῦλον ὡς κακὸν πέφυκ' ἀεὶ
τολμᾷ θ' ἃ μὴ χρή, τῇ βίᾳ νικώμενον.

Kirchhoff hat πεφυκέναι statt πέφυκ' ἀεί aufgenommen, doch wohl nur um die besseren Handschriften zu ehren. Aus einem Scholion wissen wir dass dies Schwanken sich aus alter Zeit datirt, und wenn man bedenkt wie beide Lesarten aus der ebenfalls erwähnten Variante πέφυκεν ἀεί sich unmittelbar ergeben, so wird man die handschriftliche Autorität hier als vollkommen nichtsbedeutend ansehen müssen. Mit Recht sagt W. Dindorf: *ineptus est infinitivus, cuius explicandi incredibiles quasdam rationes excogitarunt grammatici, neque intelligitur quid impedire potuerit poetam quominus plane et simpliciter et accommodate ad proxima verba* τλμᾷ τε *scriberet* πέφυκ' ἀεί, *quam lectionem ab scholiasta memoratam confirmat Stobaeus.* Diejenigen welche πεφυκέναι billigen, müssen wohl die Worte so verbinden: ὡς κακὸν τὸ δοῦλον πεφυκέναι. Dies giebt zunächst ein hartes Hyperbaton; sodann ist τὸ δοῦλον πεφυκέναι ein unpassender Ausdruck von denen die nicht als Sklaven geboren sind, und endlich stimmen zu dieser Fassung des Ausdrucks sehr schlecht die folgenden Worte τολμᾷ δ' ἃ μὴ χρή. Indess ist auch die obige Lesart anstössig. Wenn nämlich der Chor einfach sagt τὸ δοῦλον ἀεὶ κακὸν πέφυκε, so ist dies leicht einem Missverständnisse ausgesetzt, als solle nicht das Unglück der Knechtschaft sondern die Schlechtigkeit der Sklaven bezeichnet werden. Darum vermuthe ich

αἰαῖ· τὸ δοῦλον ὡς κακὸν πέφυκ' ἀεὶ
τολμᾶν ἃ μὴ χρή, τῇ βίᾳ νικώμενον.

D. h.: wie fehlt es doch immer den durch die Obmacht ihrer Unterdrücker niedergehaltenen Sklaven an Muth, zu wagen was ihnen nicht zusteht.

375 ὅστις γὰρ οὐκ εἴωθε γεύεσθαι κακῶν,
φέρει μέν, ἀλγεῖ δ' αὐχέν' ἐντιθεὶς ζυγῷ·
θανὼν δ' ἂν εἴη μᾶλλον εὐτυχέστερος.

Zu dieser klaren und vollständig geschlossenen Sentenz fügen unsere Handschriften und Ausgaben folgenden erbärmlichen Vers hinzu:

ἢ ζῶν· τὸ γὰρ ζῆν μὴ καλῶς μέγας πόνος.

Das ἢ ζῶν war beigeschrieben zur Erklärung des Comparativ, und hinterher hat man diesen Zusatz zu einem Trimeter verarbeitet, der sowohl durch die Form als durch den Inhalt sich als interpolirt ankündigt. Statt ζῆν μὴ καλῶς sollte doch mindestens gesagt sein δυστυχῶς ζῆν, und μέγας πόνος klingt hier etwas wunderlich. Der Gedanke selbst aber, nicht glücklich leben ist ein grosses Unglück, ist so platt und nichtssagend wie nur möglich. Daher ist dieser Vers als unecht auszuscheiden, trotzdem dass Stobaeus Flor. 30, 3. 121, 20 ihn bereits gekannt hat.

419 οἴμοι. τί δράσω; ποῖ τελευτήσω βίον;

Mit diesen Worten scheint Hecuba auszusprechen dass sie den Tod sich herbeisehnt und dies Ziel nicht zu erreichen weiss; denn τελευτᾶν βίον ist 'sterben' und nichts weiter. Wie kann aber in diesem Falle ποῖ richtig sein? Es müsste πῇ heissen, wenn ausgedrückt wer-

den soll, dass Hecuba hinsichtlich der Mittel und Wege den Tod zu finden rathlos ist. Indess streitet der Gedanke selbst mit den kurz vorher stehenden Worten V. 415, ὦ θύγατερ, ἡμεῖς δ' ἐν φάει δουλεύσομεν. Und gesetzt Hecuba schwankte unschlüssig hin und her, ob sie Sclaverei oder Tod wählen sollte, dennoch würde es nicht an der Zeit sein dass sie über Mittel und Wege zu sterben reflectirte, da sich ihr Schicksal an das der Polyxena knüpft. Vermuthlich ist zu lesen

οἴμοι· τί δράσω; ποῖ τελευτήσω τάδε;

d. h. zu welchem Ziele soll ich dies führen? Vgl. Soph. Oed. Col. 476: τὸ δ' ἔνθεν ποῖ τελευτῆσαί με χρή; Aesch. Suppl. 603: ποῖ κεκύρωται τέλος; Ganz entsprechend sagt Hecuba später 750: ποῖ στρέφω τάδε; denn so ist statt des überlieferten τί στρέφω τάδε zu lesen; ebenso Aesch. Pers. 787: ποῖ καταστρέφεις λόγων τελευτήν;

ζῇ καὶ θανούσης ὄμμα συγκλῄσει τὸ σόν.

Kirchhoff hat hier nach den Handschriften συγκλείσει drucken lassen, ebenso ἐκκλείομαι Orest. 430, κλεῖθροις Phoen. 114, κλεῖθρα Phoen. 1058 u. ähnl. sonst, dagegen ξυγκεκλῃμένη Hec. 487, ἐκκλήσομεν Orest. 1127, κλῆθρα Phoen. 261, κλήσας Phoen. 865 u. s. w. Nach den bestimmten Zeugnissen der Grammatiker (siehe Photius Lex. p. 168, 13 und Anecd. Oxon. I p. 226, 5) und nach der sorgfältigen Erörterung von Ellendt im Lexicon Sophocleum I p. 964—966 konnte diese Inconsequenz beseitigt sein.

ἢ Παλλάδος ἐν πόλει
τᾶς καλλιδίφρου Ἀθα-
ναίας ἐν κροκέῳ πέπλῳ
ζεύξομαι ἅρα πώλους ἐν
δαιδαλέαισι ποικίλλουσ'
ἀνθοκρόκοισι πήναις;

An dem Hiatus in καλλιδίφρου Ἀθαναίας hat zuerst Porson Anstoss genommen; seine Aenderung καλλιδίφροι' Ἀθαναίας ist jedoch falsch, weil in der Genetivendung —οιο niemals das Omikron elidirt wird. Dies hat G. Hermann Orphic. p. 721 f. richtig bemerkt, der in seiner zweiten Ausgabe der Hecuba messen wollte

– – ⏑, – ⏑ ⏑ –

und dem gemäss in der Antistrophe

ὤμοι χθονὸς πατρῴας

statt ὤμοι πατέρων χθονός θ' schrieb. Dindorf hat vorgeschlagen καλλιδιφροῦς, ohne das neugeprägte Wort καλλιδιφρής anderweitig zu schützen als durch die allgemeine Bemerkung, dass mitunter in einzelnen Adjectiva die Endungen —ος und —ης neben einander existiren. Kirchhoff ist der Schwierigkeit aus dem Wege gegangen, indem er sich mit einer andern Versabtheilung zu helfen suchte:

τᾶς καλλιδίφρου

Ἀξαναίας ἐν κροκέῳ πέπλῳ
und antistrophisch: ὤμοι πατέρων
χθονός Ϡ, ἃ καπνῷ κατερείπεται.

Mit derartigen typographischen Universalmitteln lassen sich allerdings sehr leicht *syllabae ancipites* gewinnen, ohne dass dem Iota der Ueberlieferung ein Haar gekrümmt wird; nur Schade dass durch ein solches Verfahren die Rhythmen nicht geheilt sondern muthwillig zerstört werden. Inzwischen hat L. Kayser in den Neuen Jahrb. für Philologie und Paedagogik Bd. LXXV, 2 p. 114 Anm. mit überschwenglicher Freundlichkeit es gebilligt dass Kirchhoff "an Ἀξαναίας nichts auszusetzen findet", ohne sich näher zu äussern wodurch dieser Beifall veranlasst ist. Soviel ich sehe, billigt Kayser entweder die Zerstörung der Verse oder den unerlaubten Hiatus. Im ersten Falle verzichte ich gern auf weitere Polemik: an Compendien für Griechische Metrik fehlt es nicht; aber um gewisse Dinge noch zu erlernen sind gewisse Leute schon zu alt[1]). Im zweiten Falle befremdet es mich dass Kayser Männern wie Porson und G. Hermann widerspricht, ohne auch nur den Versuch zu machen seinen Widerspruch mit einem Argumente zu begründen. Indess gesetzt auch der Hiatus in καλλιδίῤῥου Ἀξαναίας wäre bei einem Tragiker zulässig, so müsste doch die Verbindung Παλλάδος τᾶς καλλιδίῤῥου Ἀξαναίας Anstoss erregen; oder kann man etwa sagen Φοῖβος ὁ καλὸς Ἀπόλλων? Es scheint mir ganz unzweifelhaft dass Ϡεᾶς ναίουσ' statt Ἀξαναίας zu schreiben ist, um Metrum und Sinn herzustellen.

ὦ Ζεῦ, τί λέξω; πότερά σ' ἀνθρώπους ὁρᾶν;
ἢ δόξαν ἄλλως τήνδε κεκτῆσθαι μάτην
490 [ψευδῆ, δοκοῦντας δαιμόνων εἶναι γένος],
τύχην δὲ πάντα τἀν βροτοῖς ἐπισκοπεῖν;

Der eingeklammerte Vers scheint, wie ich schon in der zweiten Ausgabe p. XXI Anm. 58 angedeutet habe, von einem Interpolator herzurühren und durch die zu μάτην beigeschriebene Erklärung ψευδῆ veranlasst zu sein. Der Interpolator bezog das δόξαν κεκτῆσθαι auf die Menschen, während es vom Zeus zu verstehen ist. Nach Ausscheidung des bezeichneten Verses bekommen wir einen passenden Sinn: "soll ich sagen dass Zeus auf uns Menschen

1) Dass Kayser gut daran thät entweder zuerst die Elemente der Metrik zu lernen und hinterher den Euripides emendiren zu wollen oder — was vielleicht besser wäre — mit der Emendation des Euripides sich ein für alle mal nicht abzugeben, zeigt beispielsweise seine Conjectur über Iph. Taur. 62, wo er folgenden Trimeter herstellen will:

γέρας ἀπόντι, ταῦτα γὰρ δυναίμεθ' ἄν.

Diese Conjectur wird vorgetragen an einem Orte, wo man Besseres erwarten sollte, in Jahns Neuen Jahrb. f. Philol. u. Paedag. Bd. LXXV Heft 7 p. 471. Bisher hielten wir γέρας für einen Pyrrhichius: vielleicht weist Kayser bald in einem "dritten Artikel" nach dass es ein Iambus ist. Sollte Kayser es dahin bringen sich in der Griechischen Metrik etwas zu vervollkommnen, so wird er auch wohl zu der Einsicht gelangen dass es nicht eben "gar verwunderlich" war, wenn ich in den *Observ. crit. de trag. fragm.* p. 43 den anapästischen Vers

πᾶσα γὰρ ἀνδρὸς κακίων ἅλοχος

als fehlerhaft bezeichnete. Ich setzte voraus kein tragischer Dichter habe in der Comparativendung —ίων das Iota kurz gemessen; nicht aber konnte ich voraussetzen, dass diese Thatsache irgend einem der sich mit der Kritik der tragischen Dichter beschäftigte unbekannt wäre.

*

blickt, oder dass der blinde Zufall unsere Angelegenheiten lenkt?" In der überlieferten Fassung ist der Wechsel des Subjectes sehr hart und der Gedanke selbst unlogisch, da das Regiment des Zeus und die Existenz der Götter wesentlich verschiedene Begriffe sind.

503 Ταλθύβιος ἥκω Δαναϊδῶν ὑπηρέτης,
Ἀγαμέμνονος πέμψαντος, ὦ γύναι, μέτα.

Zu dem zweiten Verse habe ich bemerkt: μέτα *suspectum*. Richtiger wäre gewesen: μέτα *absurdum*. Man nimmt πέμψαντος μέτα für μεταπέμψαντος. Allein Euripides hätte sich sehr ungeschickt ausgedrückt, wenn er eine solche Amphibolie zugelassen hätte, bei der das Missverständniss unvermeidlich war; denn jeder Zuhörer musste verstehen "mit dem Agamemnon". Ferner aber giebt μεταπέμψαντος keinen Sinn; denn wenn unsere Lexicographen behaupten μεταπέμπειν bedeute 'absenden', so ist dies eine zur Erklärung unserer Stelle gemachte Erfindung: μεταπέμπειν heisst 'holen lassen', und will man diese Bedeutung hier festhalten, so vermisst man zu μεταπέμψαντος das unentbehrliche Object σέ, das Wakefield durch den verfehlten Vorschlag σ' Ἀγαμέμνονος zu gewinnen suchte. Wie dem Fehler abzuhelfen sei, wage ich nicht zu entscheiden.

Nachdem Polyxena geopfert ist, bemühen sich die Griechen ihre Verehrung für die heldenmüthige Jungfrau darzuthun:

οἱ μὲν αὐτῶν τὴν θανοῦσαν ἐκ χερῶν
φύλλοις ἔβαλλον, οἱ δὲ πληροῦσιν πυράν
575 κορμοὺς φέροντες πευκίνους· ὁ δ' οὐ φέρων
πρὸς τοῦ φέροντος τοιάδ' ἤκουεν κακά.

In V. 574 bieten alle Handschriften das Praesens πληροῦσιν. Choeroboscus in Theodos. p. 537, 8 bezeugt dagegen eine in der besseren Gräcität höchst seltene Imperfectform οἱ δ' ἐπλήρουν πυράν. Je auffallender diese Form ist, um so bedenklicher scheint es das directe Zeugniss eines aus guten Quellen schöpfenden Grammatikers zu ignoriren, und so habe ich das durch ἔβαλλον und ἤκουεν empfohlene Imperfectum wenngleich nicht ohne Bedenken zugelassen. Aus Byzantinischen Schriftstellern hat Lobeck Phryn. p. 349 einige Belege der Endung —οσαν statt —ον beigebracht; anderes giebt Sturz de dial. Maced. et Alex. p. 58 ff. Vgl. ἐσχάζοσαν Lycophr. 21. ἔσχοσαν Scymnus 695. εἶχοσαν Posidippus oder Asclepiades Anth. Pal. 5, 209. ἦλθοσαν Pseudo-Callisthenes p. 88 b. ἀνῆλθοσαν Vita Aesopi ed. Westerm. p. 9, 1. διῆλθοσαν Pseudo-Callisth. p. 87 b. ἐπῆλθοσαν Fabul. Aesop. 353 b. Tzetzes Hesiod. Op. 89. εἰσῆλθοσαν Eust. Opusc. p. 83, 42. εὗροσαν Pseudo-Callisth. p. 87 a.

Nach den oben angeführten Worten heisst es 577 ff.:

ἔστηκας, ὦ κάκιστε, τῇ νεάνιδι
οὐ πέπλον οὐδὲ κόσμον ἐν χεροῖν ἔχων;

οὐκ εἴ τι δώσων τῇ περίσσ' εὐκαρδίῳ
ψυχήν τ' ἀρίστῃ;

Im zweiten dieser Verse ist ἐν χεροῖν ἔχων ein schlecht gewählter Ausdruck: nicht dadurch dass jemand irgend einen für die geopferte Jungfrau bestimmten Schmuck in den Händen hält, sondern dadurch dass er denselben zum Scheiterhaufen trägt, wird die Todte geehrt. Völlig unangemessen ist aber auch οὐ κόσμον οὐδὲ πέπλον. Denn wie soll jeder einzelne im Stande sein Gewänder und Schmucksachen zu bekommen? Mit der Vermuthung κορμὸν statt κόσμον ist natürlich nichts gewonnen, so lange nicht die übrigen Worte in entsprechender Weise geändert werden, und ich glaube nicht dass wir irgend ein Heilmittel an diesen Vers wenden dürfen. Er ist einfach zu tilgen, und alles ist in Ordnung:

ἕστηκας, ὦ κάκιστε; τῇ νεάνιδι
οὐκ εἴ τι δώσων, τῇ περίσσ' εὐκαρδίῳ
ψυχήν τ' ἀρίστῃ;

Talthybius beschliesst seine Erzählung mit den Worten:

τοιάδ' ἀμφὶ σῆς λέγων
παιδὸς Ἀανούσης, εὐτεκνωτάτην δὲ σὲ
πασῶν γυναικῶν δυστυχεστάτην ὁρῶ.

So lautet die am besten verbürgte, durch Choeroboscus in Theodos. p. 551,6 bestätigte Lesart, von welcher andere Handschriften insofern abweichen als sie Ἀ' vor ὁρῶ einschieben. Statt dies augenscheinlich von einem Verbesserer eingeflickte Ἀ' anzunehmen und das vorher V. 581 unpassende δὲ in τε umzuändern, wird es gerathener sein die unverfälschte Lesart zu einer einfachen Verbesserung zu benutzen, die vollkommen sicher durch Vertauschung der Versenden (vgl. oben S. 6) sich ergiebt. Es ist ohne Frage zu lesen:

τοιάδ' ἀμφὶ σῆς λέγων
παιδὸς Ἀανούσης δυστυχεστάτην ὁρῶ
πασῶν γυναικῶν, εὐτεκνωτάτην δὲ σέ.

Hiermit gewinnt die Rede des Talthybius einen versöhnenden Abschluss, und die εὐτεκνία der Hecuba wird nachdrücklich hervorgehoben, während sie bei der bisherigen Lesart in den Hintergrund tritt und fast verschwindet.

ἀκόλαστος ὄχλος ναυτικὴ τ' ἀναρχία
κρείσσων πυρός.

Dio Chrysostomus 32, 86 bietet die Lesart ναυτικὴ τ' ἀταξία, die den Vorzug verdienen dürfte. Vgl. Xenoph. Memor. 3, 5, 6: τεκμήραιο δ' ἂν τοῦτο καὶ ἀπὸ τῶν ἐν ταῖς ναυσίν. ὅταν μὲν γὰρ δήπου μηδὲν φοβῶνται, μεστοί εἰσιν ἀταξίας. Philostratus V. Apollon. 5, 20: καίτοι ναυτικῆς ἀταξίας ἐμπεπλησμένος. Nicetas Choniata p. 218, 13 ed. Bonn.: τὴν ναυτικὴν ἀπαιδευσίαν πράγμασιν αὐτοῖς καταπέδειξαν δραστικωτέραν πυρός, καὶ ἀταξίας ἐνέπλησαν τὰ στρατόπεδα. Dagegen folgen der handschriftlichen Lesart ἀναρχία Eumathius 7, 13 p. 565, 44. Theodorus Metochita p. 646. Eust. Il. p. 55, 18.

617 εἴ τις τοὺς νεωστὶ δεσπότας
λαζοῦσ' ἔχει τι κλέμμα τῶν αὑτῆς δόμων.

Was die kriegsgefangenen Frauen vor den Händen der plündernden Eroberer gerettet haben, ist ihr rechtmässiger Besitz und kann somit nicht wohl ein κλέμμα genannt werden. Ich habe vermuthet ἔχει τι λεῖμμα, muss aber bemerken, dass diese Vermuthung mir durchaus nicht sicher erscheint. Sollte vielleicht κτῆμα das ursprüngliche sein?

627 κεῖνος ὀλβιώτατος
ὅτῳ κατ' ἦμαρ τυγχάνει μηδὲν κακόν.

Bei diesen Worten vermisst man eine Verbindung mit dem Vorhergehenden. Es hiess oben: "Reichthum und Ehre sind nichts als eitler Schimmer"; die angeführten Worte bilden dazu einen Gegensatz, der kaum anders als durch δέ angeknüpft werden kann. Vielleicht also

κεῖνο δ' ὀλβιώτατον
ὅτῳ κατ' ἦμαρ τυγχάνει μηδὲν κακόν.

Ueber die Verbindung von κεῖνος und ὅστις, deren scheinbare Anomalie die jetzige Lesart veranlasst haben mag, vgl. Hom. Il. Ξ, 81: βέλτερον ὃς φεύγων προφύγῃ κακὸν ἠὲ ἁλώῃ. Eur. Iphig. Taur. 609: τὰ τῶν φίλων αἴσχιστον ὅστις καταβαλὼν εἰς συμφορὰς αὐτὸς σέσωσται. Phoen. 519: ἀνανδρία γὰρ τὸ πλέον ὅστις ἀπολέσας τοὔλασσον ἔλαβε. Hel. 271: καὶ τοῦτο μεῖζον τῆς ἀληθείας κακόν, ὅστις τὰ μὴ προσόντα κέκτηται κακά. Herc. F. 309: τὰς τῶν θεῶν γὰρ ὅστις ἐκμοχθεῖν τύχας πρόθυμός ἐστιν, ἡ πρόθυμία δ' ἄῤῥων (vermuthlich ἥδ' ἄῤῥων προθυμία). fr. 362, 1: τὰς χάριτας ὅστις εὐγενῶς χαρίζεται, ἥδιον ἐν βροτοῖσιν. fr. 778: ἐν τοῖσι μώροις τοῦτ' ἐγὼ κρίνω βροτῶν, ὅστις πατὴρ ὢν παισὶ μὴ φρονοῦσιν εὖ ἢ καὶ πολίταις παραδίδωσ' ἐξουσίαν. Anderes bei Meineke im Menander p. 207 f.

683 ἀπωλόμην δύστηνος, οὐκέτ' εἰμὶ δή.

Besser dürfte sein οὐδέν εἰμ' ἔτι, wie in dem sonst gleichlautenden Verse bei Sophocles El. 677 gelesen wird, und entsprechend in den daselbst angeführten Stellen, Eur. Hel. 1194: ὄλωλα· φροῦδα τἀμὰ κοὐδέν εἰμ' ἔτι, und Aristoph. Eq. 1243: οἴμοι κακοδαίμων· οὐκέτ' οὐδέν εἰμ' ἐγώ.

ἄῤῥητ' ἀνωνόμαστα, θαυμάτων πέρα,
713 οὐχ ὅσι' οὐδ' ἀνεκτά. ποῦ δίκα ξένων;

Da Hecuba vorher und nachher sich des dochmischen Maasses bedient, so ist es unzweifelhaft dass auch in diesen Versen dasselbe Metrum gesucht werden muss. Die Abschreiber sind geflissentlich darauf ausgegangen den ihnen geläufigen iambischen Trimeter[1])

1) In gleicher Weise haben neuere Kritiker öfters gefehlt. Zu mehreren in den *Observ. crit. de trag. Graec. Jagm.* p. 14 von mir besprochenen Beispielen kommt Cratinus (Com. 2 p. 217) bei Priscianus XVIII p. 376 f. ed. Hertz.:

ὃς τὴν πίτυν

herzustellen, und so kann es nicht befremden dass die schlechteren Handschriften auch hier durch Einschaltung eines γε dem zweiten Verse nachhelfen (οὐχ ὅσιά γ' οὐδ' ἀνεκτά. ποῦ δίκα ξένων;). Von Seiten des Sinnes ist anstössig Ξαυμάτων πέρα, "über das Wunderbare hinausgehend": dies ist nach den Worten ἄρρητα ἀνωνόμαστα und für die leidenschaftliche Erregtheit der Mutter, die ihren Sohn Polydorus durch schändlichen Verrath ermordet vor sich sieht, viel zu matt als dass es dem Euripides zugetraut werden könnte. Ferner befremdet δίκα ξένων. Der Verrath den Polymestor geübt hat, wird passender eine Verletzung des göttlichen als des gastlichen Rechtes genannt werden. Somit vermuthe ich dass die Versenden Ξαυμάτων πέρα und ξένων von unberufener Hand supplirt sind. Ich möchte vorschlagen zu lesen:

ἄρρητ' ἀνονόμαστ',
οὐχ ὅσι' οὐδ' ἀνεκτά. ποῦ Ξεῶν δίκα;

Das Wort Ξεῶν konnte in Folge der für Ξεός üblichen Abkürzung leicht ausfallen, vgl. meine Observ. crit. de trag. Graec. fragm. p. 46 Anm. Doch wär es auch möglich dass die Worte ποῦ δίκα ξένων einfach zu tilgen sind; dann bekämen wir

οὐχ ὅσι' οὐδ' ἀνέκτ'.
ὦ κατάρατ' ἀνδρῶν, ὡς διεμοιράσω κτέ.

729 ἡμεῖς μὲν οὖν ἐῶμεν οὐδὲ ψαύσομεν.

Der Ausgang des Verses lehrt dass hier eine Corruptel vorliegt, die durch die Verbesserung εἰῶμεν οὐδ' ἐψαύσομεν in einfachster Weise sich beseitigen lässt: an οὐδ' ἐψαύσομεν dachte schon Bothe.

745 ἆρ' ἐκλογίζομαί γε πρὸς τὸ δυσμενὲς
μᾶλλον φρένας τοῦδ', ὄντος οὐχὶ δυσμενοῦς;

An dem nichtssagenden γε hat schon G. Hermann Anstoss genommen und ἆρ' ἐκλογιζόμεσθα vorgeschlagen. Damit sind jedoch die Hauptschwierigkeiten dieser Stelle noch nicht gehoben. Der durch den Zusammenhang mit Nothwendigkeit gebotene Sinn: "irre ich mich im Agamemnon, den ich für meinen Feind halte, ohne dass er es ist?" lässt sich auf keine Weise aus der vorliegenden Lesart herausbringen. Die Worte πρὸς τὸ δυσμενές können nicht mit ἐκλογίζομαι verbunden werden; vielmehr fordern sie ein zugehöriges Verbum, und zwar ist dies Verbum ohne Zweifel in dem völlig unverständlichen μᾶλλον zu suchen: man erwartet νεύειν oder einen gleichbedeutenden Begriff. Ausserdem ist ἐκλογίζομαι oder

---

ἔκαμπτεν ἑστὼς χαμάθεν ἄκρας τῆς κόμης καθέλκων.

So hat Meineke die Stelle geordnet, und ihm ist Hertz in der Hauptsache gefolgt. Es war vielmehr zu lesen:

ὃς τὴν πίτυν ἔκαμπτεν
ἑστὼς χαμάθεν ἄκρας
τῆς κόμης καθέλκων.

Andere werden sich versucht fühlen mit Cobet N. L. p. 150 τὰς πίτυς zu schreiben: indess ist eine solche Vermuthung unberechtigt; wie wir bereits wissen dass in κλιτύς (vgl. meine Bemerkung zu Soph. Trach. 271), in στάχυς und anderen Wörtern die Quantität der Endsilbe schwankt, so erfahren wir aus unserer Stelle dass bei πίτυς dasselbe Schwanken sich findet.

ἐκλογιζόμεσθα unpassend; nicht danach kann Hecuba fragen ob sie den Agamemnon für feindlich hält oder nicht; sondern sie zweifelt ob sie dies mit Recht thut, ob nicht Agamemnon sich ihrer anzunehmen bereit sein wird. Vermuthlich ist zu lesen

ἆρ' εὖ λογιζόμεσθα πρὸς τὸ δυσμενὲς
νεύειν φρένας τοῦδ', ὄντος οὐχὶ δυσμενοῦς;

Die Vermuthung νεύειν setzt voraus dass die Urhandschrift hier zu Anfang des Verses unleserlich war; ein Fall der bei den Versanfängen wie bei den Versenden in unserem Dichter ausserordentlich häufig vorgekommen sein muss.

οὐκ ἂν δυναίμην τοῦδε τιμωρεῖν ἄτερ
τέκνοισι τοῖς ἐμοῖσι. τί στρέφω τάδε;

Ohne Zweifel ist zu verbessern ποῖ στρέφω τάδε; Vgl. oben S. 9 f.

Hecuba bittet den Agamemnon, für den Frevel der an ihr verübt, möge er ein Rächer werden

ἀνοσιωτάτου ξένου,
ὃς οὔτε τοὺς γῆς νέρθεν οὔτε τοὺς ἄνω
δείσας δέδρακεν ἔργον ἀνοσιώτατον,
κοινῆς τραπέζης πολλάκις τυχὼν ἐμοί,
ξενίας τ' ἀριθμῷ πρῶτα τῶν ἐμῶν φίλων·
τυχὼν δ' ὅσων δεῖ καὶ λαβὼν προμηθίαν
ἔκτεινε, τύμβου δ', εἰ κτανεῖν ἐβούλετο,
οὐκ ἠξίωσεν, ἀλλ' ἀφῆκε πόντιον.

Die letzten fünf Verse enthalten in Form und Inhalt so viel wunderliches, auffallendes und geradezu sinnloses, dass sie wenigstens in dieser Gestalt vom Euripides nicht herrühren können. In dem Verse

κοινῆς τραπέζης πολλάκις τυχὼν ἐμοί

wird das worauf es einzig und allein ankommt, nicht bezeichnet, dass nämlich Polymestor am Tische des Priamus oder der Hecuba gesessen hat. Die Worte ξενίας τ' ἀριθμῷ πρῶτα τῶν ἐμῶν φίλων entziehen sich jedem Verständniss. Ohne Zweifel wollte der Verfasser sagen dass Polymestor der Hecuba näher gestanden als alle übrigen Freunde und Freundinnen; aber wie soll man die verschrobene Ausdrucksweise deuten? Der Genetiv τῶν ἐμῶν φίλων kann nur von πρῶτα abhängen, ξενίας nur von ἀριθμῷ. Somit war Polymestor in dem ξενίας ἀριθμός der erste der φίλοι. Aber was soll ξενίας ἀριθμός bedeuten? Gewiss nicht schlechthin so viel als ξένων σύλλογος. Ausserdem müsste es τὰ πρῶτα heissen[1]). Weiter wird gesagt:

1) Vgl. Elmsley zu Eur. Med. 887 p. 220. Lucian Timon c. 35: ἴσθι Ἀθηναίων τὰ πρῶτα. c. 55: κολάκων ἐστὶ τὰ πρῶτα. Lucian Hippias c. 3: μηχανικῶν τε ὧν τὰ πρῶτα. Dio Cass. 36, 30: τά τε πρῶτα τῆς βουλῆς ἦν. Heliod. 4, 6: τὸν πατέρα τῆς κόρης ἠγνόηκας, ὡς Δελφῶν ἐστὶ τὰ πρῶτα; Theod. Hyrtac. Epist. 23 in *Notices et Extr.* V p. 740: ἦν μὲν καὶ πρὶν τῶν πάνυ φίλων ἐμοὶ καὶ τὰ πρῶτα τῶν ἑταίρων. Synesius p. 35 C ed. Petav.: ἄνδρα τὰ πρῶτα τῶν Ἀριστοτέλους ὁμιλητῶν.

τυχὼν δ' ὅσων δεῖ καὶ λαβὼν προμηθίαν,

ein vages und völlig unbestimmtes Gerede, aus dem man über das Verhältniss der Hecuba zum Polymestor absolut nichts erfährt. Statt der folgenden Worte, εἰ κτανεῖν ἐβούλετο, würde jeder vernünftige Dichter ὃν κτανεῖν ἔτλη oder etwas ähnliches gesagt haben. Jetzt kommt es so heraus als ob der einfache Wille eines Menschen ausreichte um einen Mord als gerechtfertigt erscheinen zu lassen, wofern nur der Mörder den Gemordeten bestattete. Die Nichtbestattung der Leiche ist im Vergleich zu dem Morde selbst sicherlich viel zu unwesentlich um in dieser Weise hervorgehoben zu werden. Uebrigens sind die Verse 794 und 795 bereits von Matthiae, 796 f. von W. Dindorf verurtheilt worden. Gleichwohl hat Kirchhoff alles geduldet, ohne einen Verdacht zu äussern.

Wenn Hecuba 798 fortfährt,

ἡμεῖς μὲν οὖν δοῦλοί τε κἀσθενεῖς ἴσως,

so ist ἴσως abgeschmackt, mag man es nun "in gleicher Weise" oder "vielleicht" übersetzen wollen. Hecuba vermag nichts auszurichten in Folge ihrer Sclaverei und in Folge ihres Geschlechtes; also ist wohl zu lesen κἀσθενεῖς φύσει.

Darauf folgen die Verse

ἀλλ' οἱ θεοὶ σθένουσι χὠ κείνων κρατῶν
νόμος· νόμῳ γὰρ τοὺς θεοὺς ἡγούμεθα
καὶ ζῶμεν ἄδικα καὶ δίκαι' ὡρισμένοι·
ὃς εἷς σ' ἀνελθὼν εἰ διαφθαρήσεται,
καὶ μὴ δίκην δώσουσιν οἵτινες ξένους
κτείνουσιν ἢ θεῶν ἱερὰ τολμῶσιν φέρειν,
οὐκ ἔστιν οὐδὲν τῶν ἐν ἀνθρώποις ἴσον.

"Wir sind schwach, aber die Götter sind stark und das über die Götter herrschende Gesetz; denn nach einem νόμος (Gesetz oder Herkommen?) glauben wir an die Götter, und wir leben ungerecht und gerecht, indem wir Grenzen gezogen haben." Die Ungereimtheit und Zusammenhangslosigkeit dieser Stelle springt in die Augen. Weil wir nach einem νόμος an die Götter glauben, darum herrscht ein Gesetz über die Götter? Eine seltsame Argumentation! Sollen die Worte νόμῳ γὰρ τοὺς θεοὺς ἡγούμεθα in den Zusammenhang passen, so ist es nothwendig anzunehmen dass nach ἡγούμεθα ein Vers ausgefallen sei: es müsste gesagt werden νόμῳ γὰρ τοὺς θεοὺς ἡγούμεθα ὑποτεταχθαι, ὑπηκόους εἶναι oder ähnlich. So würde auch der Artikel τοὺς gerechtfertigt sein, der jetzt als unpassend erscheint; denn an die Existenz von Göttern glauben ist θεοὺς ἡγεῖσθαι, nicht τοὺς θεοὺς ἡγεῖσθαι. Die folgenden Worte ζῶμεν ἄδικα καὶ δίκαι' ὡρισμένοι geben einen nicht ganz passenden Ausdruck für den ohne Zweifel beabsichtigten, hier aber ungehörigen Gedanken, "wir haben die Grenzen gezogen für Recht und Unrecht." Es handelt sich an unserer Stelle nicht um das was die Menschen als recht oder unrecht bezeichnen, sondern um die ewigen unwandelbaren Satzungen der Götter, um Satzungen die von menschlicher Einwir-

kung völlig unabhängig sind. Somit wäre es möglich in dem Verse καὶ ζῶμεν ἄδικα καὶ δίκαι' ὡρισμένοι das unpassende Supplement einer vorhandenen Lücke zu finden. Indess halte ich es für ungleich wahrscheinlicher, dass Euripides als den Beherrscher der Götter nicht das Gesetz, sondern den Zeus bezeichnen wollte und zwar hier den ξένιος, d. h. dass V. 800 und 801 überhaupt zu tilgen sind. Auch V. 803 und 804 möchte ich eher einem Interpolator als dem Euripides zutrauen; einerseits geben sie eine Erläuterung von 802, andrerseits ist die Erwähnung der ἱερόσυλοι für die vorliegende Situation ganz unbrauchbar. Meiner Ansicht nach würde man nichts vermissen, wenn es einfach hiess:

ἀλλ' οἱ θεοὶ σθένουσι χὠ κείνων κρατῶν·
ὃς εἴς σ' ἀνελθὼν εἰ διαφθαρήσεται,
οὐκ ἔστιν οὐδὲν τῶν ἐν ἀνθρώποις ἴσον.

"Die Götter sind stark und ihr Beherrscher (Zeus): wenn dessen Geltung, soweit es auf dich ankommt, untergraben wird, so giebt es unter Menschen kein Recht."

καὶ μὴν ἴσως μὲν τοῦ λόγου κενὸν τόδε,
Κύπριν προβάλλειν.

Angemessener scheint τοῦ λόγου ξένον τόδε, um dasjenige zu bezeichnen was nicht zur Sache gehört. Erst so bekommt das sonst pleonastische τοῦ λόγου eine angemessene Beziehung. In anderem Sinn wird ξένος τοῦ λόγου angewendet von Soph. Oed. R. 219.

831 ἐκ τοῦ σκότου τε τῶν τε νυκτέρων βροτοῖς
φίλτρων μεγίστη γίγνεται βροτοῖς χάρις.

Dass diese Verse in ihrem jetzigen Zusammenhange unpassend sind, hat man allgemein anerkannt: nicht aber hat man über ihre Fassung sich einigen können. Unwesentlich ist es dass statt des ersten τε, für welches ausser den besten Handschriften auch Orion und Tzetzes sprechen, die Varianten γάρ und τοι sich finden, die augenscheinlich aus dem Bestreben hervorgegangen sind die allgemeine Sentenz in den Zusammenhang einzufügen. Sicherlich unrichtig ist das doppelte βροτοῖς, was schon die alten Abschreiber zu verfehlten Conjecturen veranlasst hat. Einige Handschriften bieten θνητοῖς statt des zweiten βροτοῖς, andere haben im ersten Verse unpassend genug νυκτέρων πάνυ gesetzt. Auf die richtige Lesart führt Tzetzes Exeg. Il. p. 86, 11, der das erste βροτοῖς ganz auslässt. Es ist zu schreiben

ἐκ τοῦ σκότου τε τῶν τε νυκτερησίων
φίλτρων μεγίστη γίγνεται βροτοῖς χάρις.

Bisher war νυκτερήσιος nachgewiesen aus Aristophanes, Lucian und Sextus Emp., mit der Bildung ist zu vergleichen ἡμερήσιος und βροτήσιος.

τὸν ἄνδρα τοῦτον φιλιον ἥγειται στρατός,
860 τὸν κατθανόντα δ' ἐχθρόν· εἰ δὲ σοὶ φίλος
ὅδ' ἐστί, χωρὶς τοῦτο κοὐ κοινὸν στρατῷ.

Mit diesen Worten spricht Agamemnon sein Bedenken aus, als Rächer eines Trojaners, des Polydorus, gegen den dem Griechischen Heere befreundeten Polymestor aufzutreten. Es liegt eine Abgeschmacktheit darin, dass die Sympathie der Hecuba als etwas von den Angelegenheiten des Heeres gesondertes bezeichnet wird. Elmsley zu Soph. Oed. R. 367 hat vollkommen richtig erkannt, dass zu lesen ist εἰ δ' ἐμοὶ φίλος ὅδ' ἐστί, womit ein passender Sinn gewonnen wird. Agamemnon scheut sich sein Interesse der Gesammtheit des Heeres gegenüber zu verfolgen, wie er dies in den nächsten Worten ausspricht: πρὸς ταῦτα φρόντιζ'· ὡς ἤθελοντα μέν μ' ἔχεις σοὶ ξυμπονῆσαι καὶ προσαρκέσαι ταχύν, βραδὺν δ', Ἀχαιοῖς εἰ διαβληθήσομαι.

943 τὰν τοῖν Διοσκόροιν Ἑλέναν κάσιν.

Vermuthlich ist Ἑλέναν eine von den Abschreibern hinzugefügte Erklärung. Das Metrum giebt für unser Urtheil keinen sicheren Anhalt, da der Vers einer nicht strophischen Chorpartie angehört.

ὦ φίλτατ' ἀνδρῶν Πρίαμε, φιλτάτη δὲ σύ
Ἑκάβη, δακρύω σ' εἰσορῶν πόλιν τε σὴν
935 τήν τ' ἀρτίως ξανοῦσαν ἔκγονον σέθεν.

Seltsamer Weise hat an diesen Worten, mit denen Polymestor auftritt, noch Niemand Anstoss genommen; und doch muss die Anrede des Priamus hier im höchsten Grade befremden. Denn zur Zeit wo unser Stück spielt, ist Priamus bereits todt; darauf wird mit Bestimmtheit hingewiesen in V. 422, wo Polyxena, die zur Opferung hinweggeführt werden soll, an ihre Mutter die Frage richtet:

τί σοι πρὸς Ἕκτορ' ἢ γέροντ' εἴπω πόσιν;

Womit ist es also zu rechtfertigen dass Polymestor ihn wie einen Anwesenden begrüsst? Niemand wird sich, um unsere Stelle zu vertheidigen, auf 620 f. berufen, wo Hecuba sagt:

ὦ σχήματ' οἴκων, ὦ ποτ' εὐτυχεῖς δόμοι,
ὦ πλεῖστ' ἔχων κάλλιστά τ' εὐτεκνώτατε
Πρίαμε, γεραιά θ' ἡδ' ἐγὼ μήτηρ τέκνων,
ὡς εἰς τὸ μηδὲν ἥκομεν.

Dies ist eine rhetorische Apostrophe; dagegen kann ein Auftretender, der die vor ihm stehende Hecuba begrüsst, nicht in rhetorischer Absicht neben ihr den todten Gemahl derselben anreden. Möglich dass der Vers, ὦ φίλτατ' ἀνδρῶν Πρίαμε, φιλτάτη δὲ σύ, durch die Hand eines Interpolator entstellt, möglich auch dass er überhaupt untergeschoben ist: jedenfalls würde man, wenn er fehlte, nichts vermissen; wie ja auch Agamemnon bei seinem Auftreten 726 unmittelbar mit Ἑκάβη, τί μέλλεις beginnt.

970 ὅτῳ γὰρ ὤφθην εὐτυχοῦσ', αἰδώς μ' ἔχει
ἐν τῷδε πότμῳ τυγχάνουσ' ἵν' εἰμὶ νῦν,

*

κοὐκ ἂν δυναίμην προσβλέπειν σ' ὀρθαῖς κόραις.

Das Participium τυγχάνουσα kann nur mit den vorhergehenden Worten verbunden und somit nur auf αἰδώς bezogen werden; d. h. es müsste vielmehr τυγχάνουσαν heissen. Porson wollte, offenbar hierdurch bewogen, die Worte ἐν τῷδε πότμῳ τυγχάνουσ' ἵν' εἰμὶ νῦν tilgen, bemerkte jedoch erträglicher würde der Vers werden, wenn man 971 und 972 mit einander vertauschte, oder wenn man schrieb κἀν τῷδε πότμῳ und οὐκ ἂν δυναίμην. Sicherlich ist die Umstellung, die Kirchhoff seltsamer Weise billigen konnte, völlig zu verwerfen: αἰδώς μ' ἔχει κοὐκ ἂν δυναίμην προσβλέπειν σ' ὀρθαῖς κόραις, "ich scheue mich dich anzusehen und ich würde dich nicht ansehen können", ist eine lästige und zwecklose Häufung. Der hypothetische Ausdruck οὐκ ἂν δυναίμην ist an sich unpassend; es müsste dafür einfach οὐ δύναμαι, οὐ σθένω oder etwas ähnliches gesetzt sein. Dass eine Interpolation vorliegt, hat Porson richtig erkannt; nur war zu schreiben

ὅτῳ γὰρ ὤφθην εὐτυχοῦσ', αἰδώς μ' ἔχει
ἐν τῷδε πότμῳ προσβλέπειν ὀρθαῖς κόραις.

So ist der Anlass zur Fälschung leicht ersichtlich: τῷδε πότμῳ wurde durch ein beigeschriebenes οὗ νῦν εἰμί erläutert und daraus hinterher ein Vers gemacht. Die Tilgung des in der gangbaren Lesart unentbehrlichen Pronomen σε gründet sich auf die Autorität der Handschriften *AC*.

982 φίλη μὲν εἶ σύ, προσφιλὲς δέ μοι τόδε
στράτευμ' Ἀχαιῶν.

Die meisten Handschriften fügen nach μὲν das Wort ἡμῖν hinzu: dies war aufzunehmen, dagegen τόδε mit c zu tilgen; die Hinweisung mit τόδε ist hier, wo das Heer nicht anwesend ist, widersinnig. Die über 983 bereits in der ersten Ausgabe von mir geäusserte Vermuthung ἀλλὰ σημαίνειν σ' ἐχρῆν (statt σε χρή) wird, wie ich hinterher bemerkt habe, durch die beste Handschrift (Ven. 471) bestätigt, deren Lesart σε χρῆν aufzunehmen ist.

1024 οὔπω δέδωκας, ἀλλ' ἴσως δώσεις δίκην.

Einen ungleich angemesseneren Sinn bekommen wir durch die Aenderung οὔπω δέδοικας. "Noch fürchtest du nichts, aber du wirst büssen" ist sicherlich kräftiger als das jetzige "noch hast du nicht gebüsst, aber du wirst büssen." Vollkommen unpassend aber scheint das Wörtchen ἴσως. Wenn der Chor darauf hinweist dass dem Polymestor, welcher in die von der Hecuba gelegten Netze gegangen ist, sein Recht geschehen werde, so spricht er lediglich das aus, was unmittelbar nachher die Zuschauer aus dem Wehruf des Polymestor selbst entnehmen sollen. Ein Vielleicht würde am Orte sein, wenn zwischen der Rede des Chors und der an Polymestor vollstreckten Rache noch eine Reihe von Verwickelungen läge, nicht aber hier, wo nur dem Publicum der Schlüssel gegeben werden soll für das Verständniss des nachfolgenden ὤμοι τυφλοῦμαι. Sollte jemand diese Argumentation nicht für ausreichend halten, so braucht er nur die folgenden Worte des Chores anzusehen, um sich

zu überzeugen dass ἴσως unstatthaft ist. Der jetzt vorliegende Trimeter ist offenbar, wie wir schon oben S. 14 f. den gleichen Fall sahen, aus einem dochmischen Verse gemacht. Ich vermuthe

οὔπω δέδιας, ἀλλὰ δώσεις δίκαν.

In gleicher Weise erscheint der nächste Vers, ἀλίμενόν τις ὡς εἰς ἄντλον πεσών, in unseren Handschriften als Trimeter,

ἀλίμενόν τις ὡς εἰς (oder ἐς) ἄντλον ἐμπεσών,

wobei das Iota in ἀλίμενον nach Byzantinischer Messung als doppelzeilig betrachtet wurde. Gewiss sollten auch bald nachher die Worte

ἀμέρσας βίοτον. τὸ γὰρ ὑπέγγυον

einen Trimeter bilden; hier hat selbst Kirchhoff βίον statt βίοτον aufgenommen, wie bereits Porson verbesserte. Nach dem bisherigen muss ich vermuthen dass auch der regelrecht gebaute iambische Trimeter V. 1032,

ψεύσει σ' ὁδοῦ τῆσδ' ἐλπὶς ἥ σ' ἐπήγαγεν,

ursprünglich ein dochmischer Dimeter war, also etwa lautete

ψεύσει σ' ἐλπὶς ἥ σε τῇδ' ἤγαγεν.

Wenigstens ist ψεύσει σ' ὁδοῦ τῆσδ' ἐλπίς ein etwas geschraubter und keineswegs natürlicher Ausdruck.

Ueber 1055 vergl. unten zu Orest. 1200.

1080 πᾷ στῶ, πᾷ κάμψω, πᾷ βῶ;

Das Klaglied des Polymestor besteht vorzugsweise aus Dochmien, in die zuweilen andere Metra, besonders Anapaesten eingelegt werden. An unserer Stelle dürfte zu schreiben sein

πᾷ στῶ, πᾷ κάμψω;

Die für den Zusammenhang unpassenden Worte πᾷ βῶ sind entlehnt aus 1056: ὤμοι ἐγώ, πᾷ βῶ, πᾷ στῶ, πᾷ κέλσω;

ποῖ τράπωμαι; ποῖ πορευθῶ;
1100 αἰθέρ' ἁμπτάμενος οὐράνιον
ὑψιπετὲς εἰς μέλαθρον, Ὠρίων
ἢ Σείριος ἔνθα πυρὸς φλογέας κτέ.

Die Scholien einiger Florentiner (und vermuthlich anderer bedeutender) Handschriften bemerken: ἔν τισι τὸ αἰθέρα περισσὸν καὶ οὐ φέρεται. Gewiss ist αἰθέρα nichts als eine Interpolation zu οὐράνιον μέλαθρον, wie oben 943 Ἑλέναν zu τὰν τοῖν Διοσκόροιν κάσιν. Tilgt man dies αἰθέρα, so kommt das Metrum in diejenige Ordnung, welche für jeden Kundigen durch die Worte selbst gegeben ist; denn sicherlich dürfen wir es nicht für einen blinden Zufall halten, dass die Worte ἁμπτάμενος und οὐράνιον und ὑψιπετὲς und εἰς μέλαθρον und Ὠρίων ein gleiches Silbenmaass darstellen, nämlich ´⏑⏑– oder ´⏑–, und dass mit jedem Creticus ein Wort schliesst.

εἰ δὲ μὴ Φρυγῶν
πύργους πεσόντας ἦσμεν Ἑλλήνων δορί,
φόβον παρέσχεν οὐ μέσως ὅδε κτύπος.

Kirchhoff hat nach der Vermuthung von Heath und Musgrave παρέσχ' ἄν geschrieben und dafür scheint die Lesart παρέσχεν ἄν (so AB) zu sprechen. Allein nöthig ist die Hinzufügung von ἄν nicht, und an dieser Stelle ist sie geradezu fehlerhaft, wie Elmsley zu Eur. Med. p. 150 nachgewiesen hat. Zu den von Elmsley angeführten falschen Conjecturen kommt das von Schneidewin in Soph. Ai. 45 gesetzte ἐξέπραξ' ἄν, was nur ἐξέπραξα ἄν, nicht ἐξέπραξεν ἄν bedeuten würde. Ferner Kirchhoffs Vermuthung über Med. 591: οὐ τοῦτό σ' ἔσχ' ἄν, eine Vermuthung die an Kayser in den Neuen Jahrb. für Philol. und Paedag. LXXV Heft 2 p. 126 ihren Lobredner gefunden hat. Fehlerhaft überliefert ist Eur. Ion 354: σοὶ ταὐτὸν ἦβης, εἶπερ ἦν, εἶχ' ἂν μέτρον, wo Kirchhoff mit keiner Silbe der Elmsleyschen Verbesserung gedenkt, σοὶ ταὐτ' ἂν ἦβης, εἶπερ ἦν, εἶχεν μέτρα, obgleich εἶχεν unzweifelhaft richtig gefunden ist.

τοῦτον κατέκτειν'· ἀνδ' ὅτου δ' ἔκτεινά νιν;
ἄκουσον ὡς εὖ καὶ σοφῇ προμηθίᾳ.

Der zweite dieser Verse ist so matt und so ungeschickt, dass ich kein Bedenken trage ihn als unecht zu bezeichnen. Polymestor sagt, er habe den jüngsten der Priamiden, den Polydorus, der ihm zur Erziehung anvertraut worden war, getödtet und giebt im Folgenden als Motiv seiner That an, es sei zu fürchten gewesen dass Polydorus das zerstörte Troja wieder aufrichtete. Um das Motiv der That handelt es sich, wie aus dem ἀνδ' ὅτου und aus dem nachfolgenden Passus hervorgeht. In den Worten ὡς εὖ καὶ σοφῇ προμηθίᾳ ist dagegen von der Art und Weise der Ausführung die Rede. Obenein erscheint σοφῇ προμηθίᾳ als unbestimmt, da nicht gesagt ist wem Polymestors Fürsorge galt: εὖ aber ist völlig sinnlos. Somit enthält der Vers nichts was für den Zusammenhang angemessen wäre mit Ausnahme des einzigen ἄκουσον. Gerade dies ἄκουσον aber, das man zu ἀνδ' ὅτου δ' ἔκτεινά νιν vermisste, bot den Anlass zur Fälschung. Indess ist es klar dass die indirecte Frage, ἀνδ' ὅτου δ' ἔκτεινά νιν; "(du fragst) weshalb ich ihn tödtete?" an sich vollkommen verständlich ist, ohne des Zusatzes ἄκουσον zu bedürfen. Vgl. meine Bem. zu Soph. Trach. 455.

λόγῳ με τοιῷδ' ἤγαγ', ὡς κεκρυμμένας
Ἑκάβης φράσουσα Πριαμιδῶν ἐν Ἰλίῳ
χρυσοῦ· μόνον δὲ σὺν τέκνοισί μ' εἰσάγει
δόμους, ἵν' ἄλλος μή τις εἰδείη τάδε.

Von den beiden letzten Versen halte ich nur folgendes für authentisch:

μόνον δὲ σὺν τέκνοισί μ' εἰσάγει δόμους.

Es wäre mindestens unklug, wenn Polymestor zu Ἑκάβης das Wort χρυσοῦ hinzufügte und so verrieth dass er durch Habsucht geleitet wurde. Obenein wird χρυσοῦ durch die Trennung

von Θήκας wie durch die Stellung am Schlusse des Satzes und zu Anfang des Verses in der nachdrücklichsten Weise hervorgehoben, während es im Interesse des Redenden liegen musste alles fern zu halten was seinen Charakter in zweideutigem oder missgünstigem Lichte erscheinen liess. Somit glaube ich, χρυσοῦ ist als Erklärung zu Θήκας hinzugefügt und hinterher hat man den siebenfüssigen Trimeter zu zwei sechsfüssigen ausgesponnen. Denn die Worte ἵν' ἄλλος μή τις εἰδείη τάδε dienen in der That zu weiter nichts als um den Vers zu füllen, und das auf etwas vorliegendes hinweisende τάδε ist ganz beziehungslos und darum verkehrt angewendet. Durch die vorgeschlagene Tilgung bekommt auch δόμους seinen richtigen Platz, während es in der Ueberlieferung unpassend den Trimeter beginnt.

1158 τέκν' ἐν χεροῖν ἔπαλλον, ὡς πρόσω πατρὸς
γένοιντο, διαδοχαῖς ἀμείβουσαι διὰ χερός.

So lautet die unverfälschte Ueberlieferung dieser Verse, die ich nicht für geheilt erachten kann, wenn man nach schlechteren Handschriften διὰ χερός in χερῶν oder χεροῖν ändert. Dass der Singularis χερός nicht zu beanstanden ist, habe ich oben S. 3 f. dargethan. Aber der Sitz des Fehlers ist wohl in ἀμείβουσαι zu suchen, wofür eine auf die τέκνα bezügliche Bestimmung verlangt wird, die den Worten ὡς πρόσω πατρὸς γένοιντο sich anschliessen muss. Dem Sinne würde gedient sein, wenn es etwa hiess:

ὡς πρόσω πατρὸς
γένοιντο, διαδοχαῖς μολόντα διὰ χερός.

Die ursprüngliche Lesart ist indess damit wohl noch nicht gefunden.

1196 πρὸς τόνδε δ' εἶμι καὶ λόγοις ἀμείψομαι,
ὃς φῆς Ἀχαιῶν πόνον ἀπαλλάσσων διπλοῦν
Ἀγαμέμνονός θ' ἕκατι παῖδ' ἐμὸν κτανεῖν.

Ob wir ὃς φήσ' oder ὃς φῂς schreiben wollen, ist vollkommen in unser Belieben gestellt, ohne dass die handschriftliche Autorität in Betracht kommt. Vielleicht ist aber die überlieferte zweite Person der dritten vorzuziehen, weil durch den Uebergang zur directen Anrede die Worte der Hecuba an Lebhaftigkeit gewinnen. Vgl. Soph. Oed. Col. 1354. Nothwendig jedoch scheint ἀπαλλάξων, weil es bestimmter auf die angebliche Absicht des Polymestor hinweist als das zweideutige ἀπαλλάσσων.

ἀλλ' ἡνίχ' ἡμεῖς οὐκέτ' ἐσμὲν ἐν φάει,
καπνῷ δ' ἐσήμην' ἄστυ πολεμίων ὕπο,
ξένον κατέκτας σὴν μολόντ' ἐφ' ἑστίαν.

Der Ausdruck καπνῷ σημαίνει ἄστυ ist so vag und unbestimmt, dass ich von der Richtigkeit der jetzigen Lesart mich nicht zu überzeugen vermag. Zu σημαίνειν vermisst man ein Object. Was ist es das die Ruinen der Stadt durch den Rauch anzeigen? Vermuthlich die

ehemalige Existenz, den Untergang der Stadt oder die Stelle wo einst eine Stadt gestanden. Allein dies müsste doch gesagt sein. Und wenn dies durch den Rauch angezeigt wird, so ist es eben der Rauch welcher σημαίνει, nicht aber ist es die Stadt. Zu diesen Schwierigkeiten kommt noch das πολεμίων ὕπο, welches in dieser Verbindung mindestens sehr hart klingt. Wie ich glaube, sehen wir aus dem Schlusse des Verses, dass zu Anfang gesagt werden musste "unsere Stadt ist zerstört oder in Rauch aufgegangen." Hiernach habe ich vermuthet

καπνῶδες ἡμῖν δ' ἄστυ πολεμίων ὕπο,

was wenigstens der Ueberlieferung sich möglichst eng anschliesst.

'Αγάμεμνον, εἰ τῷδ' ἀρκέσεις, κακὸς φανεῖ·
οὔτ' εὐσεβῆ γὰρ οὔτε πιστὸν οἷς ἐχρῆν,
οὐχ ὅσιον, οὐ δίκαιον εὖ δράσεις ξένον·
αὐτὸν δὲ χαίρειν τοῖς κακοῖς σὲ φήσομεν
τοιοῦτον ὄντα· δεσπότας δ' οὐ λοιδορῶ.

Concinner wird die Rede, wenn man liest:

οὐχ ὅσιον, οὐ δίκαιον εὖ δράσας ξένον,
αὐτὸν σὲ χαίρειν τοῖς κακοῖσι φήσομεν.

Einen wenn auch geringen Anhalt für diese Vermuthung bietet der codex Vaticanus 909 durch die Lesart τοῖς κακοῖσι σε φήσομεν. Die syntaktische Anomalie, die hier den Anlass zur Interpolation gegeben zu haben scheint, ist durch eine hinreichende Zahl von Beispielen gegen jeden Zweifel gesichert. Hom. Il. E, 135: καὶ πρίν περ ϑυμῷ μεμαὼς Τρώεσσι μάχεσϑαι, δὴ τότε μιν τρὶς τόσσον ἔλεν μένος. Z, 510: ὁ δ' ἀγλαΐηφι πεποιϑώς, βίμφα ἑ γοῦνα φέρει. Eur. Hipp. 23: τὰ πολλὰ δὲ πάλαι προκόψασ', οὐ πόνου πολλοῦ με δεῖ. Iphig. Taur. 675: κοινῇ δὲ πλεύσας, δεῖ με καὶ κοινῇ ϑανεῖν (so Elmsley). 947: ἐλϑὼν δ' ἐκεῖσε, πρῶτα μέν μ' οὐδεὶς ξένων ἑκὼν ἐδέξαϑ' ὡς ϑεοῖς στυγούμενον. Ion 927: κακῶν γὰρ ἄρτι κῦμ' ὑπεξαντλῶν φρενί, πρύμνηϑεν αἴρει μ' ἄλλο σῶν λόγων ὕπο. fr. 583: πάλαι δή σ' ἐξερωτῆσαι ϑέλων, σχολή μ' ἀπεῖργε. Sophron im Etym. M. p. 774, 45: τατωμένα τοῦ κιϑῶνος, ὁ τόκος νιν ἀλιφϑερώκει (denn so wird, wie bereits andere vermuthet haben, das Fragment zu schreiben sein, das Ahrens de dial. Dor. p. 472 in zwei Numern gebracht hat). In allen diesen Beispielen steht das Pronomen im Accusativus; an andern Stellen findet sich der Genetivus und Dativus. Aesch. Eum. 100: παϑοῦσα δ' οὕτω δεινὰ πρὸς τῶν φιλτάτων, οὐδεὶς ὑπέρ μου δαιμόνων μηνίεται. Soph. Oed. R. 60: καὶ νοσοῦντες, ὡς ἐγὼ οὐκ ἔστιν ὑμῶν ὅστις ἐξ ἴσου νοσεῖ. Eur. Cycl. 330: δοραῖσι ϑηρῶν σῶμα περιβαλὼν ἐμὸν καὶ πῦρ ἀναίϑων, χιόνος οὐδέν μοι μέλει. Aristoph. Av. 1242: μόλυβδον εἰς τουτὶ τὸ κοῖλον ἐγχέας, ἔπειτ' ἄνωϑεν ῥάβδον ἐνϑεὶς ὑπόμακρον, γενήσεταί σοι τῶν κατακτῶν κοττάβων. Nicht wesentlich verschieden sind die Fälle wo das Pronomen im Hauptsatze ausgelassen ist, wie bei Eur. fr. 1065, 3 nach Meinekes Verbesserung:

λαβὼν δὲ πεῖραν, μεταμέλεια λαμβάνει,

worauf näher einzugehen hier überflüssig sein würde. Vgl. Meineke Fragm. Com. vol. 4 p. X. Der letzte der oben citirten Verse

τοιοῦτον ὄντα. δεσπότας δ' οὐ λοιδορῶ

ist nicht recht passend; durch die vorgeschlagene Aenderung wird er vollkommen entbehrlich.

In Kirchhoffs Ausgabe ist zuerst der Versuch gemacht, die bei späteren Schriftstellern sich findenden directen oder indirecten Beziehungen auf Euripides mit einiger Vollständigkeit nachzuweisen. Begreiflicher Weise ist für eine Nachlese noch manches übrig gelassen. Das wichtigste was ich zur Hecuba mir angemerkt, mag hier Platz finden; die Verszahlen citire ich in dieser Uebersicht nach Kirchhoff.

Der Anfang ἥκω νεκρῶν κευθμῶνα κτέ. wird theils citirt theils berücksichtigt von Thomas Magister p. 170, 1. Tzetzes Epist. 66 p. 58. Georgius Lecapenus bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 63. Anecd. Boiss. vol. 3 p. 116. Christ. pat. 1509. 2026 f.

Zu V. 3 τῆς Κισσίας vgl. Servius Verg. Aen. 7, 320.

V. 4 ἀπόλλυται auch Thom. Mag. p. 404, 3, ἀπώλετο dagegen Schol. Eur. Hec. 175.

Auf V. 32 bezieht sich Christ. pat. 2021.

V. 39 vgl. εὐξύνοντας· ὁρμῶντας bei Photius Lex. p. 33, 4 und Suidas.

V. 52 vgl. Thom. Mag. p. 107, 1.

V. 53 ὑπὸ σκηνὴν auch Schol. Eur. Hec. 745.

V. 70 vgl. δείμασι· φόβοις bei Hesychius. Die nächstfolgenden Worte berücksichtigt Eustathius Il. p. 173, 15. Od. p. 1877, 53.

V. 116 vgl. στρατὸν αἰχμητήν· τὸν πολεμιστὴν στρατόν Hesychius[1]).

Zu V. 130 vgl. Schol. Il. B, 199. Eust. Il. p. 201, 23.

V. 148 τύμβου auch Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 74.

V. 220 citirt Thomas Mag. p. 283, 13.

V. 228 benutzt Theodorus Hyrtacenus in den Anecd. Boisson. vol. 2 p. 432.

V. 248 auch Thomas Mag. p. 112, 6.

Auf 249 scheint sich zu beziehen κακύνει· κακώσει Hesychius, wo vermuthlich κακὸς εἶ zu lesen ist.

V. 258 Thomas Mag. p. 395, 1.

V. 282 Demetrius Cydonius bei Boiss. Anecd. nov. p. 310.

V. 283 Libanius bei Boiss. Anecd. vol. 1 p. 165.

V. 292 f. vgl. Nicephorus Gregoras vol. 1 p. 311, 21 ed. Bonn.

V. 305 f. Georgius Pachymeres p. 37 ed. Boiss.

V. 317 Thomas Mag. p. 32, 3.

---

1) Meineke Philol. XIII p. 536 irrte sich, wenn er diese Glosse zur Bereicherung der tragischen Fragmente verwendet sehen wollte. Die Glosse λατίνας ἀηδόνας (Meineke p. 535) ist, wie der *Index fontium* zu meiner Sammlung der tragischen Bruchstücke lehrt, aus Eur. fr. 923: in gleicher Weise ὑπορράπτεις λόγους aus Eur. Alc. 537, περιψίσσεται ὥρας aus Alc. 449, δι' ἅλα πορφυρεοιδέα aus Tro. 124, Εὐβοίας μυχόν aus Tro. 84, λώτο. τερεῶτες (Meineke p. 554 Nr. 647) aus Tro. 435, dagegen χειροβρώτι δεσμῷ aus Stesichorus.

V. 324 benutzt von Eustathius Opusc. p. 47,29.
V. 340 f. Schol. Eur. Hec. 745.
V. 357 f. Eust. Il. p. 415,11.
V. 361 Thomas Mag. p. 333,14.
V. 367 ἀγ' οὖν Ὀδυσσεῦ Thomas Mag. p. 81,14.
V. 373 f. Eumathius VIII p. 573,33 ed. Didot.
V. 396 Thomas Mag. p. 254,13.
V. 422 Thomas Mag. p. 232,17. Schol. Eur. Hec. 139.
V. 432 Schol. Aesch. Sept. 359 p. 340 Dind.
V. 440 f. Eust. Il. p. 206,5. 397,40.
V. 521 Eust. Od. p. 1956,33.
V. 529 Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 65.
V. 551 Schol. Lucian. p. 236 ed. Iacobitz. Eust. Il. p. 25, 42.
V. 584 Eust. Opusc. p. 311,28.
V. 587 f. auch Eust. Il. p. 793,2.
V. 592 f. Libanius Declam. vol. 3 p. 365.
V. 592-94 Theodulus in Boiss. Anecd. vol. 2 p. 206.
V. 596 ἔχει μέν τι Georgius Pachym. p. 171 ed. Boiss.
V. 599 ein anonymer Dichter bei Cramer Anecd. Paris. vol. 4 p. 347,17.
V. 619 benutzt Theodorus Metochita p. 183 f.
V. 635 Eust. Il. p. 42,3.
V. 666 Schol. Eur. Phoen. 21.
V. 713 ὥστε θαυμάζειν ἐμέ Aristoph. Av. 1135. Tzetzes Epist. 27.
V. 743 übersetzt von Ennius fr. 7 p. 32 ed. Ribbeck.
V. 769 Eust. Il. p. 651,28, wo λέγεις steht.
V. 790 Thomas Mag. p. 74,12.
V. 791 Thomas Mag. p. 188,10.
V. 814 f. Schol. Od. κ, 481.
V. 817 Thomas Mag. p. 196,13. 362,11.
V. 820 Append. Proverb. 3,38. vgl. Hesychius, Photius und Suidas v. καὶ χερσί.
V. 848 Doxopater bei Walz Rhet. vol. 2 p. 291. 298.
V. 868 Theodorus Metochita p. 610.
V. 870 Eumathius V p. 548,40 ed. Didot.
V. 897 Thomas Mag. p. 236,16.
V. 968 Schol. Pind. Ol. 14,28.
V. 977 Thomas Mag. p. 249,15.
V. 1028 Schol. Aesch. Sept. 623 p. 370 ed. Dind.
V. 1035 Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 73. Schol. Aristoph. Plut. 447. Thomas Mag. p. 266,19.

V. 1106 μαργῶσαν χέρα auch Anecd. Bachm. vol. 1 p. 295, 17.

V. 1113 Thomas Mag. p. 374, 10.

V. 1204 σαφέστατοι auch Eumathius VI p. 559, 29 ed. Didot.

V. 1259 Schol. Eur. Phoen. 21.

Einige der hier angeführten Autoren, z. B. den Thomas Magister, hat Kirchhoff ohne Zweifel mit Absicht bei Seite gelassen; allein sicherlich verdienten alle von mir nachgewiesenen Stellen bei weitem eher eine Erwähnung als der zu V. 528 und sonst citirte Draco, und für die Frage nach der Echtheit oder Unechtheit eines Verses ist schon dies nicht uninteressant, zu wissen bei welchen Schriftstellern er citirt oder benutzt wird.

---

2. Orestes.

In dem Prolog des Stückes schildert Electra, nachdem sie die Geschichte der Ahnherren ihres Geschlechtes in kurzen Andeutungen berührt hat, den Zustand ihres Bruders Orestes, der auf das Geheiss des Gottes Phoebus das Blut des Vaters durch den Mord der Mutter gerächt hat und nun in Folge dieser That von Wahnsinn ergriffen ist. Es heisst V. 34 ff.:

ἐντεῦθεν ἀγρίᾳ συντακεὶς νόσῳ νοσεῖ
τλήμων Ὀρέστης· ὁ δὲ πεσὼν ἐν δεμνίοις
κεῖται, τὸ μητρὸς δ' αἷμά νιν προχλαΐσεῖ
μανίαισιν· ὀνομάζειν γὰρ αἰδοῦμαι θεάς
Εὐμενίδας, αἳ τόνδ' ἐξαμιλλῶνται φόβῳ.

So die Ueberlieferung. Statt Ὀρέστης ὁ δὲ hat bereits Reiske Ὀρέστης ὅδε verbessert; ὁ δὲ würde nur dann möglich sein, wenn Orestes einer andern vorhergenannten Person gegenübergestellt werden sollte. Mit dieser Aenderung ist aber nothwendig zugleich eine andere gegeben. Die Worte συντακεὶς νόσῳ νοσεῖ Ὀρέστης πεσὼν ἐν δεμνίοις κεῖται können nicht so unmittelbar neben einander stehen; es muss vielmehr heissen τλήμων Ὀρέστης ὅδε πεσών τ' ἐν δεμνίοις κεῖται. Diese Verbesserung ist bei weitem angemessener als Hartungs συντακεὶς νόσῳ δέμας, wobei immer συντακεὶς πεσὼν unverbunden bleiben. Es liegt auf der Hand dass in Folge der falschen Trennung ὁ δὲ statt ὅδε das τε als unpassend getilgt werden musste. Der zuletzt citirte Vers (38) scheint in diesem Zusammenhang unmöglich zu sein. Denn die unmittelbar voraufgehenden Worte ὀνομάζειν γὰρ αἰδοῦμαι θεάς schliessen eine Erwähnung der Göttinnen aus, hier so gut wie in dem Zwiegespräch des Orestes und Menelaus V. 408 ff.:

ΟΡ. ἔδοξ' ἰδεῖν τρεῖς νυκτὶ προσφερεῖς κόρας.
ΜΕ. εἶδ' ἃς ἔλεξας, ὀνομάσαι δ' οὐ βούλιμαι.
ΟΡ. σεμναὶ γάρ· εὐπαίδευτα δ' ἀποτρέπει λέγειν.

Vollends unpassend ist in der oben angeführten Stelle die Benennung Eumeniden; denn

dieser Name bezeichnet die sanften versöhnten Erinyen; ihn zu nennen brauchte Electra sich nicht zu scheuen: nur von Rachegöttinnen zu reden muss ihr Gefühl sich sträuben. Nimmt man hinzu dass das Wort φόβῳ hier äusserst matt und nichtssagend ist, so kann es kaum einem Zweifel unterliegen, dass V. 38 nichts ist als die Erweiterung einer zu ϑεάς beigeschriebenen Interpretation. Wenn ich nicht irre, dient auch die Parodie des Eubulus Com. 3 p. 236 zur Bestätigung dieser meiner Ansicht:

παρϑένου Βοιωτίας
Κωπᾶδος· ὀνομάζειν γὰρ αἰδοῦμαι ϑεάν.

Es ist hier die Rede von einem Aal. Die folgenden Worte des Bruchstückes sind uns nicht erhalten; aber es ist ganz undenkbar dass Eubulus den Namen irgend einer Göttin hinzugefügt habe, und somit um so unwahrscheinlicher dass Euripides jenes Εὐμενίδας κτέ. habe folgen lassen.

Am heutigen Tage, erzählt Electra weiter, werden die Argiver entscheiden, ob wir beide (Orestes und ich) gesteinigt werden oder durch das Schwert sterben sollen; indess haben wir einige Hoffnung dem Tode zu entgehen (V. 50 ff.). Wenn es sich nur um die Wahl zwischen Steinigung und Schwert handelte, so wäre an eine Rettung wohl überhaupt nicht zu denken; wenigstens erfährt man nicht worauf Electras Hoffnung sich gründet. An einer andern Stelle wird aber gesagt, dass die Argiver viel mehr darüber berathen, πότερον Ὀρέστην κατϑανεῖν ἢ μὴ χρεών (V. 886), und offenbar ist dies das richtige. Denn es handelte sich wesentlich darum, ob Orestes den Tod verdiene oder nicht, ob seine That als eine ruchlose oder als eine fromme zu betrachten sei. Für den Fall dass er als schuldig befunden wurde, wartete seiner, wie mehrmals gesagt wird, die Steinigung; und nur mit Mühe erlangte der Verurtheilte eine derartige Milderung des Urtheils, dass an die Stelle der Steinigung die αὐτόχειρ σφαγή gesetzt wurde; vgl. 946 ff.:

μόλις δ' ἔπεισε μὴ πετρούμενος ϑανεῖν
πλήμων Ὀρέστης· αὐτόχειρι δὲ σφαγῇ
ὑπέσχετ' ἐν τῇδ' ἡμέρᾳ λείψειν βίον.

Von vorn herein dagegen dem Orestes das Dilemma zu stellen, entweder gesteinigt zu werden oder sich mit dem Schwert zu tödten, wäre absurd gewesen. Somit scheint V. 51:

ἢ φάσγανον ϑήξαντ' ἐπ' αὐχένος βαλεῖν,

das Fabricat eines Interpolators zu sein, dessen Geschmacklosigkeit schon durch die Wahl des Ausdrucks sich hinlänglich charakterisirt.

Electra späht nach dem Menelaus, da ohne ihn wenig zu hoffen ist, V. 68 f.:

ὡς τά γ' ἀλλ' ἐπ' ἀσϑενοῦς
ῥώμης ὀχούμεϑ', ἤν τι μὴ κείνου πάρα
σωϑῶμεν.

Die Verbindung ἀσϑενὴς ῥώμη könnte als Oxymoron gefasst werden; auf keinen Fall aber kann man sagen ἐπὶ ῥώμης ὀχεῖσϑαι. Aus der Anmerkung von Porson zu dieser Stelle geht hervor, dass der eigentliche Ausdruck war ἐπ' ἀγκύρας ὁρμεῖν oder ὀχεῖσϑαι, und dass

dafür auch gesagt wurde ἐπ' ἐλπίδος ὀχεῖσθαι. Hier hat Euripides ἐπ' ἀσθενοῦς ῥοπῆς ὀχούμεθα geneuert, wie zuerst, wenn ich nicht irre, ein Holländischer Gelehrter in der Mnemosyne erkannt hat. Aehnlich Eur. Hipp. 1163: δέδορκε μέντοι φῶς ἐπὶ σμικρᾶς ῥοπῆς. Plut. Artax. c. 30: ἦν μὲν οὖν ἐπὶ ῥοπῆς μικρᾶς ὁ Ἀρτοξέρξης διὰ τὸ γῆρας. Dionys. Hal. Antiq. Rom. 8, 52: ἐνθυμουμένη τὸν ἀνθρώπινον βίον ὡς ἐπὶ μικρᾶς αἰωρεῖται ῥοπῆς. Thucyd. 5, 103: ὃ ὑμεῖς ἀσθενεῖς τε καὶ ἐπὶ ῥοπῆς μιᾶς (offenbar ist zu verbessern σμικρᾶς) ὄντες μὴ βούλεσθε παθεῖν. Ganz auf dieselbe Weise ist eine andere Euripideische Stelle zu heilen, wo ἀσθενὴς ῥώμη sich findet. Heracl. 648 sagt die greise Alcmena:

ἀσθενὴς μὲν ἥ γ' ἐμὴ
ῥώμη, τοσόνδε δ' εἰδέναι σε χρή, ξένε,
οὐκ ἔστ' ἄγειν σε τούσδ' ἐμοῦ ζώσης ποτέ.

Es muss nothwendig heissen: ἀσθενὴς μὲν ἥ γ' ἐμὴ ῥοπή, d. h. gering ist das Gewicht, das ich in die Wagschale zu legen vermag. Vgl. Xenoph. Cyri inst. 4, 2, 14: μὴ παντάπασιν ὁ Κῦρος μικράν τινα αὐτῶν οἴοιτο ῥοπὴν εἶναι. Isocr. Plat. § 33: μεγάλην γὰρ ἔσεσθαι τὴν ῥοπήν, εἰ μετὰ Λακεδαιμονίων ἡ τούτων γενήσεται πόλις. Isocr. Panegyr. § 139: ἐν γὰρ τοῖς τοιούτοις καιροῖς πολλάκις μικραὶ δυνάμεις μεγάλας τὰς ῥοπὰς ἐποίησαν. Endlich kann ich nicht glauben dass bei Eur. Orest. 84 richtig gelesen wird:

νεκρὸς γὰρ οὗτος οὕνεκα σμικρᾶς πνοῆς.

Man kann diese Worte nur so verstehen: Orestes ist als todt zu betrachten, sofern er nur wenig noch athmet. Dass das Leiden des Orestes nicht in Athmungsbeschwerden besteht, die etwa ein Ersticken befürchten liessen, versteht sich von selbst. Ebenso falsch aber wäre es, wenn Orestes der ihm kurz zugemessenen Lebenszeit wegen als todt bezeichnet würde: denn noch ist es nicht entschieden, ob Orestes bald sterben wird. Erfolgt seine Freisprechung, so kann er noch viele Jahre leben. Offenbar betrachtet Electra ihren Bruder als todt, weil sie auf eine Rettung kaum hoffen kann, weil sein Leben an einem schwachen Faden hängt. Um diesen allein angemessenen Sinn zu bekommen, müssen wir lesen: νεκρὸς γὰρ οὗτος οὕνεκα σμικρᾶς ῥοπῆς.

86 σὺ δ' εἶ μακαρία μακάριός θ' ὁ σὸς πόσις
ἥκετον ἐφ' ἡμᾶς ἀξιλίως πεπραγότας.

Wenn ehemals mit BF σὺ δ' ἡ μακαρία gelesen wurde, so halte ich dies für entschieden unrichtig; Helena soll als eine glückliche bezeichnet werden, nicht aber ist μακαρία ein Beiname, der zur Bestimmung ihrer Person gebraucht werden könnte. Offenbar unrichtig aber ist auch die asyndetische Nebeneinanderstellung von εἶ und ἥκετον. Kirchhoffs Vermuthung σὺ δ' οὖν μακαρία ist für den Zusammenhang nicht angemessen, da der Gegensatz ἐγὼ μὲν ἄνυπνος θάσσω, σὺ δὲ μακαρία, die Hinzufügung eines οὖν im zweiten Gliede durchaus nicht verträgt. Eustathius bietet an drei Stellen, wo er den zweiten Vers citirt, ἥκεις statt ἥκετον. Darauf habe ich ehemals die Vermuthung gegründet

σὺ δ' εἶ μακαρία μακάριός θ' ὁ σὸς πόσις,

ἥκοντ' ἐρ' ἡμᾶς ἀξλίως πεπραγότας.

Vgl. Orest. 465: καὶ γάρ μ' ἔθρεψε — παῖδ' ἀγκάλαισι περιφέρων, Δήδα Ϙ' ἅμα, τιμῶντέ μ' οὐδὲν ἧσσον ἢ Διοσκόρω. Umgekehrt Alc. 734: ἔρρων νυν αὐτὸς χή συνοικήσασά σοι, ἄπαιδε παιδὸς ὄντος, ὥσπερ ἄξιοι, γηράσκετε, wofür ich bei Besprechung der Stelle ähnliches beibringen werde. Sollte indess ἥκετον richtig sein und in dem εἶ der Fehler stecken, so würde die Aenderung

σὺ δ' αὖ μακαρία μακάριός Ϙ' ὁ σὸς πόσις ἥκετον κτέ.

jeden Anstoss beseitigen.

ΧΟ. σῖγα σῖγα, λεπτὸν ἴχνος ἀρβύλης
τιθεῖτε, μὴ κτυπεῖτε, μηδ' ἔστω κτύπος.
ΗΛ. ἀποπρὸ βᾶτ' ἐκεῖσ', ἀποπρό μοι κοίτας.

So lautet der Anfang der Strophe; die entsprechenden antistrophischen Worte sind:

ΧΟ. πῶς ἔχει; λόγου μετάδος, ὦ φίλα,
τίνα τύχαν εἰπώ; τίνα δὲ συμφοράν;
ΗΛ. ἔτι μὲν ἐμπνέει, βραχὺ δ' ἀναστένει.

Zunächst ist klar und wohl als vollkommen ausgemacht anzusehen, dass der Trimeter

τιθεῖτε, μὴ κτυπεῖτε, μηδ' ἔστω κτύπος,

dem Versehen eines Abschreibers oder der Willkür eines Verbesserers seinen Ursprung verdankt (vgl. das oben über Hec. 713 ff. bemerkte). Nach den in der Strophe vorhergehenden und folgenden Worten wie nach dem entsprechenden antistrophischen Verse muss jeder einen dochmischen Vers erwarten. Daher hat Porson τίθετε statt τιθεῖτε gesetzt, Elmsley μὴ ἔστω statt μηδ' ἔστω vermuthet. Die letzte Vermuthung ist trotz ihrer Leichtigkeit nicht allzu wahrscheinlich; denn es ist undenkbar dass Euripides gesagt habe μὴ κτυπεῖτε, μὴ ἔστω κτύπος, und statt die Worte μηδ' ἔστω κτύπος zu verbessern musste man vielmehr sie einfach tilgen, da nichts näher liegt als die Annahme dass sie aus V. 137 wiederholt sind, und da Dionysius Hal. vol. 5 p. 63 ed. Reisk. sie gar nicht kennt. Vollkommen sicher ist dagegen Porsons τίθετε, trotzdem dass τιθεῖτε auch bei Dionysius Hal. überliefert zu sein scheint (in die Schol. Nic. Ther. 424 ist es erst durch willkürliche Interpolation hineingetragen worden). Mit vollem Rechte behauptet Porson: "*Attici dicebant* τίθημι, τίθης, τίθησι. *Ubicunque* τιθεῖς *legitur, legitur ex errore scribarum* ει *et* η *permutantium. Exempla proferri debebant, ubi versu coyente* τιθῶ, τιθεῖ, τιθοῦμεν, τιθεῖτε *Attici adhibuerint.*" Bei Euripides ist τιθεῖς überliefert Alc. 890. Andr. 210. Ion 741. Cycl. 545, ebenso προστιθεῖς Hel. 549. Heracl. 690. Herc. F. 710. Ion 1525, ὑποτιθεῖς Or. 1186. An allen diesen Stellen ist τίθης (προστίθης, ὑποτίθης) durch das Metrum gestattet, wie an unserer Stelle τίθετε durch das Metrum geboten wird; und in den besser erhaltenen Stücken (Alc. 890. Andr. 210. Orest. 1186) zeigt sich jedesmal selbst in der Ueberlieferung ein Schwanken zwischen —ης und —εῖς, zumal Andr. 210, wo τίθης weit besser verbürgt ist als τιθεῖς. Daher war es nicht zu billigen, wenn Kirchhoff an den bezeichneten neun

Stellen die Endung —εῖς in den Text setzte. Ebenso irrt Schneidewin Soph. Oed. R. 628, wenn er sagt: "ξυνίεις statt ξυνίης habe ich hier wie Ant. 399. El. 1339 (vielmehr Ant. 403. El. 1347) aus den Quellen hergestellt, El. 586 (vielmehr El. 596) ἵεις. Aus dem ursprünglichen ἵημι, ἵησι, ἵητι wird ἵεις, ἵει, indem durch Abwerfung des Iota der Endung der Umlaut ει statt η eintritt." Eine Form ἵει als Indic. praes. sollte für die Attiker erst erwiesen sein; so lange dies nicht geschehen ist, kann auf ἵεις oder ἱεῖς statt ἵης nichts gegeben werden. Unrichtig schreibt Cobet V. L. p. 227 f. in einem Eupolideischen Bruchstück (Fragm. Com. V p. LXX) καὶ τιθεῖς ἄνω σκέλη, mit der Bemerkung: "τιθεῖς *enim pro* τίθης, *ut* ἱεῖς *pro* ἵης, *dixisse veteres novo indicio demonstrabo.*" Der Beweis soll geführt werden aus einem Gedicht des Castorion bei Athenaeus X p. 455 A, wo Cobet nicht ohne Wahrscheinlichkeit μειλιγμ' ἱεῖς zu schreiben vorschlägt. Nur hätte Cobet vor allen Dingen beweisen sollen, dass Castorion zu den *veteres* gehörte und dass aus seiner Spielerei auf den Sprachgebrauch der Attiker geschlossen werden dürfe. Dass letzteres nicht der Fall ist weiss Cobet selbst sehr wohl; es wird ihm niemals einfallen zu behaupten dass solche Formen des Castorion wie μωσοπόλε statt μουσοπόλε oder κλύεν statt κλύειν in der Tragoedie oder in der Attischen Prosa je gehört worden seien. Aber Cobet liebt es nun einmal seine Leser zu mystificiren. So wird man denn leicht beurtheilen können was von seiner Behauptung N. L. p. 699 zu halten sei: "*idem* (Stobaeus) *in* § 11 (bei Xenoph. Memor. 3, 4, 11) *pro* ἐκεῖνο παρίης *exhibet* παριεῖς, *quod non erat spernendum, sed lenissime in* παριεῖς *emendandum. Sic enim dicebant, ut* τιθεῖς *quoque, non* τίθης, *quod redde Demostheni in Timocratea* § 107. νόμον τιθεῖς, *et* § 122. τοὺς μὲν ἀφιεῖς, *pro* τίθης *et* ἀφίης." Doch genug hiervon. Es ergiebt sich aus dem Bisherigen folgende Fassung der Strophe:

ΧΟ. σῖγα σῖγα, λεπτὸν ἴχνος ἀρβύλης
τίθετε, μὴ κτυπεῖτ'.
ΗΛ. ἀποπρὸ βᾶτ' ἐκεῖσ', ἀποπρό μοι κοίτας.

Hiernach dürfte es nicht schwer sein die Antistrophe in Ordnung zu bringen, wo die Worte τίνα τύχαν εἴπω, die an sich in den Zusammenhang nicht passen, eine überflüssige und verkehrte Zuthat zu sein scheinen. Tilgt man diese Worte, so stimmt der Anfang beider Strophen hinsichtlich des Metrum genau zusammen:

ΧΟ. πῶς ἔχει; λόγου μετάδος, ὦ φίλα·
τίνα δὲ συμφορᾶν;
ΗΛ. ἔτι μὲν ἐμπνέει, βραχὺ δ' ἀναστένει.

Die Worte τίνα δὲ συμφορᾶν sind natürlich von ἔχει abhängig. Die noch übrig bleibende Differenz der Dochmien ἀποπρό μοι κοίτας und βραχὺ δ' ἀναστένει ist, wie ich glaube, nicht dem Dichter selbst beizumessen. Das Verbum ἀναστένειν, welches ein lautes Seufzen bezeichnet, dürfte hier schwerlich am Orte sein: ἀνασπμαίνειν ist erst aus spätern Dichtern nachweisbar.

V. 158 f. redet Electra den Chor an:

ὀλεῖς, εἰ βλέφαρα κινήσεις

ὕπνου γλυκυτάταν φερομένῳ χαράν.

Der ungefähre Sinn dieser Worte ist leicht verständlich: "hüte dich den Schlafenden zu wecken." Das Verbum κινεῖν ist hier in ähnlicher Weise gebraucht wie Bacch. 690: ἐξ ὕπνου κινεῖν δέμας und Soph. fr. 199: ἄπελθε, κινεῖς ὕπνον ἰατρὸν νόσου (denn so ist statt ἄπελθ' ἐκείνης zu lesen). Aber wie soll der Schlafende genannt werden ὕπνου φερόμενος χαράν? Weder ist ὕπνου χαρά denkbar, noch passt φερόμενος, was bezeichnen würde "mit sich nehmend, davontragend." Statt φερομένῳ habe ich, was Kirchhoff unbeachtet lässt, schon in der ersten Ausgabe δρεπομένῳ vermuthet, und auch jetzt halte ich diese Vermuthung für sehr wahrscheinlich: *carpere somnum, quietem, soporem* ist aus Lateinischen Dichtern hinlänglich bekannt. In χαράν scheint nichts anderes zu liegen als das von alten Abschreibern als Vermuthung oder als Variante angemerkte χάριν, wenigstens spricht dafür ὕπνου χάριν V. 186. Nach dem strophischen Verse (146: λεπτοῦ δόνακος, ὦ φίλα, φώνει μοι) sollte man freilich vielmehr einen Spondeus oder Trochaeus erwarten; vielleicht aber liegt gerade in φώνει μοι ein Fehler.

Die an den Chor gerichtete Aufforderung sich zu entfernen kleidet Electra nach der Ueberlieferung in folgende Worte:

170 οὐκ ἀφ' ἡμῶν, οὐκ ἀπ' οἴκων
πάλιν ἀνὰ πόδα σὸν εἰλίξεις,
μεθεμένα κτύπου;

Diesen Worten entspricht in der Antistrophe:

191 ἐξέθυσ' ὁ Φοῖβος ἡμᾶς
μέλεον ἀπόφονον αἷμα δοὺς
πατροφόνου ματρός.

Eine strenge Responsion hat Porson hergestellt, indem er schrieb:

πάλιν ἀνὰ μεθεμένα κτύπου
πόδα σὸν εἰλίξεις;

So entsprechen sich die Dochmien vollkommen genau. Allein dass ἀνά unrichtig ist, tritt nun noch deutlicher hervor als in der Vulgate. Es wird zu lesen sein:

πάλιν ἄρα μεθεμένα κτύπου κτέ.

Wie oft ν und ρ verwechselt werden[1]), ist hinreichend bekannt.

1) Vgl. Theognostus p. 9, 32: λεωκόνητος ὁ ἐφθαρμένος, wo jeder sofort λεωκόρητος erkennen wird. Eur. Bacch. 688: οὐχ ὡς σὺ φῄς (Βάκχας) ᾠνωμένας κρατῆρι καὶ λωτοῦ ψόφῳ θηρᾶν καθ' ὕλην Κύπριν ἠρεμωμένας. So der codex Pal.; es ist, wie ich bereits in der zweiten Ausgabe gethan habe, ἠνεμωμένας zu verbessern; die weitere Begründung dieser Emendation werde ich künftig geben; einstweilen genügt es an das ἐξηνεμώθην μορία Andr. 938 und an die Bemerkung von Jacobs Aelian. N. A. 7, 17 p. 260 zu erinnern. Bei Empedocles liest man V. 277 ed. Stein.:

ἐν γὰρ θερμοτέρῳ ἄρρεν δέμας ἔπλετο γαστρός,
καὶ μέλανες διὰ τοῦτο καὶ ἀνδρωδέστεροι ἄνδρες
καὶ λαχνήεντες μᾶλλον.

Zu sagen die Männer seien ἀνδρωδέστεροι als die Frauen, wäre genau ebenso sinnlos als wenn jemand behaupten wollte, der Kreis sei kreisförmiger als die gerade Linie. Karstens Vermuthung ἀδρομελέστεροι ist indess weder palaeographisch leicht noch irgend wie sinngemäss, da eine grössere Geschmeidigkeit der Glieder schwerlich den Männern zugeschrieben werden kann. Es muss heissen ἀρθρωδέστεροι ἄνδρες, d. h. die Männer ha-

179 τὸν Ἀγαμεμνόνιον ἐπὶ δόμον

Der antistrophische Vers,

ὀλόμεσθ' ἰσονέκυες, ὀλόμεσθα,

stimmt hiermit nicht genau zusammen. Entweder ist in ἰσονέκυες die erste Silbe kurz, dann wird die Länge der Strophe in der Antistrophe durch zwei Kürzen vertreten; oder ἰσονέκυες hat ein langes Iota (vgl. Porson zu Eur. Orest. 9), und die Antistrophe enthält eine Kürze zu viel. Ich möchte mit Porson den Dualis ἰσονέκυε herstellen, dann würde eine genaue strophische Responsion erreicht sein:

τὸν Ἀγαμεμνόνιον ἐπὶ δόμον

und ὀλόμεσθ' ἰσονέκυ', ὀλόμεσθα.

Uebrigens ist hier Ἀγαμεμνόνειον die handschriftliche Lesart, und Cobet hält, wenn ich seine Behauptung V. L. p. 66 und N. L. p. 77 richtig verstehe, diese Form für die allein zulässige. An den meisten Euripideischen Stellen, wo das Adjectivum mit kurzer Penultima sich findet (ausser Orest. 179 vgl. Andr. 1034. Iphig. Taur. 170. 1115. Rhes. 44. 258. Tro. 139), schwanken die Handschriften zwischen —ειος und —ιος: bei Pindar Pyth. 11, 20 und Aesch. Agam. 1499. Choeph. 861 ist dagegen Ἀγαμεμνόνιος ohne Variante überliefert, und von der epischen Form Ἀγαμεμνόνες ist auch bei Euripides in unseren Handschriften keine Spur zu entdecken. Somit wird man nicht umhin können, Ἀγαμεμνόνιος der Tragoedie zuzugestehen. Dagegen dürfte Phoen. 188 das von der Handschrift A gebotene Ποσειδωνείοις Ἀμυμονείοις ὕδασι

aufzunehmen sein statt der jetzt üblichen Lesart Ποσειδανίοις Ἀμυμωνίοις.

235 OP. ὦ μῆτερ, ἱκετεύω σε, μὴ ἐπίσειέ μοι
τὰς αἱματωπούς καὶ δρακοντώδεις κόρας·
αὗται γὰρ αὗται πλησίον Ἐρώσκουσί μου.

Den letzten Vers, der die Symmetrie im Zwiegespräch des Orestes und der Electra stört und in der Form des Ausdrucks manches auffallende hat, habe ich bereits in meiner ersten Ausgabe als verdächtig bezeichnet. Kirchhoff ist diesem Urtheil beigetreten mit folgender Bemerkung: "*hic versus histrionis potius fetus esse videtur quam ipsius poetae. uncis eum inclusit Hartungius*". Hiernach muss jeder glauben, dass Hartung zuerst die Unechtheit dieses Verses behauptet und dass ich hinterher Hartungs Behauptung adoptirt und stillschweigend zu der meinigen gemacht. Diese Voraussetzung würde gleichwohl irrig sein; Hartung hat nicht nach eigener, sondern nach Elmsleys Vermuthung den Vers an eine andere Stelle gesetzt, nämlich nach den Worten εἴ μ' ἐκφοβοῖεν μανιάσιν λυσσήμασιν 270, und mit einer allerdings befremdlichen Flüchtigkeit vorher ihn nicht getilgt, sondern eingeklammert.

277 πνεῦμ' ἀνεὶς ἐκ πνευμόνων.

ben einen stärkeren und kräftigeren Gliederbau. Uebrigens ist auch der erste Vers des citirten Fragmentes noch nicht geheilt; die Ueberlieferung lautet: ἐν γὰρ δερμοτέρῳ τὸ κατ' ὄρρενα ἔπλετο γαίης.

Vielmehr ἐκ πλευμόνων, denn nur diese Form ist von den Attikern gebraucht worden: s. Schol. Aristoph. Pac. 1069. Moeris p. 309. Greg. Cor. ed. Schaef. p. 147 f. Eust. Il. p. 483, 10. Od. p. 1436, 61, wonach Thomas Mag. p. 276, 3 leicht zu berichtigen war. Nach den Handschriften sich für die eine oder die andere Form entscheiden heisst nichts anderes als die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten durch das Loos bestimmen. In den Euripideischen Codices (ausser der angeführten Stelle vgl. Herc. F. 1093. Ion 524. 767) ist zufällig das Ny herrschend; wogegen bei Eur. fr. 973 unsere Quellen zwischen πνευμόνων und πλευμόνων getheilt sind. Bei Sophocles findet sich πλεύμονας Trach. 567. fr. 856, 7. 15, πλεύμονος mit übergeschriebenem Ny Trach. 1054, dagegen πνευμόνων Trach. 778. In Soph. fr. 311 ist πνευμάτων überliefert, wofür πλευμόνων herzustellen ist. Bei Aeschylus haben an den beiden in Betracht kommenden Stellen (Sept. 61 und Choeph. 629 Herm.) erst neuere Herausgeber das Labda verdrängt.

σὺ μὲν γὰρ ἐπένευσας τάδ', εἴργασται δ' ἐμοὶ
μητρῷον αἷμα· λοξίᾳ δὲ μέμφομαι,
ὅστις μ' ἐπάρας ἔργον ἀνοσιώτατον,
τοῖς μὲν λόγοις ηὔφρανε, τοῖς δ' ἔργοισιν οὔ.

Statt ἐπένευσας habe ich ehemals ἧνεσας zu schreiben vorgeschlagen. Dies würde, wie mir scheint, deutlicher und bestimmter sein; allerdings aber fehlt es nicht an Stellen, wo ἐπινεύειν τι in der Bedeutung "etwas zugeben und geschehen lassen" gebraucht zu sein scheint. So namentlich Demosth. c. Mid. § 139: φανερῶς μὲν οὐκ ἐνοχλούντων ὑμῖν, σιγῇ δὲ τὰ ψευδῆ ᾔδεσθ' ἐπινευόντων. Weniger passend sind andere von den Lexikographen beigebrachte Beispiele, in denen von den Göttern die Rede ist (so Eur. Hel. 681: Πάριν ᾧ μ' ἐπένευσεν. Demosth. de cor. § 324: μὴ δῆτ', ὦ πάντες θεοί, μηδεὶς ταῦτ' ὑμῶν ἐπινεύσειεν), und bei Callimachus lav. Pall. 104: ἐπεὶ Μοιρῶν ὧδ' ἐπένευσε λίνα, hat schon Bentley unzweifelhaft richtig ἐπένησε verbessert, vgl. Meineke Philol. XIV p. 3. Unsicher ist die Lesart auch bei Eur. Bacch. 1349:

πάλαι τάδε Ζεὺς οὑμὸς ἐπένευσεν πατήρ,

wo die Handschrift ἐπῄνεσεν bietet. Hiernach habe ich vermuthet πάλαι τάδε Ζεὺς ἐμὸς ἐπῄνεσεν πατήρ (ε und ᾱ werden sehr oft verwechselt); man könnte indess auch an οὑμὸς ἧνεσεν oder οὑμὸς ἐπένησεν πατήρ denken. — Nach dem Verse

ὅστις μ' ἐπάρας ἔργον ἀνοσιώτατον

nimmt Kirchhoff eine Lücke an: "*desiderari nonnulla manifestum est*". Vermuthlich war es die Construction von ἐπαίρω, welche ihm unzulässig schien: wenigstens hat G. Hermann hieran Anstoss genommen und nicht eben glücklich vermuthet

ὅστις μ' ἐπάρας ἔργον ἀνοσιώτατον
δρᾶσαι, λόγοις εὔφρανε, τοῖς δ' ἔργοισιν οὔ.

Aehnlich Hartung: δρᾶν, τοῖς λόγοις εὔφρανε. Ebenso haben alte Abschreiber das ἐπαίρειν τινά τι beanstandet, und deshalb, ohne nach dem Metrum zu fragen, entweder vor oder

nach ἔργον die Praeposition εἰς eingeschaltet. Andere würden vielleicht vorziehen zu schreiben:

ὃς δρᾶν μ' ἐπάρας ἔργον ἀνοσιώτατον
τοῖς μὲν λόγοις ηὔφρανε, τοῖς δ' ἐργοισιν οὔ.

Indess wenn überhaupt der von ἐπαίρειν abhängige doppelte Accusativ zu beanstanden ist, der wenigstens die Analogie des synonymen πείθειν τινά τι für sich hat, so möchte ich vermuthen:

Λοξίᾳ δὲ μέμφομαι,
ὃς τοῖς λόγοις μ' ηὔφρανε, τοῖς δ' ἐργοισιν οὔ,
δρᾶσαί μ' ἐπάρας ἔργον ἀνοσιώτατον.

Hatten V. 286 und 287 ihre Stelle getauscht, so erscheint es als etwas ganz einfaches und natürliches, wenn ein Corrector ihre Anfänge in der Weise umgestaltete, wie sie in unseren Handschriften vorliegen. Dass übrigens die Lesart ὅστις μ' ἐπάρας ziemlich alt ist, lehrt das Citat in den Schol. Soph. Oed. R. 1328.

κἂν μὴ νοσῇς γάρ, ἀλλὰ δοξάζῃς νοσεῖν,
κάματος βροτοῖσιν ἀπορία τε γίνεται.

In dem Zusammenhang der Rede, welcher diese Verse angehören, ist es vollkommen unmöglich νοσῇς und δοξάζῃς in dem Sinne von νοσῇ τις und δοξάζῃ τις zu fassen. Electra hat unmittelbar vorher zum Orestes gesagt "bleibe auf deinem Lager"; es würde abgeschmackt sein, wenn sie verlangen wollte, κἂν μὴ νοσῇς sollte ihr Bruder nicht auf sich selbst beziehen. Wird aber νοσῇς und δοξάζῃς vom Orestes verstanden, wie es nothwendig verstanden werden muss, so trifft den Nachsatz der Vorwurf der äussersten Absurdität; statt βροτοῖσιν müsste σοί oder ἐμοί gesagt sein. Bereits Callistratus, ein Schüler des Grammatikers Aristophanes, hat eingesehen dass die Stelle an einem Fehler leidet; durch seine Vermuthung νοσῇ und δοζάζῃ bekommen wir die allgemeine Sentenz: "auch eine vermeintliche Krankheit ist ein Leiden". Aber wem wäre es wohl in den Sinn gekommen statt νοσῇ und δοξάζῃ die zweite Person zu substituiren? Und sodann, was bei weitem mehr in Betracht kommt, die Sentenz ist hier völlig unpassend. "Lege dich nieder," sagt Electra, "und mache dir nicht zu viel aus den Schreckbildern die dich aufscheuchen; bleibe auf deinem Lager". Wie soll sie nach diesen Worten fortfahren "denn auch die eingebildete Krankheit ist ein κάματος und eine ἀπορία für die Sterblichen"? Sie wird vielmehr, wenn sie nicht unverständig und confus reden will, ungefähr sagen müssen: "bleibe auf deinem Lager; denn wenn auch deine Krankheit nicht wirklich, sondern nur in deiner Einbildung vorhanden sein sollte, so wirst du doch wohl thun ruhig liegen zu bleiben wie ein Kranker". Wer fest hält, dass νοσῇς sich auf den Orestes bezieht, wird es nicht zu kühn finden, wenn ich verbessere:

κἂν μὴ νοσῇς γάρ, ἀλλὰ δοξάζεις νοσεῖν.

D. h. "wenn du auch nicht krank bist, so wähnst du doch krank zu sein" — und darum μένε ἐπὶ στρωτοῦ λέχους. Der angehängte Vers aber,

κάματος βροτοῖσιν ἀπορία τε γίνεται,

darf nicht weiter ein Gegenstand des κάματος und der ἀπορία werden; er ist sicherlich nichts als eine dummdreiste Interpolation, die zur Ergänzung des scheinbar fehlenden Nachsatzes dienen sollte.

321 μελαγχρῶτες Εὐμενίδες, αἶτε τὸν
ταναὸν αἰθέρ' ἀμπάλλεσθ', αἵματος
τινύμεναι δίκαν, τινύμεναι φόνον.

Statt μελαγχρῶτες war zu accentuiren μελάγχρωτες, vgl. Arcad. p. 93,21. Das Verbum πάλλεσθαι würde sich für einen leblosen Gegenstand schicken, der willenlos und ohne die Freiheit der Selbstbestimmung fortgerissen wird, nicht aber schickt es sich für die Göttinnen, welche die Höhen des Himmels durchwandeln als Rächerinnen der Blutschuld. Von ihnen muss man vielmehr ein Verbum wie πολεῖσθαι oder ποτᾶσθαι erwarten. Vielleicht ist zu schreiben ἀμπολεῖσθ', wofür auch die am besten beglaubigte Lesart ἀμπάλεσθ' (so AF) und das Metrum des antistrophischen Verses zu sprechen scheint. Statt αἶτε V. 321 ist wohl αἵ γε zu lesen.

Der Schluss der Strophe in dem so eben berührten Chorgesang lautet (V. 329 ff):

τρίποδος ἄπο φάτιν, ἂν ὁ Φοῖβος
330 ἔλακεν ἔλακε, δεξάμενος, ἀνὰ δάπεδον
ἵνα μεσομφαλοι λέγονται μυχοὶ γᾶς.

Diesen drei Versen correspondirt folgendes in der Antistrophe:

345 τίνα γὰρ ἔτι πάρος οἶκον ἄλλον
ἕτερον ἢ τὸν ἀπὸ θεογόνων γάμων
τὸν ἀπὸ Ταντάλου σέβεσθαί με χρή;

Nachdem das letzte Wort der Strophe von einem alten Verbesserer getilgt war, schien alles in Ordnung zu sein. Indess muss schon der Umstand Bedenken erregen, dass die mittleren der angeführten Verse ein verschiedenes Schema der Dochmien zeigen. Wir finden

in der Strophe: ⏑ ⏑́⏑ ⏑́⏑ ⏑ –́ , ⏑ ⏑́⏑ ⏑́⏑ ⏑ ⏑́⏑,
in der Antistr.: ⏑ ⏑́⏑ –́ ⏑ ⏑́⏑, ⏑ ⏑́⏑ –́ ⏑ –́ .

Die Herausgeber hätten wohl gethan, Hermanns Anmerkung zu V. 305 zu beherzigen. "*In hoc carmine non ubique exaequati reperiuntur pedes dochmiorum. Ego quidem quo magis scripturas codicum in carminibus melicis poetarum scenicorum noscitavi, eo magis adductus sum ut multo maiorem in hoc genere diligentiam quam putabatur adhibitam esse credam. Nam quin potuerint omnia inter se paria reddere in tanta linguae et copia et flexibilitate, quis dubitet*"? Es liessen sich lange Reihen von Stellen anführen, wenn man die Beispiele sammeln wollte, wo die Ungleichheiten zwischen Strophe und Antistrophe, die in den älteren Ausgaben sich fanden, entweder nach handschriftlicher Autorität oder durch allgemein anerkannte Verbes-

serungen beseitigt worden sind. Auch an unserer Stelle glaube ich auf die Zustimmung aller Kundigen zählen zu dürfen, wenn ich in der Strophe die Worte ἔλακεν und ἀνὰ δάπεδον, in der Antistrophe den Zusatz τὸν ἀπὸ Ταντάλου als Fälschungen bezeichne, mit deren Ausmerzung dem Metrum gedient und dem Sinne nichts entzogen wird. Jetzt entspricht sich:

τρίποδος ἄπο φάτιν, ἂν ὁ Φοῖβος
ἔλακε δεξάμενος ἵνα μεσόμφαλοι
λέγονται μυχοί.

und τίνα γὰρ ἔτι πάρος οἶκον ἄλλον
ἕτερον ἢ τὸν ἀπὸ Διογόνων γάμων
σέβεσθαί με χρή;

An dem Zusatze τὸν ἀπὸ Ταντάλου hat bereits Hermann Anstoss genommen: "*non est credibile domum Pelopidarum* τὸν ἀπὸ Διογόνων γάμων *dici hac tantum causa potuisse, quod Tantalus filius Iovis fuerit: immo utrumque parentem ab diis ortum significari necesse est*».

366 Μενέλαε, κεῖται σὸς κασίγνητος ξανών,
λουτροῖσιν ἀλόχου περιπεσὼν πανυστάτοις.

Unter λουτρὰ Κλυταιμνήστρας πανύστατα soll man sich hier ein Bad denken, welches nicht Clytaemnestra nimmt, sondern Agamemnon, und welches das letzte ist für den Agamemnon, nicht für die Clytaemnestra. Es scheint dies mehr als bedenklich, und auch ohne die Stelle in Eur. El. 157: πατέρ' ἐγὼ κατακλαίομαι λουτρὰ πανύσταθ' ὑδραναμένου χροΐ, muss jeder zugestehen dass λουτροῖσιν ἀλόχου πανυστάτοις mindestens unbestimmt, wo nicht völlig verkehrt ist. Dazu kommt dass πανυστάτοις in dieser Verbindung als müssig und pleonastisch erscheint. Und wer wird überhaupt sagen λουτροῖς περιπίπτειν, dem Bad anheimfallen? In λουτροῖσιν ist nichts enthalten was auf ein Unglück oder Missgeschick hindeutete, und darum ist es nicht denkbar dass jemand nach Analogie von νόσῳ, κακῷ περιπίπτειν und ähnlichen Verbindungen auch λουτροῖς περιπίπτειν gewagt haben sollte. Den angeregten Bedenken hilft die leichte Aenderung

λουτροῖσιν ἀλόχου περιπεσὼν ἀρκυστάτοις,

d. h. Agamemnon erlag im Bade den Netzen seiner Gattin. Eines ähnlichen Ausdrucks scheint Soph. El. 125 sich bedient zu haben. Wenn daselbst Electra sagt:

ματρὸς ἀλόντ' ἀπάταις Ἀγαμέμνονα,

so ist ἀπάταις ein zu allgemeiner und unbestimmter Ausdruck für die hier zu bezeichnende Sache: vielleicht ist zu lesen ματρὸς ἁλόντα πάγαις. Eine Spur dieser Lesart scheint in den Worten der Scholien zu liegen μητρὸς ἁλόντα πληγαῖς. Wenigstens sehe ich nicht ein, wie jemand darauf verfallen sein sollte ἀπάταις durch πληγαῖς zu erklären: dagegen ist es wohl denkbar dass πάγαις in πλαγαῖς und dann in πληγαῖς überging.

383 ἱκέτης, ἀφύλλου στόματος ἑξάπτων λιτάς.

Reiskes Verbesserung ἀφύλλους musste unbedenklich in den Text genommen werden trotz Hesychius und Eustathius, die eben nur, wie zu erwarten, das Vorgefundene nachschrieben. Von einem στόμα ἄφυλλον kann nicht die Rede sein, weil Bittende ihre στέμματα oder ἱκτῆρες κλάδοι nicht in den Mund nehmen, sondern in die Hand. Vgl. das Homerische στέμματ' ἔχων ἐν χερσί, Soph. Oed. R. 912: τάδ' ἐν χεροῖν στέφη λαβούσῃ und ähnliches. Somit sind ἄφυλλοι λιταί Bitten ohne die üblichen Zweige, mit denen sonst Bittende sich nahen. Aehnliche Ausdrucksweisen, wie ἀνήφαιστον πῦρ, ἄπτεροι Πελειάδες, στρατὸς ἀνθέων ἄλογχος u. a., habe ich zu Soph. El. 888 zusammengestellt. Vgl. ἀποβώμιος θυσία Eur. Cycl. 365. κόνιν ἄναυδον ἄγγελον Aesch. Suppl. 180. ἀσιδήροις μοχλοῖς Eur. Bacch. 1104. πόλεμός τις ἀσίδηρος Theophyl. Simoc. ed. Boiss. p. 6. βέλος ἀσίδηρον Constant. Manass. 1, 17 ed. Boiss. Θεόφραστος ἄοινα συμπόσια παίζων ἐκάλει τὰ κουρεῖα Plut. Mor. p. 679 A, vgl. p. 716 A. ἔσοπτρα τῶν ἀντιμόρφων χαρακτήρων ἀγράφους εἰκόνας Lucian Amor. c. 44. ἀδορυφόρητος βασιλεία (von der Schönheit) Carneades bei Diog. Laert. 5, 19. ἀξύλῳ πυρὶ συμφορῶν Tzetzes Hesiod. Op. 698. θυσία ἄκαπνος Schneidewin zu Eust. prooem. Pind. p. 23, wo hinzuzufügen ist Eust. Opusc. p. 355, 80: ὅσοι δὴ ἄναυδα (vielmehr ἄκαπνα) κατὰ τοὺς ἀοιδοὺς θύουσιν. Die Aenderung ἀφύλλους ist um so leichter, da das folgende Wort mit einem Sigma beginnt. Vgl. Moschopul. Opusc. p. 30: ἕτερον εἶδος, ὃ συναλοιφὴ ὀνομάζεται διαζόντως (l. ἰδιαζόντως).

391 ὦ παράλογόν μοι σὴ φανεῖσ' ἀμορφία.

Wenn ich παράλογον für unrichtig halte, so mag ich kein grosses Gewicht darauf legen, dass παράλογος von keinem Tragiker gebraucht zu sein scheint. Das Neutrum aber, welches "ein sonderbares Ding" bezeichnen würde, ist hier nicht angemessen; hätte Euripides das Adjectivum gewollt, so würde er ohne Zweifel παράλογος geschrieben haben. Die jetzige Lesart zeigt dass wir trennen müssen, ὦ παρὰ λόγον μοι. Nachdem ich so in der ersten Ausgabe verbessert, hätte Kirchhoff diese Verbesserung, die kaum als eine Abweichung von den Handschriften betrachtet werden kann, aufnehmen sollen, gleichwie er Bacch. 933 hat drucken lassen

ὅταν παρὰ λόγον σώφρονας βάκχας ἴδῃς,

obwohl die Handschrift παραλόγον bietet[1]).

1) Beiläufig bemerke ich dass die Griechen selbst der späteren Zeit den Begriff übermenschlich lieber durch Umschreibung als durch ein Compositum ausdrücken. Posidonius bei Athen. V p. 213 B: πᾶσα δε πόλις ταῖς ὑπὲρ ἄνθρωπον τιμαῖς ὑπαντῶσα κατακαλεῖται τὸν θεὸν βασιλῆα. Apollonius Hist. mirab. c. 6: ἤκουσε φωνὴν μεγάλην ὑπὲρ ἄνθρωπον "Πυθαγόρα χαῖρε". Artemidor. 1, 50 p. 71: εἰ μὴ ὑπὲρ ἄνθρωπόν τις μέγας δόξειε γεγονέναι. p. 74: ὅταν μὴ ὑπὲρ ἄνθρωπον ᾖ ταῦτα. Xenoph. Ephes. 1, 12: γυνὴ ὀφθῆναι φοβερά, τὸ μέγεθος ὑπερ ἄνθρωπον. Cassius Dio 53, 7: τὸ γὰρ ἀποδιδόναι ὑπὲρ ἄνθρωπόν ἐστιν. 59, 25: ὅτι μὴ τὰ ὑπὲρ ἄνθρωπον αὐτῷ ἐψηφίσατο. 59, 26: ἠξίου μὲν γὰρ καὶ πρότερον ὑπὲρ ἄνθρωπον νομίζεσθαι. Unrichtig ist die hergebrachte Lesart bei Lucian Catapl. c. 16: ὥστε ὑπεράνθρωπός τις ἀνὴρ καὶ τρισόλβιός μοι κατεφαίνετο, wo die meisten und besten Handschriften ὥσπερ ἂν θεῖός τις ἀνὴρ bieten. Auffallend muss hiernach erscheinen Dionysius Hal. Antiq. Rom. XI, 35 p. 2246, 3: οὕτως ὑπεράνθρωπός τις ὥρα περὶ αὐτὴν καὶ χάρις ἦν. Bevor wir über diese Stelle urtheilen, ist es nothwendig zuverlässige Mittheilungen über die Lesart der besten Handschriften abzuwarten.

394 φειδόμεθ'· ὁ δαίμων δ' εἰς ἐμὲ πλούσιος κακῶν.

So die Handschriften: Kirchhoff hat nach dem Vorgang von Barnes ἐς ἐμὲ geschrieben: es musste vielmehr εἰς με (oder ἔς με) hergestellt werden, und ganz in derselben Weise Orest. 736: Μενέλεως κάκιστος εἰς με καὶ κασιγνήτην ἐμήν, wo die Lesart der besten Handschrift εἰς μὲ dem Richtigen sehr nahe kommt. Vgl. über diese Frage Elmsley zu Eur. Bacch. 804.

407 ἐκ φασμάτων δὲ τάδε νοσεῖς ποίων ὕπο;

Statt ἐκ φασμάτων findet sich die Variante φαντασμάτων. Dass hiermit die ursprüngliche Lesart gegeben sei, mag ich nicht behaupten; aber wenigstens kann die Verbindung ἐκ φασμάτων ποίων ὕπο nicht richtig sein. Bei Soph. Trach. 1160:

πρὸς τῶν πνεόντων μηδενὸς θανεῖν ὕπο,

hat Erfurdt[1]) mit Recht verbessert τῶν ἐμπνεόντων, schon deshalb weil die Tragiker nicht das Simplex πνεῖν im Sinne von ζῆν gebrauchen, sondern dafür ἐμπνεῖν sagen. An der Euripideischen Stelle genügt es vielleicht, die Interpunction zu ändern: ἐκ φασμάτων δὲ τάδε νοσεῖς; ποίων ὕπο;

ΜΕ. πόσον χρόνον δὲ μητρὸς εἴχονται πνοαί;
ΟΡ. ἕκτον τόδ' ἦμαρ· ἔτι πυρὰ θερμὴ τάφου.
ΜΕ. ὡς ταχὺ μετῆλθόν σ' αἷμα μητέρος θεαί.
ΟΡ. οὐ σοφός, ἀληθὴς δ' εἰς φίλους ἔφυν φίλος.
425 ΜΕ. πατρὸς δὲ δή τί σ' ὠφελεῖ τιμωρία;
ΟΡ. οὔπω· τὸ μέλλον δ' ἴσον ἀπραξίᾳ λέγω.

V. 424 habe ich die in den neueren Ausgaben heimisch gewordene Aenderung von Brunck wiedergegeben, während die Handschriften εἰς φίλους ἔφυς κακός bieten. Obwohl ich zugebe dass Porson zu viel sagte, wenn er die Brunckschе Vermuthung als eine *certissima emendatio* bezeichnete, so meine ich doch dass sie gegen den Sinn und Zusammenhang unserer Stelle wenigstens in keiner Weise verstösst. Einen ganz verschiedenen Weg hat Kirchhoff eingeschlagen. Er vermuthet nach V. 423 sei ein Vers des Orestes ausgefallen; dann giebt er dem Menelaus die Worte εἰς φίλους ἔφυς κακός, und endlich bekommt Orestes den halben Trimeter οὐ σοφός, ἀληθὴς δ'. Somit erscheinen in seiner Ausgabe die Verse 423—425 in folgender Gestalt:

ΜΕ. ὡς ταχὺ μετῆλθόν σ' αἷμα μητέρος θεαί.
ΟΡ. . . . . .
ΜΕ. . . . . εἰς φίλους ἔφυς κακός.
ΟΡ. οὐ σοφός, ἀληθὴς δ' . . . . . .
ΜΕ. πατρὸς δὲ δή τί σ' ὠφελεῖ τιμωρία;

1) Erfurdt hat so verbessert, nicht Th. Bergk, wie man nach dem Tauchnitzer Sophocles vom J. 1858 glauben könnte. Ueberhaupt sollte Bergk gegen das *suum cuique* sich weniger gleichgiltig verhalten.

Die Umstellung der beiden Vershälften hat er nämlich in gleicher Weise wie die Bezeichnung der vermeintlichen Lücken ohne weiteres in den Text hineingetragen und, was besonders überraschen muss, in der *adnotatio critica* von seiner Umstellung gar nichts erwähnt, sondern mit einem einfachen "*indicavi lacunas*" sich über die Angabe der handschriftlichen Lesart wie über die Begründung der vorgenommenen Aenderung hinweggesetzt. Einen gewissen Schein von Wahrscheinlichkeit würde Kirchhoffs Vermuthung möglicher Weise beanspruchen können, wenn es ihm beliebt hätte die angesetzten Lücken in einer sinngemässen Weise auszufüllen; jetzt muss mindestens die Umstellung der Vershälften als ein Act der Willkür, das Verschweigen der Ueberlieferung aber als ein etwas starker Flüchtigkeitsfehler erscheinen[1]). Uebrigens dürfte μητέρος V. 423 aus μητρῷον entstanden sein.

Auf die Frage des Menelaus, in welchem Verhältniss Orestes zu den Argivern stehe, antwortet dieser, er werde von allen gehasst und sei von jeglichem Verkehr ausgeschlossen. Schwierig sind hier die Worte des Menelaus:

429 οὐδ' ἥγνισαι σὸν αἷμα κατὰ νόμον χεροῖν;

wo νόμον mit A und geringeren Handschriften statt νόμους gesetzt ist. Wenn man gewöhnlich σὸν αἷμα χερσῖν für αἷμα σαὶν χερσῖν nimmt und das Blut versteht womit Orestes seine Hände befleckt hat, so halte ich dies für ein willkürliches und gewaltsames Verfahren der Interpretation. Auch mit Hartungs σεῖν, was übrigens doch σαῖν lauten müsste, ist nichts gewonnen. Immer würde χερσῖν einerseits pleonastisch nachschleppen, andrerseits in dieser Stellung der Worte zu einem unvermeidlichen Missverständniss führen, da niemand umhin könnte es mit κατὰ νόμον zu verbinden. Statt σὸν αἷμα sollte man doch wohl den Begriff μητρὸς αἷμα erwarten; ich habe daher τόδ' αἷμα vermuthet: "dies Blut," d. h. diese Blutschuld, mit der du dich befleckt hast. Was mit χερσῖν anzufangen sei, lasse ich dahin gestellt; ich würde für das einfachste und natürlichste halten

οὐδ' ἥγνισαι τόδ' αἷμα κατὰ νόμον πόλεως;

Als Orestes erklärt hat, die Bürger giengen damit um ihn zu tödten, ζῆν οὐκ ἐῶσ' ἡμᾶς ἔτι, fragt Menelaus V. 439:

τί δρῶντες ὅ τι καὶ σαφὲς ἔχεις εἰπεῖν ἐμοί;

Durch seine Stellung am Ende des Verses ist das vollkommen entbehrliche ἐμοί zu stark hervorgehoben. Weit unpassender aber ist das verallgemeinernde ὅ τι *quodcumque*. Auf eine andere Lesart weist eine Bemerkung der Scholien: ἐὰν γράφηται ἢ τί, ὁ στίχος οὕτως· τί καὶ σαφὲς εἰπεῖν ἔχεις. Hiernach werden wir, wie ich glaube, zu schreiben haben:

τί δρῶντες; ἦ τι καὶ σαφῶς εἰπεῖν ἔχεις;

Eine Stütze dieser Vermuthung finde ich darin, dass die meisten und besten Handschriften εἰπεῖν ἔχεις statt ἔχεις εἰπεῖν bieten. Uebrigens dachte an ἦ τι bereits G. Hermann; er schrieb: ἦ τι σαφὲς ἔχεις εἰπεῖν ἐμοί;

1) Kayser hat wie öfters so auch hier das Missgeschick etwas völlig verfehltes gut zu heissen, N. Jahrb. für Philol. u. Paedag. Bd. LXXV, 2 p. 115. Sein Raisonnement ist seicht im höchsten Grade.

491 πρὸς τόνδ' ἀγὼν τίς σοφίας ἥκει πέρι;

So klar der Sinn dieser Worte ist, mit denen Tyndareus auf die Schmähung des Menelaus antwortet, ὀργὴ γὰρ ἅμα σου καὶ τὸ γῆρας οὐ σοφόν, so schwierig dürfte es sein den metrischen Fehler in überzeugender Weise zu heben. Porsons Vermuthung,

πρὸς τόνδε σοφίας τις ἂν ἀγὼν ἥκοι πέρι;

ist zu gewaltsam, um auf Wahrscheinlichkeit Anspruch machen zu können. Indess hat er richtig gefühlt, dass τίς ἀγών hier nicht passend sei: Tyndareus hat nicht zu fragen, welcher Wettstreit ihm bevorstehe, sondern warum er sich in einen Kampf einlassen solle. Statt also ἀγών τις zu schreiben, wo das Pronomen indefinitum völlig überflüssig sein würde, möchte ich τίς in τί ändern. Von palaeographischer Seite ist dies die leichteste Aenderung, um das im Trimeter unmögliche τίς σοφίας dem Metrum anzupassen[1]). Ferner ist das Verbum ἥκειν hier sehr unwahrscheinlich; hätte Euripides so geschrieben, so würde man unwillkürlich πρὸς τόνδε ἥκει verbinden, was von Seiten des Sinnes unzulässig ist. Nach dem Bisherigen habe ich es für das rathsamste gehalten, in Ermangelung besserer Hilfe zu schreiben:

πρὸς τόνδ' ἀγὼν ἂν τί σοφίας εἴη πέρι;

Erst nachdem ich diese Vermuthung gemacht, habe ich gefunden dass sie wenigstens zum Theil eine urkundliche Bestätigung erhält durch das Citat bei Gregorius Corinthius in Walz Rhet. VII p. 1272, wo ἀγῶνα statt ἀγὼν gelesen wird. In diesem ἀγῶνα scheint nichts anderes als das von mir vermuthete ἀγὼν ἂν enthalten zu sein. Noch mehr aber dient zur Bestätigung eine andere Euripideische Stelle, Heracl. 116: πρὸς τοῦτον ἀγὼν ἆρα τοῦδε τοῦ λόγου μάλιστ' ἂν εἴη.

505 κακὴν γὰρ αὐτὴν ἐνδίκως ἡγούμενος,
αὐτὸς κακίων ἐγένετο μητέρα κτανών.

Die für die Kritik maassgebenden Handschriften haben theils ἐγένετο theils γένετο. Porson hat eine Umstellung vorgenommen,

αὐτὸς κακίων μητέρ' ἐγένετο κτανών.

Von Seiten des Rhythmus ist es wenigstens nicht sonderlich empfehlenswerth, dass die Endsilbe des Wortes ἐγένετο in die Arsis fällt. Darum war es rathsamer zu schreiben:

αὐτὸς κακίων γέγονε μητέρα κτανών.

Vielleicht ist in ähnlicher Weise kurz vorher V. 493 statt τούτου τίς ἀνδρῶν γένετ' ἀσυνετώτερος (so nämlich lesen die besten Handschriften) zu schreiben

τούτου τίς ἀνδρῶν γέγονεν ἀσυνετώτερος;

Wenigstens ist zu der gewaltsamen Aenderung, τούτου τίς ἂν γένοιτ' ἂν ἀσυνετώτερος; kein Anlass ersichtlich, und der Beifall den Kayser dieser Vermuthung spendet (N. Jahrb.

1) Vgl. meine *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 28 Anm.

für Philol. und Paedag. Bd. LXXV, Heft 2 p. 130) würde befremden, wenn wir nicht wüssten was dieser Beifall zu bedeuten hat.

536 ἔα δ' ὑπ' ἀστῶν καταφονευθῆναι πέτροις,
ἢ μὴ ἐπίβαινε Σπαρτιάτιδος χθονός.

Die beiden vorstehenden Verse, welche Tyndareus an Menelaus richtet, kehren in eben dieser Gestalt unten 625 f. wieder, und zwar werden sie von demselben Tyndareus wiederum zu Menelaus gesprochen. Es lässt sich nicht leugnen, dass in verschiedenen Stücken desselben Tragikers oder bei verschiedenen Tragikern öfters die nämlichen Verse in Folge einer vielleicht unbewussten Reminiscenz wiederkehren. Zu den auffallendsten Beispielen dieser Art gehört die Uebereinstimmung von

Soph. Oed. Col. 1292: γῆς ἐκ πατρῴας ἐξελήλαμαι φυγάς,
Soph. fr. 726, 2: φυγὰς πατρῴας ἐξελήλασαι χθονός,
Eur. Hel. 90: φυγὰς πατρῴας ἐξελήλαμαι χθονός.

Allein vollkommen undenkbar ist die Wiederholung der gleichen Drohung innerhalb der Gränzen von nicht ganz hundert Versen. Daher sind ohne Zweifel jene beiden Verse an einer Stelle unecht, und zwar hat Brunck sie mit Recht an der ersten Stelle verworfen. *Nam quia gravissima est ista comminatio*, sagt hierüber ganz richtig G. Hermann, *adhiberi debuit eo loco, quo res in summum discrimen adducta est, non illo ubi Menelaus etiam sine illa comminatione videbatur sola ponderatione iustitiae in sententiam concessurus esse Tyndari.* Indess hat G. Hermann auch auf den Uebelstand hingewiesen, der durch die Tilgung beider Verse an unserer Stelle herbeigeführt wird: die Erwiderung des Orestes (564 f.),

ἐφ' οἷς δ' ἀπειλεῖς ὡς πετρωθῆναί με χρή,
ἄκουσον ὡς ἅπασαν Ἑλλάδ' ὠφελῶ,

lehrt dass Tyndareus von der Steinigung gesprochen hat, und nur in den gedachten beiden Versen ist hiervon die Rede. Darum tilgt Hermann nur den zweiten Vers und nimmt an, die Worte

ἔα δ' ὑπ' ἀστῶν καταφονευθῆναι πέτροις

habe der Dichter zweimal gesetzt. Mir scheint es gerathener anzunehmen dass nach 535 ein Vers ausgefallen sei, in welchem Tyndareus sich für die Steinigung des Orestes erklärte; gerade die als Parallele herangezogene spätere Stelle mag den Ausfall der ihr nicht unähnlichen ursprünglichen Worte verschuldet haben. Wenn Hermann schreibt:

ὡς οὖν ἂν εἰδῇς, Μενέλεως, τοῖσιν θεοῖς
μὴ πρᾶσσ' ἐναντί', ὠφελεῖν τοῦτον θέλων·
ἔα δ' ὑπ' ἀστῶν καταφονευθῆναι πέτροις.
Θυγάτηρ δ' ἐμὴ θανοῦσ' ἔπραξεν ἔνδικα κτέ.,

so scheint es mir klar, dass man vor Θυγάτηρ δ' ἐμὴ etwas vermisst, nämlich eine bestimmtere Erwähnung des Orestes, zu welchem Clytaemnestra in Gegensatz tritt.

546 ἐγὼ δ' ἀνόσιός εἰμι μητέρα κτανών,
ὅσιος δ' ἕτερον ὄνομα, τιμωρῶν πατρί.

Statt ἐγὼ δ' ist mit G. Hermann ἐγῷδ' herzustellen, weil Orestes schon in den vorhergehenden Worten von sich gesprochen hat. Den metrischen Fehler des zweiten Verses heben die schlechten Handschriften durch Einfügung des Wörtchens γε, jener *particula Heathiana*, die auch nach Heath ihre Verehrer zählt und noch an so manchen Stellen Griechischer Dichter sich fälschlich eingeschlichen hat[1]). Eine andere, bei weitem bedenklichere Emendation versucht Kirchhoff, dessen Vorschlag,

ὅσιος δ' ἓᾦ' ἕτερον ὄνομα, τιμωρῶν πατρί,

mir unerklärlich scheint. Oder kann Orestes wirklich behaupten "noch in anderer Hinsicht" sei er ὅσιος, wenn er vorher nur gesagt hat, der Muttermord mache ihn zu einem ἀνόσιος? Es wird zu schreiben sein:

ὅσιος δέ, γαῦρον ὄνομα, τιμωρῶν πατρί.

"Fromm bin ich, mit Stolz spreche ich es aus, als Rächer meines Vaters". Ueber die Form der Apposition vgl. Matthiae Gramm. § 432.

551 τί χρῆν με δρᾶσαι; δύο γὰρ ἀντίξες δυοῖν·
πατὴρ μὲν ἐφύτευσέν με, σὴ δ' ἔτικτε παῖς,
τὸ σπέρμ' ἄρουρα παραλαβοῦσ' ἄλλου πάρα·
ἄνευ δὲ πατρὸς τέκνον οὐκ εἴη ποτ' ἄν.

---

1) Aristophanes Com. 2 p. 1139 bei Athenaeus XI p. 478 F:

ὁ δ' ἀλφίτων πριάμενος τρεῖς χοίνικας
κοτύλης δεούσας, εἶκαδ' ἀπολογίζεται.

Man hat nach der Vermuthung von Schweighäuser ἀλφίτων γε πριάμενος geschrieben, als ob es auf die ἄλφιτα und nicht vielmehr auf das Maass hier ankäme. Vielleicht ist zu lesen

ὁ δ' ἀλφιτώνης πριάμενος τρεῖς χοίνικας,

obwohl ich nicht im Stande bin das Wort ἀλφιτώνης anderweitig zu belegen. Was in εἶκαδ' ἀπολογίζεται enthalten sei, mögen andere entscheiden; die Vermuthung εἶκοσ' ἀπολογίζεται hat geringe Wahrscheinlichkeit. Ein Dichter bei Stobaeus Flor. 121, 18 a:

πᾶς γὰρ λέγει τις "ὁ μακαρίτης οἴχεται" —
καὶ θύομεν αὐτοῖσι τοῖς ἐναγίσμασιν
ὥσπερ θεοῖσι, καὶ χοὰς γε χέομεν
αἰτούμεθ' αὐτοὺς δεῦρ' ἀνιέναι τάχα θά.

Nach dem Vorgange von H. Grotius schreibt man καὶ θύομέν γ' αὐτοῖσι, und Bergk in Meinekes Com. 2 p. 1148 hält es für absolut überflüssig zu sagen dass γε in den Handschriften fehlt. Dem Metrum des folgenden Verses hat man nachgeholfen durch χοάς γε χεόμενοι, ohne zu bedenken dass hier das γε vollkommen unpassend ist; endlich hat man ἀνιέναι in ἀνεῖναι verändert. Es war mit Ausscheidung einer elenden Interpolation zu schreiben:

καὶ θύομεν χυτοῖσι τοῖς ἐναγίσμασιν
ὥσπερ θεοῖσι, δεῦρ' ἀνιέναι τάχα θά.

Ueber die Messung von ἰέναι habe ich Philol. XI p. 464 f. gehandelt, wo hinzuzufügen Τυφὼν' ἱέντα Aesch. Sept. 475 und εἰς πλευρὰς ἰείς (wenn diese Lesart richtig ist) Eur. Iph. Taur. 298. Die χυτὰ ἐναγίσματα bedürfen kaum der Belegstellen; ich begnüge mich an Iphig. Taur. 166 zu erinnern:

Βάκχου τ' οἰνηρὰς λοιβὰς
ξουθᾶν τε πόνημα μελισσᾶν,
ἃ νεκροῖς θελκτήρια χεῖται.

So nämlich ist statt κεῖτ' zu verbessern, nicht κεῖται. — Babrius Fab. 45, 8:

ταῖς μὲν φέρων ἐβαλλε θαλλὸν ἐξ ὕλης,
τὰς δὲ ἰδίας ἀφῆκε μακρὰ λιμώττειν.

Lachmann hat mit I. Bekker und G. Hermann τὰς δέ γ' ἰδίας ἀφῆκε geschrieben; es musste vielmehr heissen

τὰς δ' ἐνδίας ἀφῆκε μακρὰ λιμώττειν.

Aehnlich Hertzberg τὰς δ' ἐνδίους. Die Verkürzung der mittleren Silbe in ἔνδιος ist bei Babrius nicht zu beanstanden. Vgl. Apoll. Rhod. 4, 1312: ἔνδιον ἦμαρ ἔγν. Myrinus Anth. Pal. 7, 703: ἔνδιος οἰνοπότης.

Im ersten Verse ist δύο δυοῖν sehr auffallend. "Stelle zwei Dinge zweien gegenüber", was soll dies bedeuten? Man erwartet vielmehr "wäge zwei Dinge gegen einander ab". Vielleicht ist δυοῖν ein verkehrtes Supplement; der Dichter konnte kaum etwas anderes schreiben als δύο γὰρ ἀντίτες λόγω. Statt ἄρουρα hat G. Hermann ἄρυρ' ὡς gesetzt, und Schneidewin zu Soph. El. 341 ist ihm beigetreten. Die Umschreibung der Scholien, ἡ σὴ δὲ παῖς ἐγέννησεν, ὡς ἄρουρα τὸ σπέρμα παρ' ἄλλου λαβοῦσα, durfte wenigstens nicht als diplomatische Autorität für diese Aenderung geltend gemacht werden, und ἄρουρ' ὡς ist entschieden zu verwerfen. Wie Schneidewin selbst sagt, ist die Mutter nach der Ansicht alter Physiologen der Acker wo der ausgestreute Same aufgeht. Ueber ähnliche Verschmelzungen des Bildes mit dem verglichenen Gegenstand vgl. Theognis 1105 f.: εἰς βάσανον δ' ἐλθὼν παραπριβόμενός τε μολίβδῳ χρυσὸς ἄπεφθος ἐὼν καλὸς ἁπασιν ἔσει. 1361: ναῦς πέτρῃ προσέκυρσας ἐμῆς φιλότητος ἁμαρτών. Solon fr. 33: ἤθελον γάρ κεν κρατήσας μοῦνον ἡμέρην μίαν ἀσκὸς ὕστερον δεδάρθαι. Pindar fr. 222: ὄπισθε δὲ κεῖμαι θρασειᾶν ἀλωπέκων ξανθὸς λέων. Cephisod. Com. 2 p. 883: σκώπτεις μ', ἐγὼ δὲ τοῖς λόγοις ὄνος ὕομαι. Aristoph. Com. 2 p. 1138: ἐγευσάμην χορδῆς ὁ δύστηνος κύων. Philem. Com. 4 p. 61: ὄνος βαδίζεις εἰς ἄχυρα τραγημάτων. Menander Com. 4 p. 253: πρᾶον κακοῦργος σχῆμ' ὑπεισελθὼν ἀνὴρ κεκρυμμένη κεῖται παγὶς τοῖς πλησίον. Anthol. Pal. 9, 133: εἴ τις ἅπαξ γήμας πάλι δεύτερα λέκτρα διώκει, ναυπηγὸς πλώει δὶς βυθὸν ἀργαλέον. Diogenian 6, 59 und andere Paroemiographen: μὴ πρὸς λέοντα δορκὰς ἅψωμαι μάχης. Proverb. append. 2, 73: ἔοικα βοῦς ἐπὶ σφαγὴν μολεῖν. Aristaenetus 1, 14: γέγονα ξυρὸν εἰς ἀκόνην. Martialis 4, 52: *qui modo ficus eras, iam caprificus eris;* und ähnliches bei Meineke in der dritten Ausgabe des Theocrit p. VI. Der letzte Vers in der obigen Stelle,

ἄνευ δὲ πατρὸς τέκνον οὐκ εἴη ποτ' ἄν,

ist im höchsten Grade abgeschmackt und kann wenigstens in dieser Fassung nicht von Euripides herrühren. Wie ist es möglich dass ein vernünftiger Dichter den Gedanken ausspricht "ohne Vater giebt es kein Kind", wenn er nicht etwa eine komische Wirkung beabsichtigt, die hier vorauszusetzen keinem einfallen wird; wie ist es denkbar, dass er in so platter Form redet und vollends dass er, als ob die Richtigkeit der Sentenz doch sehr in Zweifel zu ziehen wäre, sich der Unbestimmtheit des hypothetischen Ausdrucks bedient? Da ich mich nicht überzeugen kann dass Euripides so abgeschmackt gewesen, so muss ich den Vers für entweder verderbt oder interpolirt halten. Clemens Alex. Strom. II p. 505 hat ihn allerdings in seiner jetzigen Gestalt schon gekannt; er fügt eine Parodie hinzu, die sich vielleicht aus ziemlich alter Zeit datirt,

ἄνευ δὲ μητρὸς οὐδὲ συλλαβὴ τέκνου.

Eustathius Od. p. 1498 erzählt sogar, Euripides wäre dieses Verses wegen im Theater ausgezischt worden, man hätte ihm geantwortet:

ἄνευ δὲ μητρὸς πῶς, κάθαρμ' Εὐριπίδη;

Mit Recht nämlich hat Porson πῶς statt ὦ verbessert. Dies würde man vielleicht glaublich finden, wenn ein älteres und gewichtigeres Zeugniss vorläge als das des Eustathius, der

zwar nicht selbst lügt, aber oft sich belügen lässt. Dass die Komoedie, die eine solche Tactlosigkeit des Euripides nicht ungerügt gelassen hätte, den Vers gekannt habe, lässt sich nicht erweisen.

561 Αἴγισθος ἦν ὁ κρυπτὸς ἐν δόμοις πόσις.

Der Artikel würde nur dann statthaft sein, wenn ein κρυπτὸς πόσις der Clytaemnestra bereits erwähnt wäre und nun gesagt werden sollte, dieser sei Aegisthus gewesen. Eine derartige Erwähnung ist nicht vorangegangen; vielmehr soll ausgedrückt werden Κλυταιμνήστρα κρυπτὸν εἶχε πόσιν. Folglich muss zu ἦν ein Dativus hinzutreten, der nur in ὁ enthalten sein kann. Es ist mit andern Worten zu lesen: Αἴγισθος ἦν οἱ κρυπτὸς ἐν δόμοις πόσις. Ein Abschreiber scheint οἱ für den Nominativ des Pluralis gehalten und in Folge dieses Missverständnisses ὁ substituirt zu haben.

ὁρᾷς, Ἀπόλλων ὃς μεσομφάλους ἕδρας
ναίων βροτοῖσι στόμα νέμει σαφέστατον,
ᾧ πειθόμενος πάνθ' ὅσ' ἂν κεῖνος λέγῃ,
τούτῳ πιθόμενος τὴν τεκοῦσαν ἔκτανον.
593 ἐκεῖνον ἡγεῖσθ' ἀνόσιον καὶ κτείνετε·
ἐκεῖνος ἥμαρτ', οὐκ ἐγώ. τί χρῆν με δρᾶν;

Den Vers 593 habe ich als *admodum iciunus* bezeichnet. In der Form desselben ist, wie jeder sofort sieht, das κεῖνος auffallend, das nur zur Vervollständigung der erforderlichen Versfüsse da zu sein scheint. Gewichtigere Bedenken aber erregt der Inhalt. Denn die Worte πάνθ' ὅσ' ἂν κεῖνος λέγῃ setzen voraus dass Apollo wiederholt dem Orestes Weisungen ertheilt habe oder noch ertheile; von solchen Weisungen kommt in der Tragoedie nichts vor, und somit erscheint der Vers als eine leere, inhaltlose Redensart. Obenein ist es nicht einmal passend, wenn Orestes sagt er folge in allen Dingen den Weisungen des Apollo, weil er damit andeuten würde dass er nur im blinden Gehorsam und somit vielleicht gegen seine eigene Ueberzeugung den Muttermord begangen hätte. Eine solche Andeutung aber würde alle Gründe die Orestes oben für seine That angeführt hat, wiederum in Frage stellen. Somit scheint der Vers

ᾧ πειθόμενος πάνθ' ὅσ' ἂν κεῖνος λέγῃ

unecht zu sein. Wenn ich ehemals auch V. 596 als verdächtig bezeichnete, so geschah dies deshalb, weil dieser Vers das unmittelbar vorher gesagte nur in abgeschwächter Form wiederholt. Inzwischen möchte ich jetzt eher glauben dass von 595 und 596 folgendes ursprünglich sei:

ἐκεῖνον ἡγεῖσθ' ἀνόσιον. τί χρῆν με δρᾶν;

Die Kühnheit mit welcher Euripides einen Gott als ἀνόσιος bezeichnen lassen will, mochte eine mildernde Aenderung hervorrufen. Denkt man sich dass zu den Worten ἐκεῖνον ἡγεῖσθ' ἀνόσιον die Variante ἐκεῖνος ἥμαρτ', οὐκ ἐγώ beigeschrieben war, so ist es nicht im minde-

sten auffallend, wenn jemand zur Ergänzung des einen Verses die Worte καὶ κτείνετε hinzufügte. Ein ganz ähnlicher Fall (Med. 966 f.) wird unten besprochen werden.

οἷς δὲ μὴ πίπτουσιν εὖ (nämlich οἱ γάμοι).
604 τά τ' ἔνδον εἰσὶ τά τε θύραζε δυστυχεῖς.

Obgleich man als Gegensatz zu ἔνδον eher θύρασι erwarten sollte, so wird doch das auch durch die Anführungen bei Aristides vol. 2 p. 656 und Stobaeus Flor. 69, 13 empfohlene θύραζε beizubehalten sein. Vgl. Bacch. 331: οἶκει μεθ' ἡμῶν, μὴ θύραζε τῶν νόμων. Sicherlich unrichtig ist es, wenn Herwerden in einem tragischen Fragmente (adesp. 458, 12) bei Stobaeus Flor. 74, 27 den Vorschlag machte

ἥτις γὰρ ἡμῶν καρδίαν θύρασ' ἔχει.

Einmal ist die Elision des Endvocals in θύρασι fehlerhaft, und sodann lässt sich das überlieferte θύραζ' ἔχει gegen jede Anfechtung sicher stellen. Vgl. Eur. Phoen. 360: λόγοισι χαίρει, τὸν δὲ νοῦν ἐκεῖσ' ἔχει. Phoen. 1418: τὸν νοῦν πρὸς αὐτὸν οὐκ ἔχων, ἐκεῖσε δέ. fr. 781, 5: ξυηπολοῦσα θεοῖς ἐκεῖσ' ἔχει φρένας. Ein anonymer Dichter[1]) bei Plutarch Mor. p. 513 E und Stobaeus Flor. 99, 25: ὅπου τις ἀλγεῖ, κεῖσε καὶ τὸν νοῦν ἔχει. Eur. Orest. 1181: δεῦρο νοῦν ἔχε. Cratinus Com. 2 p. 116: ἐκεῖνος πρὸς ἑτέραν γυναῖκ' ἔχει τὸν νοῦν.

Tyndareus droht dem Orestes, er werde gegen ihn und Electra die Stadt aufreizen:

612 μολὼν γὰρ εἰς ἔκκλητον Ἀργείων ὄχλον
ἑκοῦσαν οὐκ ἄκουσαν ἐπισείσω πόλιν
σοὶ σῇ τ' ἀδελφῇ.

Dass die Stadt seinen Wünschen unbedingt entgegenkommen werde, kann Tyndareus schwerlich schon jetzt wissen; und wenn er es wüsste oder voraussetzte, so würde dies nicht so scharf zu betonen sein und überhaupt nicht in der Weise ausgesprochen werden können wie es mit den Worten ἑκοῦσαν οὐκ ἄκουσαν geschieht. Es müsste dann etwa heissen καὐτὴν θέλουσαν μᾶλλον ἐπισείσω πόλιν. Viel angemessener ist es wenn Tyndareus sagt: ich werde die Stadt aufreizen, mag sie nun wollen oder nicht. Daher habe ich geschrieben

ἑκοῦσαν οὐχ ἑκοῦσαν ἐπισείσω πόλιν.

Vgl. Iulian p. 291 D: ἄνθρωπος γὰρ ἀνθρώπῳ καὶ ἑκὼν καὶ ἄκων πᾶς ἐστι συγγενής. Cassius Dio 53, 7: ὥστε καὶ ἑκόντων καὶ ἀκόντων ὑμῶν αὐταρχῆσαι. Georgius Pachym. de Mich. Palaeol. 1, 3 vol. 1 p. 16, 2 ed. Bonn.: ἑκόντων ἀκόντων τῶν Περσῶν τοῖς ὄρεσιν ἐπεβάλοντο. Eustath. Opusc. p. 346, 2: ἀλλά σοι ἀποπληρώσω τὸ θέλημα καὶ τὸ ἐπιβουλευόμενον ἑκὼν ἀέκων σοι διαπέμψομαι.

615 μᾶλλον δ' ἐκείνη σοῦ θανεῖν ἐστ' ἄξία.

Dindorf hat nach dem Vorgange von Elmsley ἐπαξία geschrieben und in ganz entsprechender Weise Bacch. 246: ταὐτ' οὐχὶ δεινῆς ἀγχόνης ἐπάξια statt ἔστ' ἄξια, weil mit Ausnahme

1) Vermuthlich ein Tragiker: wenigstens irrt Arsenius, wenn er den Komiker Amphis als Verfasser nennt. Uebrigens ist die Variante des Plutarch, κεῖσι καὶ τὴν χεῖρ' ἔχει, kaum der Erwähnung werth.

dieser beiden Stellen sich kein Trimeter in der Tragoedie finde, wo zu Anfang des fünften Fusses ἐστ' oder ἐστ' vorkomme. Zweifelhaft ist allerdings der erst in meiner tragischen Fragmentsammlung nachgewiesene Trimeter des Euripides fr. 967 (aus Men. monost. 222 und Plutarch Mor. p. 532 F): ἡ γὰρ σιωπὴ τοῖς σοφοῖς ἐστ' ἀπόκρισις, wo ἐστ' in einigen Handschriften fehlt und daher τοῖς σοφοῖσιν ἀπόκρισις den Vorzug zu verdienen scheint. Unbeachtet aber ist geblieben Eur. Belleroph. fr. 301: πρὸς τὴν ἀνάγκην πάντα τἄλλ' ἔστ' ἀσθενῆ.

632 Μενέλαε, ποῖ σὸν πόδ' ἐπὶ συννοίᾳ κυκλεῖς,
διπλῆς μερίμνης διπτύχους ἰὼν ὁδούς;

In ποῖ κυκλεῖς πόδα scheint ein Widerspruch zu liegen, da die Kreisbewegung ein unbestimmtes Ziel, wie es durch ποῖ bezeichnet wird, offenbar ausschliesst. Auch der folgende Vers lehrt dass Menelaus nicht etwa sich entfernen will, sondern in Folge innerer Erregtheit unruhig hin und her geht; und somit ist nicht einzusehen wie Orestes fragen kann wohin Menelaus sich begeben wolle. Vielmehr wird Orestes nach dem Grunde der in den Bewegungen des Menelaus sichtbar hervortretenden Gemüthsunruhe forschen müssen, also zu fragen haben ἐπὶ τίνι συννοίᾳ πόδα κυκλεῖς; Hiernach vermuthe ich

Μενέλαε, τῷ σὸν πόδ' ἐπὶ συννοίᾳ κυκλεῖς;

Uebrigens würde vielleicht σὺ vor σὸν den Vorzug verdienen: es liegt in der Natur der Sache dass man sagt τί πόδα κινεῖς; und nicht τί σὸν πόδα κινεῖς; Wenn Tro. 332 gewöhnlich geschrieben wird ἄναγε πόδα σὸν ἕλισσε, so ist diese Stelle sicherlich verderbt; sowohl das Metrum als das Schwanken der handschriftlichen Ueberlieferung setzt dies ausser Zweifel, und nur über die Art der Heilung wird man streiten können. Ebenso wenig kann ich Hel. 1627 für richtig halten:

οὗτος ὦ, ποῖ σὸν πόδ' αἴρεις, δέσποτ', εἰς ποῖον φόνον;

In welchem traurigen Texteszustand die Euripideische Helena überliefert ist, braucht niemand gesagt zu werden; dass σόν in die Arsis fällt, trägt nicht wenig dazu bei auf das vollkommen überflüssige Wörtchen ganz ungehöriger Weise einen Nachdruck zu legen.

635 ἀπότισον οὖν μοι ταὐτὸ τοῦτ' ἐκεῖ λαβών,
μίαν πονήσας ἡμέραν ἡμῶν ὕπερ
σωτήριος στάς, μὴ δέκ' ἐκπλήσας ἔτη.

Einen Tag, so bittet Orestes, möge Menelaus ihm rettend zur Seite stehen und dadurch Agamemnons Aufopferung während der zehn Jahre vor Troja vergelten. Der Gegensatz von μίαν ἡμέραν und δέκα ἔτη ist jetzt durch das dazwischen eingeschobene σωτήριος στάς in einer ziemlich ungeschickten und völlig zwecklosen Weise verdunkelt. Alles wird besser zusammenhängen, wenn wir die Anfänge der beiden letzten Verse umstellen:

σωτήριος στάς, ἡμέραν ἡμῶν ὕπερ
μίαν πονήσας, μὴ δέκ' ἐκπλήσας ἔτη.

Dies Verfahren mag auf den ersten Blick zu kühn scheinen; allein dass die Anfänge auf einander folgender Verse wie die Versenden (vgl. oben S. 6 und 13) sehr oft von den Abschreibern vertauscht worden sind lässt sich mit vollkommener Evidenz nachweisen. Soph. Oed. R. 1410 ff.:

ὅπως τάχιστα, πρὸς θεῶν, ἔξω μέ που
καλύψατ', ἢ φονεύσατ' ἢ θαλάσσιον
ἐκρίψατ', ἔνθα μὴ ποτ' εἰσόψεσθ' ἔτι.

Wie ich an einem andern Orte gezeigt habe (Philol. XII p. 635), ist zu lesen: ἔξω με γῆς ἐκρίψατ' ἢ φονεύσατ' ἢ θαλάσσιον καλύψατ' ἔνθα κτέ. Soph. Trach. 746 f.:

αὐτὸς βαρεῖαν ξυμφορὰν ἐν ὄμμασιν
πατρὸς δεδορκὼς κοὐ κατὰ γλῶσσαν κλύων.

Hier kann πατρὸς nur mit ἐν ὄμμασιν verbunden werden; es gehört aber, wie jeder zugeben wird, zu ξυμφοράν, d. h. man muss umstellen

πατρὸς βαρεῖαν ξυμφορὰν ἐν ὄμμασιν
αὐτὸς δεδορκὼς κοὐ κατὰ γλῶσσαν κλύων.

Fast unbegreiflich ist es wie die Ueberlieferung in Eur. Iphig. Taur. 1333 f. so lange geduldet werden konnte:

αὐτὴ δ' ὄπισθε δέσμ' ἔχουσα τοῖν ξένοιν
ἔστειχε χερσί.

Sollte wirklich der Bote so ungeschickt erzählen dass die Zuhörer glauben mussten, Iphigenie wäre zur Abwechselung einmal auf den Händen gegangen? Mit der Erkenntniss des Fehlers ist sofort auch die Heilung gegeben; es muss heissen: αὐτὴ δὲ χερσὶ δέσμ' ἔχουσα τοῖν ξένοιν ἔστειχ' ὄπισθε. Eur. Alc. 974 f.:

μόνας δ' οὔτ' ἐπὶ βωμοὺς
ἐλθεῖν οὔτε βρέτας θεᾶς
ἔστιν, οὐ σφαγίων κλύει.

Man vertausche ἔστιν und ἐλθεῖν, zu Gunsten des strophischen Metrum, wo die drei entsprechenden Verse lauten:

ἐγὼ καὶ διὰ μούσας
καὶ μετάρσιος ἦξα καὶ
πλείστων ἁψάμενος λόγων.

Aehnliche Fehler sind Iphig. Aul. 448 f. und Rhes. 229 f. bereits von andern beseitigt worden. Zwei Versbälften, κερδὼ πέπηκῳ φησίν und κερδοῖ πέπηκος εἶπεν, haben, wie schon Ahrens erkannt hat, bei Babrius Fab. 81, 1. 3 ihre Stelle getauscht. — Um auf die obigen Verse des Orestes zurückzukommen, so würde hier vorzuziehen sein:

σωτήριος στὰς ἡμέραν θ' ἡμῶν ὕπερ
μίαν πονήσας, μὴ δέκ' ἐκπλήσας ἔτη.

Natürlich liess man die Copula τε fort, sobald die Worte μίαν πονήσας an die falsche Stelle gerathen waren, die sie in den Handschriften einnehmen.

Nachdem Menelaus darauf hingewiesen hat dass er ausser Stande sei mit Waffengewalt den Argivern entgegenzutreten, dass also nur durch ein sanftes und behutsames Auftreten sich vielleicht etwas erreichen lasse, giebt er zur Begründung folgende allgemeine Sentenz:

ὅταν γὰρ ἡβᾷ δῆμος εἰς ὀργὴν πεσών,
ὅμοιον ὥστε πῦρ κατασβέσαι λάβρον·
εἰ δ' ἡσύχως τις αὐτὸς ἐντείνοντι μὲν
χαλῶν ὑπείκοι καιρὸν εὐλαβούμενος,
ἴσως ἂν ἐκπνεύσειεν· ὅταν δ' ἀνῇ πνοάς,
τύχοις ἂν αὐτοῦ ῥᾳδίως ὅσον θέλεις.

Man muss, so meint Menelaus, abwarten bis das Volk von der ersten Aufwallung der Hitze zurückgekommen ist; dann lässt sich hoffen das begehrte von ihm zu erreichen. Die Worte ὅταν γὰρ ἡβᾷ δῆμος halte ich für sinnlos. Unmöglich kann Menelaus warten wollen oder den Orestes warten heissen bis das jetzt noch jugendliche Volk alt und grau geworden sei. Das Argivervolk besteht doch vermuthlich wie jedes andere Volk aus Jungen und Alten; nach Ablauf eines wie mehrerer Menschenalter ist dieser Unterschied der Altersstufen ganz derselbe: die Gesammtheit des Volkes kann also nicht ἡβῶσα genannt werden. Es ist ohne Zweifel zu bessern:

ὅταν γὰρ ἡβᾷ θυμὸς εἰς ὀργὴν πεσών,

d. h. wenn die zornige Leidenschaft noch jung ist. Ueber die hier vorliegende metaphorische Anwendung des Verbum ἡβᾶν vgl. Eur. Alc. 1085: χρόνος μαλάξει, νῦν δ' ἔτ' ἡβάσκει κακόν, und besonders Sosiphanes Trag. fr. 2 p. 638 bei Stobaeus Flor. 20, 18:

νῦν σοι πρὸς ὄψιν θυμὸς ἡβάτω, γέρον·
νῦν ἡδὺ ὀργήν, ἡνίκ' ἔνδικον, λαβεῖν.

Eine diplomatische Bestätigung für meinen Vorschlag bietet der Nachahmer in Men. monost. 71: βλάπτει γὰρ ἄνδρα θυμὸς εἰς ὀργὴν πεσών, und eine Spur wenigstens vom ursprünglichen θυμός zeigt sich noch in dem Citate bei Stobaeus Flor. 46, 5, wo wir folgende Verderbniss finden: ὅταν γὰρ ὀργῇ δῆμος εἰς θυμὸν πέσῃ. Den metrischen Fehler in V. 700 hat man mit der Handschrift *C* durch Elision der Endsilbe in ἐκπνεύσειεν beseitigen zu können geglaubt; ich habe bereits in der ersten Ausgabe vermuthet:

ἴσως ἂν ἐκπνεύσειεν· ἢν δ' ἀνῇ πνοάς,

und in gleicher Weise sagt Kirchhoff: "ἐκπνεύσει' *non debebat recipi. scribendum potius aut* ἢν *aut* ὅτε δ' ἀνῇ πνοάς". Die Elision der dritten Person Singul. im Optativus aor. 1. act. ist sicherlich der Tragoedie fremd, obwohl man sie öfter durch Conjectur einzuschwärzen versucht hat. Eur. Hipp. 469 billigte W. Dindorf die Valckenaersche Vermuthung κανὼν ἀκριβώσει' ἄν, Tro. 478 vermuthete Schneidewin γυνὴ τεκοῦσα κομπάσει' οἳ ἄν ποτε, und Andr. 1283 sogar Porson πράξει' ἂν ἐκ θεῶν κακῶς. Aesch. Choeph. 854 schrieben Heath und Monk κλέψει' ἂν ὠμματωμένην, Agam. 1376 wollte Schütz πημονῆς ἀρκύστατον φράξει' ἄν, und in ähnlicher Weise hat man sich anderwärts vergriffen. Im letzten Verse habe ich

vermuthet ὅσ' ἄν θέλῃς, wogegen Cobet N. L. p. 201 οἵῳ θέλεις für nothwendig erachtet, weil wenn bezeichnet werden sollte "*facile quidvis ab eo impetrare possis*", vielmehr τύχοις ἄν παρ' αὐτοῦ Griechisch zu sagen sei. Ungriechisch also redete Sophocles, wenn er schrieb, was bisher meines Wissens Cobet selbst nicht beanstandet hat, Oed. Col. 1168: ὅρα κατ' Ἄργος εἴ τις ὑμῖν ἐγγενὴς ἔσθ', ὅστις ἄν σου τοῦτο προσχρήζοι τυχεῖν, und Phil. 1315: ὧν δέ σου τυχεῖν ἐφίεμαι ἄκουσον. Ungriechisch redete auch Eur. Iphig. Aul. 995: εἰ δ' οὐ παρούσης (nämlich τῆς ἐμῆς θυγατρός) ταὐτὰ τεύξομαι σέθεν (so viel als παρὰ σοῦ), μενέτω κατ' οἴκους. Ungriechisch redete ferner Plato Phileb. p. 50 D: οἶμαί σου τεύξεσθαι μεθεῖναί με. Ungriechisch redete endlich Xenophon Anab. 6, 6, 32: ταῦτα δὲ σοῦ τυχόντες ὑπισχνοῦνταί σοι ἀντὶ τούτων — ἐπιδείξειν σοι καὶ ὡς κόσμιοί εἰσι καὶ ὡς ἱκανοὶ τῷ ἄρχοντι πειθόμενοι τοὺς πολεμίους σὺν τοῖς θεοῖς μὴ φοβεῖσθαι. Cobet würde sehr wohl daran thun, wenn er sich dazu entschliessen wollte, in jedem einzelnen Falle wo er eine Form oder Structur als ungriechisch bezeichnet, auch alle seiner Behauptung entgegenstehenden Stellen dem Leser vorzuführen: sicherlich würden seine Anathemata dann etwas sparsamer ausfallen.

729 θᾶσσον ἤ με χρῆν προβαίνων ἱκόμην δι' ἄστεος.

Seltsamer Weise hat Kirchhoff aus A πρὸ ἄστεος aufgenommen, trotzdem dass diese Lesart gegen Sinn und Metrum verstösst. Die Vulgate δι' ἄστεος hat obenein die Gewähr mehrerer Citate für sich (zu den von Kirchhoff selbst angeführten Stellen aus Maximus Planudes Rhet. V p. 525 und Castor Rhet. III p. 717 kommt noch der Gramm. Ambros. bei H. Keil Anal. gramm. Halle 1848 p. 5, 5), und es liegt wohl auf der Hand dass πρὸ ἄστεος lediglich dem voraufgehenden προβαίνων seinen Ursprung verdankt.

736 OP. Μενέλεως κάκιστος εἴς με καὶ κασιγνήτην ἐμήν.
ΠΥ. εἰκότως, κακῆς γυναικὸς ἄνδρα γίγνεσθαι κακόν.

Dass im ersten Verse εἰς με nach A zu schreiben sei, nicht ἐς ἐμέ, wurde bereits oben S. 39 bemerkt. Im zweiten Verse will Kirchhoff entweder εἰκὸς' ὡς mit Boissonade oder εἰκὸς ὡς verbessern. Was ὡς an dieser Stelle soll, ist mir unklar. Man würde das ὡς verstehen, wenn es hiesse ὡς κακῆς γυναικὸς εἰκὸς ἄνδρα γίγνεσθαι κακόν. Dass dagegen statt ὥσπερ εἰκός jemals εἰκὸς ὡς gesagt worden sei, halte ich für eine Unmöglichkeit. Eher würde ich darum εἰκὸς ἦν κακῆς γυναικὸς billigen. Allein die Ueberlieferung lässt sich wohl vertheidigen, wenn man annimmt dass aus εἰκότως der Begriff εἰκός ἐστιν entnommen wird, dass also der jetzige Ausdruck brachylogisch ist statt εἰκότως· εἰκὸς γὰρ κακῆς γυναικὸς ἄνδρα κακὸν γίγνεσθαι, wie wenn wir sagten "natürlicher Weise, dass Menelaus nicht besser ist als seine Gattin". Scheint diese Erklärung gezwungen, so bliebe vielleicht noch die mir weniger zusagende Auffassung übrig, εἰκότως ἦν für εἰκὸς ἦν zu nehmen mit Thiersch Gramm. p. 558 der dritten Aufl.

Auf die Frage des Orestes, ob Pylades nicht fürchte ebenfalls von den Argivern getödtet zu werden, antwortet dieser:

οὐ προσήκομεν κολάζειν τοῖσδε, Φωκέων δὲ γῆ.

Für den persönlichen Gebrauch von προσήκειν in dem hier erforderlichen Sinn ist mir nur noch ein Beispiel aus der Tragoedie bekannt, Aesch. Agam. 1079:

ἡ δ' αὖτε δυσφημοῦσα τὸν θεὸν καλεῖ,
οὐδὲν προσήκοντ' ἐν γόοις παραστατεῖν,

wo ich an die Richtigkeit der jetzigen Lesart nicht glauben kann, da ich nicht im Stande bin einen vernünftigen Sinn in den Worten zu entdecken. An unserer Stelle liegt es nahe zu vermuthen

οὐ προσῆκον ἐμὲ κολάζειν τοῖσδε, Φωκέων δὲ γῆ.

Diese Vermuthung gewinnt an Wahrscheinlichkeit durch die Lesart des codex Vatic. 909 οὐ προσῆκον μὲν κολάζειν.

Orestes hält seine Verurtheilung durch die Argiver für unvermeidlich, wenn er ruhig zu Hause bleibt, wogegen er von seinem Erscheinen noch eine günstige Wendung seines Schicksals zu hoffen geneigt ist. Darum entschliesst er sich zu gehen:

ΟΡ. ἀλλὰ δῆτ' ἐλθω. ΠΥ. θανὼν γοῦν ὧδε κάλλιον θανεῖ.
ΟΡ. καὶ τὸ πρᾶγμά γ' ἔνδικόν μοι. ΠΥ. τῷ δοκεῖν εὖχου μόνον.
ΟΡ. εὖ λέγεις· φεύγω τὸ δειλὸν τῆδε. ΠΥ. μᾶλλον ἢ μένων.
ΟΡ. καί τις ἄν γέ μ' οἰκτίσειε. ΠΥ. μέγα γὰρ ηὐγένειά σου.
783 ΟΡ. θάνατον ἀσχάλλων πατρῷον. ΠΥ. πάντα ταῦτ' ἐν ὄμμασιν.

Der zweite dieser Verse ist zwar an sich verständlich (Orestes glaubt an die Gerechtigkeit seiner Sache, worauf Pylades erwiedert, Orestes möge nur wünschen dass seine Sache auch in den Augen der Argiver als gerecht erscheine); aber er stört augenscheinlich den Zusammenhang. Denn die nachfolgenden Worte des Orestes, εὖ λέγεις, φεύγω τὸ δειλὸν τῆδε, beziehen sich nicht auf τῷ δοκεῖν εὖχου μόνον, sondern auf die frühere Rede des Pylades, θανὼν γοῦν ὧδε κάλλιον θανεῖ. Solltest du verurtheilt werden, meint Pylades, so wirst du ruhmvoll sterben. Worauf Orestes entgegnet: du hast Recht, denn ich entgehe dem Vorwurf der Feigheit. Dass diese Auffassung der Worte durch den Zusammenhang geboten ist, ergiebt sich besonders deutlich aus V. 777:

ΟΡ. ἀλλ' ὑποπτήξας σιωπῇ κατθανὼν; ΠΥ. δειλὸν τόδε.

Hiernach ist es unzweifelhaft dass V. 782 entweder unecht ist oder eine falsche Stelle einnimmt. Die von Morelli empfohlene und von einigen Neueren angenommene Umstellung der Verse 782 und 783 kann ich nicht für zulässig halten; was Orestes geltend macht, durch sein persönliches Erscheinen werde er den Vorwurf der Feigheit meiden und vielleicht das Mitleid einzelner erregen, hängt genau zusammen; vertauscht man 782 und 783, so tritt mit den Worten καὶ τὸ πρᾶγμά γ' ἔνδικόν μοι etwas ganz fremdartiges dazwischen; denn die Gerechtigkeit der Sache ist von dem persönlichen Erscheinen des Orestes ganz unabhängig. Daher scheint nichts übrig als 782 für unecht zu halten. Uebrigens bieten die besten Handschriften:

ΟΡ. καὶ τὸ πρᾶγμ' ἔνδικόν μοι. ΠΥ. τὸ δοκεῖν εὖχου μόνον.

In V. 784 weist das unpassende γε auf einen Fehler hin. Vielleicht ist mit G. Hermann zu lesen καί τις ἄν μ' ἐποικτίσειε. Gegen den Vorschlag von Ahrens *de crasi et aphaeresi* p. 11 καὶ τίς ἄν μ' οὐκ οἰκτίσειε; spricht der Sinn, da Orestes unmöglich sich der sanguinischen Hoffnung hingeben kann, es würde die ganze Versammlung von Mitleid ergriffen werden.

Der Chor gedenkt der alten Leiden von denen das Haus der Atriden heimgesucht wurde, V. 811 ff.:

πάλαι παλαιᾶς ἀπὸ συμφορᾶς δόμων,
ὁπότε χρυσέας ἔρις ἀρνὸς
ἤλυθε Τανταλίδαις,
οἰκτρότατα θοινάματα καὶ
σφάγια γενναίων τεκέων·
ὅθεν φόνῳ φόνος ἐξαμεί-
βων δι' αἵματος οὐ προλεί-
πει δισσοῖσιν Ἀτρείδαις.

So die Ueberlieferung. In der Antistrophe lauten die entsprechenden Worte:

τὸ δ' αὖ κακουργεῖν ἀσέβεια μεγάλη
κακοφρόνων τ' ἀνδρῶν παράνοια.
θανάτου γὰρ ἀμφὶ φόβῳ
Τυνδαρὶς ἰάχησε τάλαι-
να· τέκνον, οὐ τολμᾷς ὅσια
κτείνων σὰν ματέρα, μὴ πατρῴ-
αν τιμῶν χάριν ἐξανά-
ψῃ δύσκλειαν ἐς ἀεί.

V. 812 ist mit Porson χρυσείας zu verbessern, wodurch das Metrum mit der Antistrophe in Uebereinstimmung gebracht wird. Unpassend scheint jedoch ὁπότε, *quandocunque*, wofür das einfache ὅτε erwartet wird[1]). Mit Benutzung von Porsons Vermuthung μαινόλις statt μεγάλη V. 823 möchte ich vorschlagen:

Str. πάλαι παλαιᾶς ἀπὸ συμφορᾶς δόμων,
ὅτε χρυσείας ὑπὲρ ἀρνὸς
ἔρις ἤλυθε Τανταλίδαις.

Antistr. τὸ δ' αὖ κακουργεῖν ἀσέβεια μαινόλις
κακόνων (oder κακόφρων) τ' ἀνδρῶν παράνοια.
θανάτοιο γὰρ ἀμφὶ φόβῳ —.

---

1) Fehlerhaft scheint auch Orest. 998: τὸ χρυσόμαλλον ἀρνὸς ὁπότ' ἐγένετο τέρας. Ebenso Hom. Od. 1, 40: ἐκ γὰρ Ὀρέσταο τίσις ἔσσεται Ἀτρεΐδαο, ὁππότ' ἂν ἡβήσῃ καὶ ἧς ἱμείρεται αἴης. Mit Unrecht habe ich bei Moschion fr. 7, 3 p. 633 die handschriftliche Lesart geduldet:

ἦν γάρ ποτ' αἰὼν κεῖνος, ἦν ὁπηνίκα
θηρσὶν διαίτας εἶχον ἐμφερεῖς βροτοί.

Es muss heissen ἦν ποθ' ἡνίκα. Sowohl diese Verbesserung als das in demselben Bruchstücke vermuthete δυσαυλίους φάραγγας ἐνναίοντες billigt Meineke.

V. 817 ist δι' αἵματος unverständlich, weshalb ich ehemals den etwas bedenklichen Vorschlag machte διαίματος zu schreiben. Auch V. 816 lässt auf eine Verderbniss schliessen; wenigstens stimmt er nicht mit dem antistrophischen Verse (828) zusammen. Vielleicht wissen andere besser zu helfen als es mir möglich ist; ich vermuthe

Str. ἔνθεν δ' αἱματόεις ἀμεί-
βων φόνῳ φόνος οὐ προλεί-
πει δισσοῖσιν Ἀτρείδαις.
Antistr. κτείνων ματέρα, μὴ πατρώ-
αν τελῶν χάριν ἐξανά-
ψῃ δύσκλειαν ἐς ἀεί.

Diesem Versuche einen Anspruch auf Probabilität beizulegen bin ich weit entfernt; ich führe ihn nur an um bessere Vorschläge herauszufordern.

Für den Orestes verwendet sich in der Argivischen Volksversammlung, wie V. 917 ff. gesagt wird, ein Mann

μορφῇ μὲν οὐκ εὐώπός,
921 ξυνετὸς δὲ χωρεῖν ὁμόσε τοῖς λόγοις θέλων,
ἀκέραιος, ἀνεπίπληκτον ἠσκηκὼς βίον.

Statt θέλων, was nur bedeuten könnte "aus eigenem Antriebe, freiwillig" oder "geneigt (mit andern anzubinden)" ist vermuthlich σθένων zu lesen, und für ξυνετὸς dürfte hiernach das Adverbium ξυνετῶς angemessener sein. Ueber die Verwechslung von θέλω und σθένω vgl. Eur. El. 615: OP. ἥκω ἐπὶ τόνδε στέφανον (nämlich den Aegisthus und die Clytaemnestra zu tödten)· ἀλλὰ πῶς λάβω; ΠΥ. τειχέων μὲν ἐλθὼν ἐντὸς οὐδ' ἂν εἷς θέλοις. Die letzten Worte sind abgeschmackt, da es sich ganz von selbst versteht dass Orestes wollen muss um zu erreichen was er beabsichtigt. Die Bedingungsform εἷς θέλοις ist daher ebenso verkehrt als die durch οὐδέ bezeichnete Steigerung. Offenbar muss es heissen:

τειχέων μὲν ἐλθὼν ἐντὸς οὐδὲν ἂν σθένοις.

D. h. du würdest nichts ausrichten.

Aus der Rede welche Orestes in der Volksversammlung hält, berichtet der Bote unter andern folgendes:

935 εἰ γὰρ ἀρσένων φόνος
ἔσται γυναιξὶν ὅσιος, οὐ φθάνοιτ' ἔτ' ἂν
θνήσκοντες, ἢ γυναιξὶ δουλεύειν χρεών·
τοὐναντίον δὲ δράσετ' ἢ δρᾶσαι χρεών.

Ohne Grund habe ich ehemals ἢ φθάνοιτ' ἔτ' ἂν vermuthet; der Sinn des οὐ φθάνοιτ' ἂν θνήσκοντες ist "ihr würdet nicht rasch genug sterben können", d. h. je früher ihr sterbt, um so besser. Vgl. Orest. 1551. Alc. 662. Tro. 456 und andere Stellen. In dem letzten Verse ist χρεών unpassend, und es lässt sich kaum bezweifeln dass dies Wort dem Schlusse des vorhergehenden Verses entlehnt ist. Ueber derartige Fehler vgl. meine *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 24 f., wo ich bereits darauf hingewiesen habe dass der Sinn zu fordern scheint

τοὐναντίον δὲ δράσετ' ἢ δρᾶσαι πρέπον.

Ganz ähnlich ist der Fehler in Eur. fr. 193:

ὅστις δὲ πράσσει πολλά, μὴ πράσσειν παρόν,
μῶρος, παρὸν ζῆν ἡδέως ἀπράγμονα,

wo ich vermuthet habe μὴ πράσσειν χρεών. Uebrigens möchte ich auch bezweifeln, ob Orest. 1128 f. unsere Handschriften das richtige bieten:

ΟΡ. καὶ τόν γε μὴ σιγῶντ' ἀποκτείνειν χρεών.
ΠΥ. εἶτ' αὐτὸ δηλοῖ τοὔργον οἳ τείνειν χρεών.

In den Worten mit welchen Electra die Epode beginnt,

982 μόλοιμι τὰν οὐρανοῦ
μέσον χθονὸς τεταμέναν αἰωρήμασι
πέτραν ἁλύσεσι χρυσέαισι φερομέναν
δίναισι βῶλον ἔξ Ὀλύμπου,

ist vieles befremdliche enthalten. Zunächst liegt es auf der Hand dass οὐρανοῦ und χθονός durch eine Copula verbunden sein müssen; daher hat G. Hermann τε vor τεταμέναν eingefügt; allein τεταμέναν kann von der βῶλος schwerlich gesagt werden. Daher ist es wahrscheinlicher dass in der ersten Silbe von τεταμέναν die fehlende Copula zu suchen ist. Sodann muss die Verbindung von τεταμέναν und φερομέναν auffallen. Noch seltsamer sind die drei Dative αἰωρήμασι, ἁλύσεσι χρυσέαισι, δίναισι, wo kaum gezweifelt werden kann dass αἰωρήμασι wie δίναισι nichts sind als Interpretationen, die sich mit Unrecht in den Text eingedrängt haben: zumal da Thomas Mag. p. 53, 1 bei einer Anführung der letzten Worte δίναισι fortlässt. Das auffallendste aber ist dies, dass πέτραν und βῶλον wie Synonyma neben einander stehen. Allen diesen Bedenken weiss ich nicht anders zu begegnen als mit folgender Schreibung:

μολοιμι τὰν οὐρανοῦ
μέσαν χθονός τ' ἐξαμμέναν
ἁλύσεσι χρυσέαισι
βῶλον ἐξ Ὀλύμπου.

Für die Richtigkeit des von mir vermutheten ἐξαμμέναν (d. h. ἐξημμένην) mag ich mich nicht verbürgen; im übrigen dürfte meine Herstellung wohl kaum einen Zweifel zulassen.

Bald nachher heisst es vom Tantalus

986 ὃς ἔτεκεν ἔτεκε γενέτορας ἐμέζεν δόμων.

Dieser hässliche Trimeter fällt gewiss der Willkür eines Verbesserers zur Last; Euripides wird geschrieben haben

ὃς ἔτεκε γενέτορας δόμων.

In ähnlicher Weise haben alle unsere Handschriften oben 967 zu πήματ' οἴκων die Worte τῶν Ἀτρειδῶν oder τῶν Ἀτρειδᾶν beigefügt, deren Unechtheit jetzt von niemand bezweifelt wird.

ΗΛ. καὶ πῶς σιωπῶ; φέγγος εἰσορᾶν θεοῦ
τόδ' οὐκέθ' ἡμῖν τοῖς ταλαιπώροις μέτα.

Im zweiten dieser Verse schlägt Kirchhoff vor ὅτ' οὐκέτ' ἡμῖν, und Kayser in den Neuen Jahrb. für Philol. und Paedag. Bd. LXXV Heft 2 p. 130 hat kein Bedenken getragen auch diesen Vorschlag, der sich bei näherer Betrachtung als sinnstörender Druckfehler erweist, gut zu heissen. Offenbar wollte Kirchhoff ὅτ' οὐκέθ' ἡμῖν. Denn weder ist ὅτι hier passend, noch wird ὅτι im Trimeter gebraucht, noch kann das Iota in ὅτι bei einem Tragiker elidirt werden[1]). Am meisten anstössig scheint das μέτα zu sein; die Emendation aber ist so unsicher, dass es gerathen sein dürfte von jedem Versuche abzustehen.

Orestes bittet seine Schwester, sie möge ihn nicht zu unmännlicher Weichheit stimmen:

μὴ πρὸς θεῶν μοι περιβάλῃς ἀνανδρίαν,
εἰς δάκρυα πορθμεύουσ' ὑπόμνησιν κακῶν.

Unbedenklich ist mit Musgrave ὑπομνήσει κακῶν zu verbessern; die fehlerhafte Ueberlieferung ist bedingt durch die stehende Verwechslung von ει und ι. Im ersten Verse bietet die beste Handschrift μου statt μοι und ἀνανδρία statt ἀνανδρίαν. Danach ist zu schreiben, woran schon G. Hermann dachte,

μὴ πρὸς θεῶν με περιβάλῃς ἀνανδρίᾳ.

Denn wenn in Hermanns Ausgabe προσβάλῃς steht, so ist das wohl nur ein Versehen. Ueber die Structur vgl. Orest. 906: πιθανὸς ἔτ' αὐτοὺς περιβαλεῖν κακῷ τινί. Das με ist hier um so angemessener, da es im folgenden Verse, εἰς δάκρυα πορθμεύουσ' ὑπομνήσει κακῶν, als Object vorausgesetzt wird. Dass aber ε und ου sehr oft vertauscht werden ist bekannt; vgl. Eur. El. 987, wo πικρὸν δὲ χἠδὺ statt πικρὸν δ' οὐχ ἡδὺ gelesen wurde, oder El. 641: παρέσται δ' ἓν (l. οὖν) πόσει ποίνην ἔπι u. a.

ὦ στέρν' ἀδελφῆς, ὦ φίλον πρόσπτυγμ' ἐμόν,
τάδ' ἀντὶ παίδων καὶ γαμηλίου λέχους
προσφθέγματ' ἀμφὶ τοῖς ταλαιπώροις πάρα.

Statt ἐμόν V. 1049 scheint ἐμοί nothwendig zu sein, schon deshalb weil πρόσπτυγμ' ἐμόν doppelsinnig wäre. Im dritten Verse hat ἀμφὶ mehrere Conjecturen veranlasst, unter denen ich nur eine sinngemässe finde, nämlich das von alten Abschreibern gesetzte κἀμοῖς. Sinnlos ist Musgraves ἄρτι und nicht viel besser Lobecks ἀμφοῖν. In der That giebt ἀμφοῖν, wie Matthiae schon bemerkt hat, nur einen überflüssigen und unpassenden Zusatz, und wenn G. Hermann dagegen geltend macht "*ubi non est nisi de duobus sermo, quid est quod illi non sint duo vel ambo dicendi? immo ubi quid aeque in utrumvis cadere dicendum est, necessarium est id utrique, eoque ambobus convenire dici*", so kann durch eine derartige Sophistik nimmermehr bewiesen werden dass νώ und νὼ ἄμφω gleich viel bedeuten. Wenn nun gar G. Her-

1) Auf Soph. El. 709: στάντες δ' ἔξ' οὑτοὶ οἱ τε- | ταγμένοι βραβῆς κλήρους ἔπταν, wird sich jetzt niemand | mehr berufen mögen, da die Richtigkeit meiner Verbesserung ἓν' αὐτοὺς jedem einleuchten muss.

mann ἀμφοῖν als Genetivus fasst und προσφθέγματ' ἀμφοῖν für *mutua colloquia* nimmt, so ist dies eine durch nichts zu rechtfertigende Willkür. Ich habe bereits in meiner ersten Ausgabe über die Worte προσφθέγματ' ἀμφὶ τοῖς ταλαιπώροις πάρα gesagt "*versus Euripide vix dignus*". Unabhängig, wie es scheint, von dieser meiner Bemerkung bemerkt Kirchhoff: "*versus spurius ab interprete additus, cui corrigendo frustra opera insumitur*".

Nahm sich nicht Menelaus deiner an? So fragt Electra 1056 f.:

οὐδ' εἷφ' ὑπὲρ σοῦ, μὴ θανεῖν σπουδὴν ἔχων,
Μενέλαος ὁ κακός, ὁ προδότης τοὐμοῦ πατρός;

Die Worte μὴ θανεῖν σπουδὴν ἔχων können nur bedeuten, Menelaus habe sich bemüht dem Tode zu entgehen, nicht aber, was hier nothwendig ist, er sei für die Rettung des Orestes thätig gewesen. Folglich ist wohl zu lesen μὴ θάνοις σπουδὴν ἔχων. Ueber die Structur vgl. Dionysius Halic. vol. 5 p. 149: ὅπως αἱ βάσεις αὐτῶν γένοιντο θεατρικαί τινες ἢ γλαφυραὶ σπουδὴν ἔχων.

Pylades will der ihm versprochenen Electra auf keinen Fall entsagen:

1092 ἐμὴν γὰρ αὐτήν, ἧς λέχος ἐπῆνεσα,
κρίνω δάμαρτα.

Den metrischen Fehler haben die Abschreiber, wie sich von ihnen erwarten liess, mit einem nach λέχος eingeschalteten γε ausgeflickt; passender hat Porson ἧς γε λέχος ἐπῆνεσα geschrieben. Allein es kommt hier offenbar viel weniger auf die frühere Entschliessung des Pylades an als auf die vom Orestes gegebene Zusage; d. h. man verlangt dass gesagt werde: ich betrachte als meine Gattin die Electra, die du selbst mir zugesprochen hast. Um diesen Sinn zu erreichen, will Kirchhoff schreiben ἧς ἐπῆνεσας λέχος. Um vieles leichter wäre die Aenderung ἧς σὺ λέχος ἐπῆνεσας. Aber es wird sich weder beweisen noch denken lassen dass λέχος κόρης ἐπαινεῖν bedeute "ein Mädchen verloben". In ganz anderem Sinne findet sich λέκτρα ἐπαινεῖν gebraucht V. 1672, wo Orestes sich damit einverstanden erklärt die Hermione zu heirathen:

ἰδού, μεθίημ' Ἑρμιόνην ἀπὸ σφαγῆς,
καὶ λέκτρ' ἐπῄνεσ', ἡνίκ' ἂν διδῷ πατήρ.

Eher möchte ich daher: ἧς σὺ λέχος ἐφήμισας, wie Iphig. Aul. 1356: τὴν ἐμὴν μέλλουσαν εὐνὴν μὴ κτανεῖν — ἣν ἐφήμισεν πατήρ μοι. Doch genügt wohl die einfachere Aenderung:

ἧς λέχος κατῄνεσας.

Vgl. Iphig. Aul. 695: παῖδ' οἵδ' ὅτῳ κατῄνεσας. Plutarch Pomp. c. 47: μεῖγμα Καπίωνι τῆς ὀργῆς τὴν ἑαυτοῦ θυγατέρα καταινέσας. Ebenso wird Orest. 1658 zu schreiben sein:

Πυλάδῃ δ' ἀδελφῆς λέκτρον, ὡς κατῄνεσας, δός

statt der Vulgate ὥς ποτ' ἤνεσας.

Orestes und Pylades gehen damit um, die Helena zu tödten. Von ihr sagt Pylades 1107: ἐν δόμοις δὲ κρύπτεται σέθεν. Orestes entgegnet:

μάλιστα, καὶ δὴ πάντ' ἀποσφραγίζεται.

Darauf Pylades:

1109 ἀλλ' οὐκέθ', Ἅιδην νυμφίον κεκτημένη.

Hartung übersetzt die letzten Worte: das soll sie nicht mehr; denn sie wird des Todes Braut! Wollte Euripides diesen übrigens sehr unzeitigen Gedanken ausdrücken, so musste er zu ἀλλ' οὐκέτι nothwendig ein Verbum hinzufügen. Jetzt kann man nur verstehen ἀλλ' οὐκέτι ἀποσφραγίζεται, Ἅιδην νυμφίον κεκτημένη. Damit würde gesagt sein, Helena habe im Gefühl des ihr bevorstehenden Todes das Versiegeln eingestellt. Allein von dem Plane der Freunde und von einer ihr drohenden Gefahr hat Helena keine Ahnung; und es wäre ganz wunderlich, wenn Euripides die beiden Freunde darüber streiten liesse, ob Helena den Nachlass des Orestes, auf dessen Tod sie wartet, noch versiegele oder ob sie dies nicht mehr thue. Kirchhoff, der nach οὐκέτι keine Interpunction setzt, scheint οὐκέτι κεκτημένη zu verbinden; dass dies unzulässig ist, bedarf keines Beweises; denn Pylades will sagen Helena sei dem Tode geweiht. Offenbar sind die Worte ἀλλ' οὐκέθ' verderbt, und nach dem Zusammenhange kann Euripides kaum etwas anderes geschrieben haben als

οὐκ οἶδεν Ἅιδην νυμφίον κεκτημένη.

Helena versiegelt den Nachlass des Orestes, weil sie nicht weiss dass der Tod sie erwartet. Dazu stimmt die folgende Frage des Orestes:

καὶ πῶς; ἔχει γὰρ βαρβάρους ὑπάονας.

Statt οὐκ οἶδεν Ἅιδην war vermuthlich in gewohnter Weise οὐκ οἶδ' Ἅιδην geschrieben, und dies wurde dann ergänzt und corrumpirt. Uebrigens bieten die Scholien zu ἀποσφραγίζεται V. 1108 die bemerkenswerthe Variante ἀπασφαλίζεται, bemerkenswerth namentlich auch deshalb, weil sie lehrt dass in Trag. adesp. fr. 458, 9 bei Stobaeus Flor. 74, 27 zu lesen ist, wie ich verbessert habe,

ὅστις δὲ μοχλοῖς καὶ διασφαλίσμασι
σώζει δάμαρτα.

Gewöhnlich schrieb man διὰ σφραγισμάτων, während die Handschrift A διασφραγίσμασ bietet. Dies διασφραγίσμασι behielt Meineke bei, vermuthlich wegen Aristoph. Thesm. 415, wo indess schon Fritzsche darauf hingewiesen hat dass ein Versiegeln des Frauengemaches schwerlich bei den Griechen jemals heimisch gewesen ist. Gesetzt aber auch man könnte sich das Einsiegeln der Frauen gefallen lassen, immer würde man fragen müssen was denn eigentlich die Praeposition in διασφράγισμα zu bedeuten habe.

Man dürfe nicht zulassen, meint Pylades, dass Menelaus allein triumphire:

οὐ δεῖ ποτ', οὐ δεῖ Μενέλεων μὲν εὐτυχεῖν,
1144 τὸν σὸν δὲ πατέρα καὶ σὲ κἀδελφὴν ἔανεῖν,
1146 δόμους τ' ἔχειν σούς, δι' Ἀγαμέμνονος δόρυ
λαβόντα νύμφην· μὴ γὰρ οὖν ζῴην ἔτι,
ἢν μὴ ἐπ' ἐκείνῃ φάσγανον σπασώμεθα.

Nach 1144 findet sich in den Handschriften folgender Vers, den ich ohne Bedenken ausgeschieden habe,

μητέρα τ', ἐᾶ τοῦτ', οὐ γὰρ εὐπρεπὲς λέγειν.

Die Erwähnung der Clytaemnestra ist hier so unpassend dass sie selbst durch die Worte οὐ γὰρ εὐπρεπὲς λέγειν, die übrigens in dieser Form sehr matt sind (Hartung übersetzt "denn es klingt nicht hübsch und gut"), auf keine Weise entschuldigt werden kann. Ausserdem wird durch den fraglichen Vers der Zusammenhang so empfindlich durchschnitten, dass die Beziehung der Worte δόμους τ' ἔχειν σούς sich kaum noch errathen lässt. Freilich scheint mit der Tilgung des Verses die Stelle noch nicht geheilt zu sein: mindestens sind die Versausgänge δόρυ und ἔτι unpassend. Denn δι' Ἀγαμέμνονος δόρυ heisst "in Folge des Speeres des Agamemnon", μὴ γὰρ οὖν ζῷην ἔτι würde nur dann an seiner Stelle sein, wenn ein Factum genannt oder doch gemeint wäre, nach dessen Eintreten Pylades nicht weiter leben wollte. Nimmt man hinzu dass im folgenden Verse alle Handschriften ausser Vatic. 909 σπάσω μέλαν bieten, so wird es nicht unglaublich erscheinen, dass in δόρυ und ἔτι falsche Supplemente einer ursprünglichen Lücke vorliegen, und dass Euripides etwa δι' Ἀγαμέμνονος πόνους und μὴ γὰρ οὖν ζῷην ἐγώ geschrieben habe.

Können wir die Ermordung der Helena nicht durchsetzen, meint Pylades weiter, so wollen wir dies Haus in Brand stecken und auf diese Weise uns selbst dem Tode weihen:

1151 ἑνὸς γὰρ οὐ σφαλέντες ἕξομεν κλέος,
καλῶς θανόντες ἢ καλῶς σεσωσμένοι.

Diese Verse sind nicht, wie ich ehemals glaubte, als unecht zu verwerfen, sondern durch die Emendation eines Wortes in Ordnung zu bringen. Statt ἑνός ist δυοῖν zu schreiben. "Eins von zwei Dingen erlangen" bezeichnen die Griechen gern durch die negative Ausdrucksweise δυοῖν μὴ ἁμαρτάνειν und ähnliche Wendungen, mit einem nachfolgenden Disjunctivsatze. Vgl. Soph. El. 1320: οὐκ ἂν δυοῖν ἥμαρτον· ἢ γὰρ ἂν καλῶς ἔσωσ' ἐμαυτὴν ἢ καλῶς ἀπωλόμην. Demosth. 19, 151: δυοῖν οὐ διαμαρτήσεσθαι τὴν πόλιν ἡγούμην· ἢ γὰρ — ἀποδώσειν — ἢ ἀπαγγελεῖν ἡμᾶς. Antiphon 1, 20: δυοῖν τοῖν μεγίστοιν κακοῖν οὐκ ἦν αὐτῷ ἁμαρτεῖν· ἢ γὰρ ὑπ' ἐμοῦ ἀποθανεῖν ἢ αὐτῷ σωθέντι ἐμὲ ἀποκτεῖναι. Thucyd. 1, 33: μηδὲ δυοῖν φθάσαι ἁμάρτωσιν, ἢ κακῶσαι ὑμᾶς ἢ σφᾶς αὐτοὺς βεβαιώσασθαι. Abschreiber oder Correctoren, denen diese Redeweise unbekannt war, erwiesen dem Dichter einen schlechten Dienst mit ihrem sinnlosen ἑνός, bei dessen Setzung sie von dem richtigen Gedanken ausgingen dass nur eins möglich sei, Rettung oder Tod. Eine ganz ähnliche Willkür der Verbesserer finden wir Hel. 494, wo jetzt Menelaus die seltsame Behauptung aufstellt:

ἁπλοῦν δὲ Τυνδάρειον ὄνομα κλῄζεται.

"Der Tyndarische Name findet sich ein einziges mal". Ursprünglich fragte Menelaus:

διπλοῦν δὲ Τυνδάρειον ὄνομα κλῄζεται;

"Findet sich denn der Tyndarische Name zweimal?" Nur diese Frage hat einen Sinn, nur sie stimmt zu den ganz entsprechenden Fragen, welche vorhergehen und nachfolgen.

Orestes will seinem Vater nicht Unehre machen durch einen schimpflichen Tod:

ὃν (τὸν Ἀγαμέμνονα) οὐ καταισχυνῶ
δοῦλον παρασχὼν θάνατον, ἀλλ' ἐλευθέρως
ψυχὴν ἀφήσω, Μενέλεων δὲ τίσομαι.

Angemessener scheint um des Gegensatzes willen ἐλευθέρως ψυχὴν ἀφήσω. Ueber den Unterschied zwischen ἐλευθέρως ἀποθνήσκω, *voluntariam mortem subeo*, und ἐλεύθερος (*nullius servus*) ἀποθνήσκω habe ich bereits in den *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 41 das nöthige bemerkt.

Menelaus wird, wenn er im Anfange heftig ist, mit der Zeit sich erweichen lassen:

καί νιν δοκῶ, τὸ πρῶτον ἢν πολὺς παρῇ,
χρόνῳ μαλάξειν σπλάγχνον.

Das matte παρῇ ist augenscheinlich verderbt; wenigstens wüsste ich nicht wie die Verbindung πολὺς παρῇ gerechtfertigt werden sollte. Passender wäre ohne Zweifel ἢν πολὺς πνέῃ. Vgl. Demosth. 25, 57 p. 787, 20: ὡς πολὺς παρ' ὑμῖν ἔπνει καὶ λαμπρὸς ἦν. Euenus Anth. Palat. 11, 49: εἰ δὲ πολὺς πνεύσειεν (ὁ Βάκχος), ἀπέστραπται μὲν Ἔρωτας, βαπτίζει δ' ὕπνῳ γείτονι τῷ θανάτου. Dionys. Hal. Antiq. Rom. 7, 51: τῆς τ' αὐθαδίας ἧς (wohl ᾗ) πολὺς ἔπνει τότε, ὑφεῖται νυνί. 8, 52: ἐν οἷς ἀνθεῖν ἐδόκεις πολιτεύμασι καὶ πολὺς ἔπνεις. Philostr. V. Soph. 1, 7: ἐπὶ μὲν τὴν κατηγορίαν τοῦ τυράννου πολὺς ἔπνευσεν. Procopius Epist. 3 bei Mai Class. auct. IV p. 204: ὁρῶν τινὰς μέγα μὲν δυναμένους, θαυμάζοντας δὲ τῶν δικαίων μηδέν, πολὺς ἔπνευσας κατ' αὐτῶν. Allein bei weitem häufiger ist πολὺν ῥεῖν, und da hier der Aorist vorzuziehen ist, so möchte ich verbessern ἢν πολὺς ῥυῇ. So Eur. Hipp. 443: Κύπρις γὰρ οὐ φορητὸς ἢν πολλὴ ῥυῇ. Demosth. 18, 136 p. 272, 22: τῷ Πύθωνι θρασυνομένῳ καὶ πολλῷ ῥέοντι καθ' ὑμῶν οὐκ εἶξα. Plutarch Alcib. c. 21: ἀπαλλαγεὶς τῶν ἑρμοκοπιδῶν ὥσπερ σχολάζοντι τῷ δυμῷ πρὸς τὸν Ἀλκιβιάδην ὅλος ἐρρύη. Libanius Decl. IV p. 277, 11: Δημοσθένης ὁ πολὺς κατὰ τοῦ Φιλίππου ῥέων ἐπὶ τῆς ἐκκλησίας. p. 816, 13: κομψοὺς Εὐρυβάτας, πολλὰ στωμυλλομένους, πολλὰ (l. πολλοὺς) ῥέοντας ἐπ' ἐκκλησίας. Philo Iud. vol. 1 p. 549 M.: ἐπειδάν ἴδῃς, φησί, τὸν φαῦλον πολὺ (l. πολὺν) ῥέοντα κατὰ ἀρετῆς. Clemens Alex. Cohort. p. 39, 3: εἰς ἐπίδοσιν ἐλθοῦσα καὶ πολλὴ δὴ ῥυεῖσα. (In etwas anderem Sinne sagt Achilles Tatius 6, 10: ἡ φήμη ῥεῖ εὐθὺς πολλή. Pseudo-Phocyl. 180: μηδ' ἐς ἔρωτα γυναικὸς ἅπας ῥεύσῃς ἀκάθεκτος. Plutarch Nicias c. 9: ἡ Ἀλκιβιάδου φύσις ἐπ' ἀμφότερα πολλὴ ῥυεῖσα. Appian Bell. civ. 5, 76: πολὺς ἐς τήνδε ἐρρύη.) Hiernach lässt sich, wie ich glaube, eine andere Euripideische Stelle emendiren, die bisher unrichtig behandelt worden ist, Hec. 1055:

ἀλλ' ἐκποδὰν ἄπειμι κἀποστήσομαι
δυμῷ ῥέοντι θρῃκὶ δυσμαχωτάτῳ.

Man hat nach dem Einfall alter Abschreiber δυμῷ ζέοντι gesetzt, wofür Ruhnken, um die ganz unerträgliche Vieldeutigkeit zu beseitigen, die durch die Häufung der Dative entsteht, δυμὸν ζέοντι vorschlug. Statt dieser doppelten Aenderung wird vorzuziehen sein

πολλῷ ῥέοντι θρῃκὶ δυσμαχωτάτῳ.

*

War in πολλῷ der Anfangsbuchstabe verdunkelt, so konnte ΟΛΛΩΙ oder ΘΜΩΙ sehr leicht in ΘΥΜΩΙ übergehen.

1222 ἡμεῖς δ' ἐσω στείχοντες ἐπὶ τὸν ἔσχατον
ἀγῶν' ὁπλιζώμεσθα φασγάνῳ χέρας,
Πυλάδη· σὺ γὰρ δὴ συμπονεῖς ἐμοὶ πόνους.

Der letzte Vers klingt matt und nüchtern; er giebt zu ὁπλιζώμεσθα φασγάνῳ χέρας eine unpassende Begründung und lenkt die Aufmerksamkeit des Hörers von dem worauf es ankommt unnütz ab. Aus diesen Gründen zweifle ich an seiner Authentie. Er scheint nur da zu sein, um zu erklären dass Orestes mit dem ἡμεῖς sich und den Pylades bezeichnet. Dies ist indess aus dem Zusammenhange so deutlich, dass es nicht ausdrücklich gesagt zu werden brauchte. Sollte der Vers erträglich sein, so müsste er unmittelbar nach ἡμεῖς δὲ gestellt sein. Nur dürfte das δή nicht stehen, das als ein reines Flickwort erscheint.

1226 καλεῖ σ' Ὀρέστης παῖς σὸς ἐπίκουρον μολεῖν.

Da Orestes diese Worte spricht, so verlangt Cobet Nov. Lect. p. 198 καλῶ σ' Ὀρέστης. Dass so gesagt werden konnte wird niemand leugnen, dass aber so gesagt werden musste wird sich schwerlich erweisen lassen. In den meisten Fällen wird natürlich die Aenderung der dritten Person in die erste ohne grosse Schwierigkeit sich bewerkstelligen lassen, zumal wenn man sich solche Freiheiten gestattet wie Cobet, der z. B. bei Pseudo-Eur. El. 1293 vorschlägt: δίπτυχοι δέ σε μητρὸς καλοῦμεν (statt καλοῦσι μητρὸς) σύγγονοι Διόσκοροι. Allein immer dürfte dies nicht möglich sein, wenn man nicht zu Gunsten einer reinen Caprice die offenbarsten Gewaltthätigkeiten üben will. Vgl. Soph. Oed. R. 1336, wo Oedipus sagt:

εἰ δέ τι πρεσβύτερον ἔτι κακοῦ κακόν,
τοῦτ' ἔλαχ' Οἰδίπους.

Wie diese Stelle zu emendiren sei, um der aufgestellten Regel sich zu fügen, hat Cobet wohlweislich nicht angegeben.

Die drei Verbündeten, Orestes, Pylades und Electra, bekennen sich in gleicher Weise schuldig an dem Tode der Clytaemnestra:

1235 ΟΡ. ἔκτεινα μητέρ'. ΠΥ. ἠψάμην δ' ἐγὼ ξιφους.
ΗΛ. ἐγὼ δ' ἐπεβούλευσα κἀπέλυσ' ὄκνου.

So die besten Handschriften (A E c *C*), κἀγὼ δ' ἐπεβούλευσα F. In dem ἐπεβούλευσα scheint nichts anderes zu liegen als was schon alte Verbesserer erkannt haben, ἐπεκέλευσα. Denn wie ε und ου sehr häufig verwechselt werden (vgl. oben S. 55), so sind β und κ in vielen Fällen absolut nicht zu unterscheiden[1]). Der metrische Fehler in ἐγὼ δ' ἐπεκέλευσα wird

1) Daraus erklären sich Verderbnisse wie bei Babrius Fab 23, 5: ἔδηκε δ' εὐχὴν ταῖς ὀρεινόμοις νύμφαις, Ἑρμῇ νομαίῳ, Πανί, τοῖς πέριξ, ἄρνα λοιβὴν παρασχεῖν statt λευκὴν παρασχεῖν, oder bei Tzetzes Exeg. Il. p. 23, 11 τοῦ Κριάρεω statt τοῦ Βριάρεω, bei Hesychius vol. 2 p. 113: κακόβας, ὁ ἐπὶ κακῷ ἡβῶν statt ἥκων, und ähnliches.

zu heben sein nicht durch die Einschaltung des beliebten γε, sondern durch die Aenderung ἐγὼ δ' ἐπενεκέλευσα. Ganz dieselbe Corruptel finden wir wieder bei Eur. El. 1224: ἐγὼ δ' ἐπεκέλευσά σοι, wo ich ebenfalls ἐγὼ δ' ἐπενεκέλευσά σοι geschrieben habe.

Nachdem Pylades den Zeus und die Dike um glückliches Vollbringen des gemeinsamen Vorhabens angerufen hat, schliesst er:

τρισσοῖς φίλοις γὰρ εἷς ἀγών, δίκη μία·
ἢ ζῆν ἅπασιν ἢ θανεῖν ὀφείλεται.

Der letzte Vers enthält ein widersinniges Dilemma, wie aus folgenden Stellen hervorgeht. Alc. 419: ὡς πᾶσιν ἡμῖν κατθανεῖν ὀφείλεται. 782: βροτοῖς ἅπασι κατθανεῖν ὀφείλεται. Andr. 1271: πᾶσιν γὰρ ἀνθρώποισιν ἥδε πρὸς θεῶν ψῆφος κέκραναι κατθανεῖν τ' ὀφείλεται. fr. 10: κατθανεῖν δ' ὀφείλεται καὶ τῷ κατ' οἴκους ἐκτὸς ἡμένῳ πόνων. Mit andern Worten, ὀφείλεται bezeichnet in dieser Verbindung eine unabänderliche Naturnothwendigkeit, wie das von Alciphron 1, 25 in demselben Zusammenhange gebrauchte μεμοίραται. Darum halte ich den oben angeführten Vers für eine spätere Erklärung der vorhergehenden Worte.

1295 ἀμείβω κέλευθον σκοπεῦσα πάντᾳ.

Wie die erste Hälfte dieses Verses zwei Bacchien enthält, so muss man für die zweite Hälfte das gleiche Metrum erwarten. Ist diese Vermuthung schon an sich höchst wahrscheinlich, so wird sie zur Gewissheit erhoben dadurch dass unser Vers als Paradigma der Bacchien angeführt wird von dem Gramm. Ambros. bei H. Keil Anal. gramm. Halle 1848 p. 7, 29, wo die Stelle ohne Nennung des Dichters in folgender Gestalt erscheint:

ἀμείβω κέλευθον· σκοπεὺς ἀπατᾷ[1]).

Hiernach vermuthe ich ἀμείβω κέλευθον σκοπεύουσ' ἁπάντᾳ. Allerdings wird σκοπεύειν als nicht attisch bezeichnet in den Anecd. Bekk. p. 435, 20: ἀποσκοπεῖσθαι λέγουσιν, οὐ σκοπεύειν. Indess hat Xenoph. Hipp. 7, 6 das Wort gebraucht, und so wird es dem Euripides nicht schlechthin abzusprechen sein. Will jemand eine andere Emendation versuchen, so wird er wenigstens festhalten müssen dass bei den Bacchien fast durchgängig die Enden der Versfüsse mit Wortenden zusammentreffen. Vgl. Aesch. Prom. 115: τίς ἀχώ, τίς ὀδμὰ προσέπτα μ' ἀφεγγής; Sept. 105: τί ῥέξεις; προδώσεις, παλαίχθων Ἄρης, τὰν τεὰν γᾶν; Eum. 789: στενάζω· τί ῥέξω; γελῶμαι δύσοιστα. fr. 332: ὁ Κισσεὺς Ἀπόλλων, ὁ Βακχεύς, ὁ μάντις. Besonders deutlich tritt dies hervor an Stellen wie Eur. Bacch. 1181 und 1197, wo die Bacchien unter verschiedene Personen vertheilt sind:

ΧΟ. τίς ἄλλα; ΑΓ. τὰ Κάδμου ΧΟ. τί Κάδμου; ΑΓ. γένεθλα
und ΧΟ. περισσὰν ΑΓ. περισσῶς ΧΟ. ἀγάλλει; ΑΓ. γέγηθα.

1) Bergk Lyr. p. 1077 sagt hierüber folgendes: "*Ex tragoedia fortasse petita sunt, quae leguntur ap. Keil. Anal. Gramm. p.* 7, 30: Ἀμείβω κέλευθον· σκοπεὺς ἀπατᾷ (*leg.* σκοπευτὴς ἀπαντᾷ), *nisi est ab ipso grammatico fictum exemplum, sicut ea quae sequuntur.*" Genau dieselbe Vermuthung σκοπευτὴς ἀπαντᾷ machte Schneidewin Gött. gel. Anz. 1848 p. 815, was Bergk übersehen zu haben scheint.

Vgl. Soph. El. 1279: ΗΛ. ξυναινεῖς; ΟΡ. τί μὴν οὔ; Trach. 892: ΧΟ. τί φωνεῖς; ΤΡ. σαφηνῆ. Eur. Rhes. 706: A. δοκεῖ γάρ; B. τί μὴν οὔ; A. Θρασὺς γοῦν ἐς ἡμᾶς. B. τὸν ἀλκήν; τίν' αἰνεῖς; A. Ὀδυσσῆ. 724: A. τί λάσκων; B. δυσοίζων. A. τί δρᾶσαι; τί ταρβεῖς; B. καὖ ἡμᾶς περᾶσαι. A. τὸν ἀνδρῶν; Allerdings fehlt es nicht an Ausnahmen; allein diese sind nicht so zahlreich dass sie die Giltigkeit des Gesetzes zu erschüttern vermöchten. Die längste Folge von Bacchien finden wir bei Eur. Orest. 1437, wo in neun Bacchien nur einmal jenes Gesetz verletzt wird:

πρόσειπεν δ' Ὀρέστας Λάκαιναν κόραν· ὦ Διὸς παῖ,
ὗς ἴχνος πέδῳ δεῦρ', ἀποστάσα κλισμοῦ,

und wo es nahe genug liegt ἀπόστα δὲ κλισμοῦ zu vermuthen. Wenn man an dieser Stelle die Bacchien verkannt hatte, wo sie ganz unversehrt in fortlaufender Reihe vorliegen, so ist es kein Wunder dass man da wo sie weniger rein überliefert waren sich leicht täuschen liess, wie bei Soph. Trach. 888: ἐπεῖδες, ματαία, und 895: δόμοις τοῖσδ' ἐρινύν. Eben dahin gehört ohne Zweifel Eur. Orest. 1389: ἐρινύν· ὀτοτοῖ, wo die beste Handschrift ὀττοτοῖ bietet. Kirchhoff wollte ἐρινύν· τοτοῖ, um einen Dochmius zu gewinnen. Es war vielmehr zu verbessern ἐρινύν· ὀτοττοῖ. Die Form ὀτοττοῖ, die im Thesaurus Gr. L. vol. 5 p. 2335 C mit Unrecht als fehlerhaft bezeichnet wird, ist auch bei Aeschylus Agam. 1031 und 1035 ed. Herm. herzustellen:

ὀτοττοῖ (statt ὀτοτοτοῖ) πόποι δᾶ. Ἀπόλλων Ἀπόλλων,

wo Hermann augenscheinlich irrte, wenn er die Bacchien für hyperkatalektische Dochmien hielt.

1393 σαφῶς λέγ' ἡμῖν αὖθ' ἕκαστα τἀν δόμοις.

Mit der Beurtheilung dieser Stelle hängt die Entscheidung über einige andere zusammen. V. 1400: ἦλθον εἰς δόμους, ἵν' αὖθ' ἕκαστά σοι λέγω. Phoen. 494: ταῦτ' αὖθ' ἕκαστα, μῆτερ, οὐχὶ περιπλοκὰς λόγων ἀθροίσας εἶπον. Aesch. Prom. 950: καὶ ταῦτα μέν μοι μηδὲν αἰνικτηρίως, ἀλλ' αὖθ' ἕκαστ' ἐκφραζε. Zumal an den beiden letzten Stellen scheint αὖθέκαστα nothwendig zu sein, damit wir den allein angemessenen Sinn bekommen "einfach und schlicht". In den Versen des Orestes spricht wenigstens für die Verbindung Phrynichus Bekk. p. 17, 24: αὖθέκαστα. τὸ τὰ κυριώτατα διὰ βραχέων καὶ τὰ ἀναγκαιότατα λέγειν, μὴ κύκλῳ βαδίζοντα καὶ περιτρέχοντα "αὖθέκαστα λέγειν" (ἀλλὰ τὰ ἕκαστα λέγοντα cod.) ἐκάλεσαν οἱ ἀρχαῖοι. Μένανδρος (Com. 4 p. 284) ἐπὶ τοῦ πικροῦ (l. σκληροῦ) καὶ ἀηδοῦς τέθεικε τὴν λέξιν· "πικροῦ γέροντος, αὖθεκάστου τὸν τρόπον". Zur Ergänzung dient Anecd. Bekk. p. 462, 25: αὖθέκαστα, αὐτὰ τὰ γενόμενα, οἷον ἀκριβῶς καὶ συντόμως καὶ ἀποτόμως. καὶ λόγοι αὖθέκαστοι οἱ σαφεῖς καὶ ἀπότομοι ἢ οἱ ἀληθεῖς. Ἡρόδοτος δὲ (3, 82) διαλύων φησὶν αὐτὰ ἕκαστα, οἷον αὐτὴν τὴν ἀλήθειαν. Μένανδρος φησί "πικροῦ γέροντος, αὖθεκάστου τὸν τρόπον". Ποσειδιππος δὲ (Com. 4 p. 527) ἀντὶ τοῦ ἁπλοῦ ἐχρήσατο. Angemessener dürfte die Trennung sein bei Eur. Hec. 1227: ἐν τοῖς κακοῖς γὰρ ἀγαθοὶ σαφέστατοι φίλοι· τὰ χρηστὰ δ' αὖθ' ἕκαστ' ἔχει φίλους.

An den vor Furcht zitternden Phrygischen Sklaven richtet Orestes die Frage:

1518 ὧδε κἀν Τροίᾳ σίδηρος πᾶσι Φρυξὶν ἦν φόβος;

Dass alle Phrygier gleich furchtsam waren lässt sich nicht erwarten, und sicherlich ist der Sklave nicht im Stande über den Charakter aller seiner Landsleute Auskunft zu ertheilen. Somit ist πᾶσι nicht eben angemessen. Dazu kommt dass das Wort in der besten Handschrift gänzlich fehlt. Angemessener wäre gewiss τοῖσι Φρυξὶν ἦν φόβος. Wer jedoch die Schicksale unserer Texte etwas genauer verfolgt hat, wird es für bei weitem glaublicher halten dass hier das Versende unvollständig ist. Wahrscheinlich ist zu ergänzen

ὧδε κἀν Τροίᾳ σίδηρος Φρυξὶν ἦν φόβου πλέως;

Ueber den Menelaus, an dem durch Tödtung der Helena und Hermiona Rache genommen werden soll, wofern er sich nicht nachgiebig zeigt, sagt Orestes:

εἰ γὰρ Ἀργείους ἐπάξει τοῖσδε δώμασιν λαβών,
τὸν Ἑλένης φόνον διώκων, κἀμὲ μὴ σώζειν θέλῃ
1535 σύγγονόν τ' ἐμὴν Πυλάδην τε τὸν τάδε ξυνδρῶντά μοι,
παρθένον τε καὶ δάμαρτα δύο νεκρὼ κατόψεται.

In der grammatischen Form befremdet der Wechsel des Modus in ἐπάξει und θέλῃ. Früher habe ich κἄν μὲ μὴ σώζειν θέλῃ vorgeschlagen: angemessener dürfte sein κἀμὲ μὴ σώζειν θέλων. Metrisch fehlerhaft ist der durch Πυλάδην hervorgerufene Dactylus, der bei diesem Eigennamen durch nichts entschuldigt ist. Vielleicht sind die Worte σύγγονον — ξυνδρῶντά μοι ein späterer Zusatz.

In dem Wechselgespräche das Menelaus und Orestes in Halbversen führen, heisst es:

1608 ΜΕ. ἄπαιρε θυγατρὸς φάσγανον. ΟΡ. ψευδὴς ἔφυς.

Die Antwort des Orestes "du lügst" ist hier, wo Menelaus keine Behauptung aufstellt, sondern einen Wunsch oder Befehl ausspricht, höchst unpassend. Sie wird vollkommen angemessen, sobald der Wunsch des Menelaus in die Form einer Behauptung gekleidet wird, d. h. wenn wir schreiben:

ΜΕ. θυγατρὸς ἀπαρεῖς φάσγανον. ΟΡ. ψευδὴς ἔφυς.

Dazu stimmen dann die folgenden Worte, in denen Menelaus ebenfalls das Futurum gebraucht:

ΜΕ. ἀλλὰ κτενεῖς μου θυγατέρ'; ΟΡ. οὐ ψευδὴς ἔτ' εἶ.

Apollon, der am Schlusse des Stückes eintritt, um den hart entbrannten Kampf beizulegen und die aufgeregten Gemüther zu besänftigen, sagt über die Helena zum Orestes:

Ἑλένην μὲν ἦν σὺ διολέσαι πρόθυμος ὢν
1630 ἥμαρτες, ὀργὴν Μενέλεῳ ποιούμενος,
ἥδ' ἐστίν, ἣν ὁρᾶτ' ἐν αἰθέρος πτυχαῖς,
σεσωσμένη τε κοὐ θανοῦσα πρὸς σέθεν.

Den Schauspieler dem die Rolle der Helena zugewiesen war, am Schlusse des Stückes ἐν αἰθέρος πτυχαῖς zu zeigen, wäre ein Kunststück, das man eher auf einer heutigen Bühne als im antiken Theater erwarten sollte. Die Ausführung dieses Manoeuvres musste der Un-

vollkommenheit antiker Maschinerien eine nicht unerhebliche Schwierigkeit bereiten. Sollen wir nun glauben Euripides habe lediglich um dieses Zweckes willen die Helena oben in den Lüften zeigen lassen? oder ist sonst irgend eine vernünftige Absicht denkbar? Denn das wird sicherlich niemand sich oder andern einreden, dass durch das Aufzeigen der Helena die Worte des Apollo gegen etwaige Zweifel an seiner Wahrhaftigkeit sicher gestellt werden sollen. Und wie wäre es denkbar dass derselbe Apollo, der die Helena ἐν αἰθέρος πτυχαῖς dem erstaunten Publicum zeigt, bald darauf sagt: Κάστορί τε Πολυνείκει τ' ἐν αἰθέρος πτυχαῖς σύνδικος ἔσται? Auch müsste statt des Pluralis ὁρᾶτε hier nothwendig ὁρᾷς stehen, da σέθεν folgt. Offenbar ist V. 1631 unpassend, und darum scheint er unecht zu sein. — Weniger dringend ist der Verdacht gegen die Echtheit von 1651:

θεοὶ δέ σοι δίκης βραβεῖς
[πάγοισιν ἐν Ἀρείοισιν εὐσεβεστάτην]
ψῆφον διοίσουσ', ἔνθα νικῆσαί σε χρή.

In den eingeklammerten Worten ist εὐσεβεστάτην ein schiefer Ausdruck, und πάγοισιν ἐν Ἀρείοισιν scheint nur hinzugefügt, um das ἔνθα zu erläutern, das man ohne Grund local fasste. Fehlte der Vers, so würde ihn gewiss niemand vermissen.

1684 Ἑλένην Ζηνὸς μελάθροις πελάσω.

An diesen Anapaesten ist nichts weiter auszusetzen als dass alle für die Kritik in Betracht zu ziehenden Handschriften in Uebereinstimmung mit Tzetzes zum Lycophr. 510 Διὸς statt Ζηνὸς bieten. Hiernach habe ich kein Bedenken getragen die leichtere Aenderung

Ἑλένην Δίοις μελάθροις πελάσω

vorzuziehen, die denn auch Kirchhoff in den Text gesetzt hat[1]). Ausserdem war μελάθροισι πελῶ zu schreiben; ein Futurum πελάσω ist von den Attikern schwerlich gebraucht worden. Die Verwechslung von Διός und Ζηνός erinnert mich an Herc. F. 1304:

χορευέτω δὴ Ζηνὸς ἡ κλεινὴ δάμαρ,
κρούσουσ' Ὀλυμπίου Ζηνὸς ἀρβύλῃ πόδα.

In Ὀλυμπίου — πόδα haben schon andere das ursprüngliche Ὀλύμπου πέδον richtig erkannt. Vermuthlich hatte der Vers ehemals folgendes Aussehen:

κρούσουσ' ὀλύμπου διὸς ἀρβύλῃ πόδα.

Wie leicht aus ὀλύμπου διὸς das handschriftliche ὀλυμπίου ζηνὸς entstehen konnte, ist jedem ersichtlich. Darum halte ich es durchaus nicht für verwegen zu schreiben:

κρούσουσ' Ὀλύμπου δῖον ἀρβύλῃ πέδον.

---

1) A. Witzschel hält dagegen an Ζηνὸς fest, vermuthlich weil er meint *a coniectandi libidine quam maxime abstinendum* (p. XX) *et eam ante omnia parandam esse Euripidis recognitionem, quae non mero opinionis arbitrio, verum libris nitatur optimis et antiquissimis* (p. XXI). Es schien zweckmässig hiermit Witzschels Ausgabe (Leipzig 1855 u. 1856) zu berücksichtigen, um daran die Bemerkung zu knüpfen, dass eine weitere Bezugnahme auf diese Leistung der Tauchnitzer Officin nicht in meinem Plane liegen kann.

Meineke will dagegen Philol. XIV p. 1 κρούουσ' Ὀλύμπου σεμνὸν ἀρβύλῃ πέδον[1]). Bei Soph. Trach. 956: τὸν Ζηνὸς ἄλκιμον γόνον, ist Ζηνὸς eine Aenderung des Triclinius, während die Handschriften τὸν Διὸς bieten. Natürlich war auch hier τὸν Δῖον herzustellen, wie ich es in meiner Bearbeitung der Schneidewinschen Ausgabe bereits gethan habe.

In dem nachfolgenden Supplement der Citationen und Berücksichtigungen von Versen des Orestes folge ich wiederum der Kirchhoffschen Zählung.

V. 1—3 auch Theodorus Prodromus in *Notices et Extr.* VIII p. 142. Auctor Timarionis in *Notices et Extr.* IX p. 165. Suidas v. ἄραιτο, Lateinisch bei Cicero Tusc. 4, 29, 63.

V. 5 Psellus in Anecd. Oxon. III p. 408, 16.

V. 6 Gregorius Naz. vol. 1 p. 132 B. Psellus in Anecd. Oxon. III p. 408, 8.

V. 9 Lucian Epist. Saturn. 38 vol. 3 p. 417. Gregor. Naz. vol. 2 p. 238 C. Theodorus Hyrtac. Epist. 77 in *Notices et Extr.* VI p. 37.

V. 10 vgl. Theophyl. Simoc. Epist. 67.

V. 11 Thomas Mag. p. 387, 3.

V. 36 vgl. Eust. Il. p. 184, 18.

V. 40 Eust. Il. p. 43, 8.

V. 41 Schol. Eur. Hipp. 134. Thomas Mag. p. 399, 14.

V. 50 Moschopulus in Hesiod. Op. 538.

V. 55 Thomas Mag. p. 264, 14. Eust. Il. p. 250, 39.

V. 72 Eust. Il. p. 742, 53.

V. 122 Thomas Mag. p. 215, 13.

V. 126 Thomas Mag. p. 384, 8.

V. 126 f. Eust. Il. p. 172, 43.

V. 210 Schol. Eur. Rhes. 430.

V. 222 Choricius Gaz. p. 13.

V. 224 Aristot. Eth. Eudem. p. 1235, 16.

V. 226 Georg. Pachym. ed. Boiss. p. 17.

V. 246 Choricius Gaz. p. 151.

V. 254 Sextus Empir. p. 244, 11. 245, 14 ed. Bekk.

V. 262 Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 57.

V. 304 Schol. Eur. Phoen. 361.

V. 313 Thomas Mag. p. 232, 7.

V. 315 vgl. Iulian p. 336 B.

1) Die ebenda geäusserte Vermuthung über Herc. Fur. 1302, βίοτον ἀχρεῖον, habe ich ebenfalls gemacht, und zwar in beiden Teubnerschen Ausgaben. Wenn Kirchhoff sie in seiner Ausgabe nicht erwähnt hat, so mag ich darüber nicht mit ihm rechten; aber höchst voreilig scheint es mir, wenn ein *nescio quis* meinte, diejenigen Vermuthungen von mir, welche Kirchhoff ignorirt hat, seien eben darum willkürlich oder unhaltbar. Die auf ἀχρεῖον folgenden Worte ἀνόσιον κεκτημένοι ändert Meineke in κἀνόσιον ἐκτημένοι. Allerdings ist die Copula nothwendig; aber es war vielmehr zu verbessern

βίοτον ἀχρεῖον ἀνόσιόν τ' ἐκτημένοι.

Diese Aenderung ist leichter als Meinekes Vorschlag und in rhythmischer Hinsicht gefälliger.

V. 341 Schol. Hom. Od. p. 756 ed. Dind.
V. 351 Etym. M. p. 382, 36.
V. 372 Thomas Mag. p. 187, 6.
V. 389 Synesius p. 132 D.
V. 405 Schol. Eur. Hec. 257. Nicephorus Basil. Rhet. vol. 1 p. 466.
V. 412 Doxopater Rhet. vol. 2 p. 291.
V. 427 Thomas Mag. p. 355, 1.
V. 479 Tzetzes Epist. p. 13 ed. Pressel.
V. 542 Thom. Mag. p. 156, 6.
V. 547 Clemens Alex. Strom. II p. 505.
V. 548 f. Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 70.
V. 563 Thomas Mag. p. 150, 3.
V. 572 Thomas Mag. p. 85, 7.
V. 578 f. Schol. Eur. Phoen. 4.
V. 591 Thomas Mag. p. 266, 15.
V. 614 Eust. Il. p. 58, 11.
V. 631 Clemens Alex. p. 465. Theodorus Hyrtac. Epist. 55. 74 in *Notices et Extr.* VI p. 19. 35.
V. 637 Schol. Dionys. Thr. p. 744, 6.
V. 659—61 vgl. Constantinus Manass. fr. 3, 43 ed. Boiss.
V. 660 Thomas Mag. p. 395, 13.
V. 669 vgl. Lutatius in Stat. Theb. 5, 163 p. 171 ed. Lind.
V. 678 Choerob. in Theodos. p. 899, 20.
V. 687 f. Cyrillus c. Iulian. IX p. 308 A. Didymus de trinit. 1, 36 p. 105.
V. 698 Schol. Eur. Phoen. 584.
V. 699 f. vgl. Theodorus Hyrtac. bei Boisson. Anecd. II p. 432.
V. 754 vgl. Phot. Lex. p. 475, 24.
V. 858 Alcaeus Com. 2 p. 830.
V. 895 Pollux 6, 119.
V. 903 Thomas Mag. p. 60, 11.
V. 911 vgl. Georgius Pachym. p. 230 ed. Boiss.
V. 914 vgl. Georgius Pachym. p. 165. Aristaenet. p. 166.
V. 928 Thomas Mag. p. 382, 6.
V. 935 Pseudo-Callisth. p. 29 not.
V. 1000 Anecd. Bachm. vol. 1 p. 237, 17.
V. 1038 Thomas Mag. p. 138, 16.
V. 1115 Schol. Eur. Andr. 133. Didymus de trin. 2, 6 p. 166.
V. 1136 vgl. ξυναόρων· ἀνδρῶν Hesychius vol. 2 p. 707.
V. 1137 Eust. Il. p. 245, 8.

V. 1166 Pseudo-Herodian Rhet. vol. 8 p. 601 n.
V. 1177 vgl. ἀδαπάνως· λιτῶς Hesychius.
V. 1190 Eust. Il. p. 4.
V. 1234 Schol. Epictet. p. 220 ed. Heyn.
V. 1281 Gramm. Darmstad. in Greg. Cor. p. 909 ed. Schäf.
V. 1376 f. Etym. M. p. 145, 26.
V. 1529 Thomas Mag. p. 76, 3.
V. 1536—38 Schol. Eur. Orest. 1169.
V. 1631 Eust. Il. p. 283, 7.

---

3. Phoenissae.

Der Prolog geht zurück auf Cadmus, den Ahnherrn der Labdaciden, von dem es V. 7 heisst:

ὃς παῖδα γήμας Κύπριδος Ἁρμονίας ποτὲ
Πολύδωρον ἐξέφυσε, τοῦ δὲ Λάβδακον
φῦναι λέγουσιν, ἐκ δὲ τοῦδε Λάϊον.

Die Vermählung des Cadmus mit der Harmonia wird durch ποτέ als ein Act des Zufalls bezeichnet, bei dem man nicht weiter wisse wodurch er bedingt sei; wie unpassend dies ist, wird jeder fühlen. Vermuthlich schrieb Euripides γόνον Πολύδωρον ἐξέφυσε. Ueber die Verwechslung von γόνος und ποτέ vgl. meine Anm. zu Soph. El. 695.

ἀλλ' ὦ φαεννὰς οὐρανοῦ ναίων πτυχὰς
Ζεῦ, σῶσον ἡμᾶς.

Während bisher πτύχας geschrieben wurde, hat Kirchhoff das Oxytonon gesetzt, ohne über die handschriftliche Lesart etwas anzumerken. Welche von beiden Schreibungen die richtige sei, hat man natürlich nicht nach den Codices zu entscheiden, die dem πτύχας durchaus den Vorzug geben, sondern lediglich nach dem Gebrauche der Tragiker, der πτυχάς mit Nothwendigkeit fordert. Vgl. Elmsley zu Eur. Med. 1264. Nur einmal hat Euripides in einer Chorpartie πτύχα sich gestattet Suppl. 979. Wie die Abschreiber verfuhren, sieht man am deutlichsten aus Soph. fr. 145, wo sie schrieben γραμμάτων πτύχας ἔχων, trotz des iambischen Metrum. Dass bei Chaeremon fr. 14, 9 p. 610 zu lesen sei

ἡ δὲ ῥαγέντων χλανιδίων ὑπὸ πτυχαῖς

statt ὑπὸ πτύχας (wie die Handschriften des Athen. XIII p. 608 B bieten), habe ich schon im Philol. XII p. 192 bemerkt. Kirchhoff hat richtig πτυχάς Bacch. 938, dagegen das fehlerhafte πτύχας Andr. 1249. Suppl. 214. Iphig. Taur. 1057. Bacch. 62. Hel. 606. Herc. F. 240. Zu einer einzigen unter diesen Stellen (Hel. 606) bemerkt er "πτυχάς *Elmsleyus*", wogegen er an den übrigen trocknen Fusses vorübergeht.

*

112 οὐ γάρ τι φαύλως ἦλθε Πολυνείκης χθόνα,
πολλοῖς μὲν ἵπποις, μυρίοις δ' ὅπλοις βρέμων.

Schon das gegensätzliche βρέμων lehrt dass statt des Adverbium φαύλως hier nothwendig das Adjectivum φαῦλος herzustellen ist. In gleichem Sinne sagt Thucyd. 6, 21: φαύλου στρατιᾶς, und Xenoph. Hellen. 5, 3, 8: οὐ φαύλην πεμπτέον δύναμιν. Hiernach wird es nicht schwer sein über Rhes. 599 zu urtheilen:

ἄνδρα δ' οὐ πέπυσθε σύμμαχον
Τροίᾳ μολόντα Ῥῆσον οὐ φαύλῳ τρόπῳ;

Man braucht nur die nachfolgenden Worte anzusehen, um zu erkennen dass es sich einzig und allein um die Kriegsmacht des Rhesus handelt. Es ist klar dass diese nicht durch τρόπος bezeichnet werden kann. Ohne Zweifel ist zu verbessern οὐ φαύλῳ στόλῳ. In der obigen Stelle der Phoenissen giebt V. 113 den Gegensatz zu οὐ φαῦλος. Darum dürfte gefälliger sein:

πολλοῖσι δ' ἵπποις μυρίοις θ' ὅπλοις βρέμων.

Antigona bewundert den Hippomedon als

φοβερὸς εἰσιδεῖν,
γίγαντι γηγενέτᾳ προσόμοιος
ἀστερωπὸς ἐν γραφαῖσιν, οὐχὶ πρόσφορος
ἀμερίῳ γέννᾳ.

Um des Rhythmus willen schreibt G. Hermann nach einer Vermuthung von Seidler γίγαντί τε γηγενέτᾳ προσόμοιος. Eher möchte ich γίγαντι für eine spätere Erklärung halten. Dass γηγενέτᾳ zur Bezeichnung des Giganten genügte lehrt, wenn es eines Beispieles bedarf, Callimachus Lav. Pall. 8: λύθρῳ πεπαλαγμένα πάντα φέροισα
τείχεα τῶν ἀδίκων ἦνθ' ἀπὸ γηγενέων.

Wie nahe es lag γίγαντι hinzuzufügen, zeigt Phoen. 1131, wo γίγας γηγενής steht[1]). Die Worte ἀστερωπὸς ἐν γραφαῖσιν bezieht man nach dem Vorgange alter Erklärer auf den Schild des Hippomedon, der mit einem Ἄργος πανόπτης geschmückt war, vgl. Phoen. 1113 ff.:

Ὠγύγια δ' εἰς πυλώμαθ' Ἱππομέδων ἄναξ
ἔστειχ' ἔχων σημεῖον ἐν μέσῳ σάκει
στικτοῖς πανόπτην ὄμμασιν δεδορκότα.

Von den Augen dieses Argus heisst es an der angeführten Stelle weiter, sie hätten sich geöffnet mit dem Aufgang und geschlossen mit dem Untergang der Gestirne[2]). Wie aber soll daraus hergeleitet werden, erstens dass Hippomedon ἀστερωπός war? und zweitens dass er es ἐν γραφαῖσιν, d. h. in Gemälden war? Was ἀστερωπός bedeutet, lehrt ausser dem

1) Beiläufig bemerke ich gegen W. Dindorf im Thesaurus Gr. L. v. γηγενής, dass Methodius Conv. Virg. p. 119 D nicht μακρὰν ἀπῳκίσθαι κακίας καὶ τῶν γηγενῶν πράξεων geschrieben haben kann. Vielmehr muss es heissen κακίας καὶ τῶν γηΐνων πράξεων.

2) Wenigstens scheint dieser Sinn den allerdings dunkeln und unverständlichen Worten zu Grunde zu liegen.

Ursprunge des Wortes die Stelle des Tragikers Critias fr. 1, 33 p. 598: τό τ' ἀστερωπὸν οὐρανοῦ σέλας. Die Gestirne sind die Augen des Himmels, und somit ist der Himmel ἀστερωπός. Vgl. Eur. Ion 1078: ἀστερωπὸς αἰθήρ, und ähnliches. Das Wort γραφαί aber ist, wie Valckenaer mit Recht sagt, nirgends so viel als *pictae vestes*, und ebenso wenig kann man die *pictura clypei stelliferi* verstehen, wenn nicht eine ganz bestimmte Hinweisung auf den Schild gegeben ist. Obenein fordert der Zusammenhang dass nicht der Schild, sondern die Person des Hippomedon charakterisirt werde. Dass also ἀστερωπὸς ἐν γραφαῖσιν nicht richtig sein kann und dass mit W. Dindorfs Vermuthung ἀστρωπὸς ἐν γραφαῖσιν zwar ein Trimeter, nicht aber ein leidlicher Sinn gewonnen wird, liegt auf flacher Hand. Ich vermuthe

στερρωπὸς ὡς γραφαῖσιν,

d. h. Hippomedon hat einen festen und starren Blick, wie man ihn in Gemälden findet. Aehnlich Aesch. Agam. 241: πρέπουσα δ' ὡς ἐν γραφαῖς — ἔμελψεν. Sollte die Praeposition ἐν auch hier nöthig sein, wie bei Eur. Ion 271: ὥσπερ ἐν γραφῇ νομίζεται, so könnte man vermuthen:

στερρωπὸς ὥσπερ ἐν γραφαῖς, οὐ πρόσφορος
ἀμερίῳ γέννᾳ.

Auf die Frage der Antigona woher seine genaue Kenntniss sich schreibe, erwidert der Paedagog:

142 σημεῖ' ἰδὼν τότ' ἀσπίδων ἐγνώρισα,
σπονδὰς ὅτ' ἦλθον σῷ καταγνήτῳ φέρων·
ἃ προσδεδορκὼς οἶδα τοὺς ὡπλισμένους.

Der mittlere dieser drei Verse findet sich αὐτολεξεὶ in einer früheren Rede des Paedagogen V. 97. Daher halte ich es für unzweifelhaft dass er an der einen Stelle unecht ist, und zwar an der letzteren, wo er das auch ohne diese Erklärung verständliche τότε erläutern soll. Ganz in derselben Weise hat Hel. 388 f. das Wörtchen τότε zu einer Interpolation Anlass gegeben,

ὦ τὰς τεθρίππους Οἰνομάῳ Πῖσαν κάτα
Πέλοψ ἁμίλλας ἐξαμιλληθεὶς ποτε,
εἶτ' ὤφελες τότ' ἦνίκ' ἔρανον εἰς θεοὺς
πεισθεὶς ἐποίεις, ἐν θεοῖς λιπεῖν βίον,
πρὶν τὸν ἐμὸν Ἀτρέα πατέρα γεννῆσαί ποτε,

wo ἐν θεοῖς mit Recht von G. Hermann in εὐθέως geändert worden ist, die abgeschmackten, sprachwidrigen und sinnstörenden Worte aber, ἦνίκ' ἔρανον εἰς θεοὺς πεισθεὶς ἐποίεις, von einem Fälscher herrühren, der das τότε erklären wollte und durch das fehlerhafte ἐν θεοῖς auf eine völlig verkehrte Spur geleitet wurde. Es war zu schreiben:

εἶτ' ὤφελες τότ' εὐθέως λιπεῖν βίον,

und das τότε natürlich auf den Wettkampf in Pisa zu beziehen. Ueber den Phoenissenvers bemerkte ich bereits in der ersten Teubnerschen Ausgabe "*spurius videtur*". Diese Worte

betrachtet Kirchhoff als nicht vorhanden, wenn er sagt "*v. 142. e v. 97. huc male retractus est*", ohne des von mir ausgesprochenen Verdachtes mit einer Silbe zu gedenken.

Antigona verwünscht den Parthenopaeus; die Artemis, sagt sie V. 151—153, möge ihn verderben,

ὃς ἐπ' ἐμὰν πόλιν ἔβα πέρσων.

Das letzte Wort ist weder für den Sinn erforderlich oder angemessen, noch scheint es rhythmisch zulässig: daher dürfte es zu tilgen sein.

173 ὦ λιπαροζώνου Ϋγατερ ἀελίου
Σελαναία, χρυσεόκυκλον φέγγος.

Selbst Elmsley hat diese Stelle als Beleg dafür angeführt dass Euripides in mythologischen Dingen mannichfache Neuerungen vorgenommen habe; um so weniger wird es befremden, wenn die Schol. Arat. 455 p. 91, 20 erzählen dass die Selene παρὰ τοῖς τραγικοῖς Ἡλίου Ϋγάτηρ λέγεται, ἐπειδὴ τὸ φῶς ἐξ αὐτοῦ ἔχει. Was in den Scholien zu unserer Stelle angemerkt wird, Aeschylus und die φυσικώτεροι hätten die Selene zu einer Tochter des Helios gemacht (Aesch. fr. 445), hat an sich wenig Gewicht, da Beweisstellen nicht gegeben werden, und kann auf keinen Fall für die Beurtheilung der vorliegenden Stelle maassgebend sein. Hier hat zuerst C. Badham Iphig. Taur. praef. p. 15—17 den Fehler erkannt. Er weist darauf hin dass Antigona eine und dieselbe Göttin unter drei Namen anruft, ἰὼ πότνια παῖ Λατοῦς Ἑκάτα V. 109 f., ἁ κατ' ὄρη μετὰ ματέρος Ἄρτεμις ἱερένα V. 151 f. und endlich hier Σελαναία, somit unter Namen die genau entsprechend sind den Attributen des Sonnengottes, Ἕκατος Ἀπόλλων Ἥλιος. Er findet es mit Recht unglaublich dass Antigona, nachdem sie oben der üblichen Genealogie gefolgt, hier plötzlich abspringen und statt des Zeus den Helios als Vater der Göttin bezeichnen soll. Besonders aber, meint er ganz richtig, fällt dies ins Gewicht dass ein Epitheton λιπαρόζωνος, ebenso wie βαΰζωνος, εὔζωνος, καλλίζωνος, sich nur für eine Frau, nicht aber für den Sonnengott schickt. Hiernach muss statt ἀελίου eine Göttin substituirt werden, "*eague alia non potest esse quam Lunae mater. Legendum igitur,* ὦ λιπαροζώνου Ϋγατερ ΛΑΤΟΥCCΕλαναία, *quod quam facile in* Ϋγατερ ΑΛΙΟΥCΕλαναία *corrumpi potuerit, ipsi oculi testantur*". Nur in einer Kleinigkeit glaube ich von Badhams höchst glücklicher Verbesserung abweichen zu müssen; des dochmischen Metrum wegen schreibe ich Ϋγατερ ἁ Λατοῦς.

183 κεραύνιόν τε φῶς αἰθαλόεν, σύ τοι —.

Das nach den vorhergehenden Worten zu erwartende dochmische Maass ist herzustellen mit der leichten Aenderung κεραυνῶν τε φῶς.

οὐ γὰρ ἄδικον
εἰς ἀγῶνα τόνδ' ἔνοπλος ὁρμᾷ παῖς,
260 ὃς μετέρχεται δόμους.

V. 259 enthält, mit dem strophischen Verse

τᾶς κερασφόρου πέφυκεν Ἰοῦς

verglichen, eine Silbe zu viel, und man hat darum nach der Vermuthung eines Byzantinischen Corrector das Wort παῖς einfach getilgt. Wahrscheinlicher als diese Tilgung dürfte die Annahme sein dass ehemals folgendes überliefert war:

οὐ γὰρ ἄδικον
εἰς ἀγῶνα τόνδ' ἔνοπλος ὁρμᾷ
παῖς μετέρχεται δόμους.

So würde sich leicht erklären, wie man durch Hinzufügung des Relativpronomen der Construction aufzuhelfen suchte, während wenn ὁρμᾷ ὃς μετέρχεται δόμους gegeben war, vor ὃς jedes andere Substantivum eher eingeschaltet worden wäre als das gewählte παῖς. Ist aber meine Vermuthung begründet, so kann die Heilung nicht länger zweifelhaft sein; es muss heissen

οὐ γὰρ ἄδικον
εἰς ἀγῶνα τόνδ' ἔνοπλος ὁρμῶν
παῖς μετέρχεται δόμους.

Denn ὁρμᾶι und ὁρμῶν kommt sich sehr nahe. Vgl. ἔνοπλος ὁρμήσας Orest. 1289.

295 ἔβας ἔβας ὦ χρόνῳ γᾶν πατρῴαν.

In den Handschriften F*C* findet sich ἔβας nur einmal, und gewiss ist diese Lesart die richtige. Wir bekommen dadurch drei Bacchien,

ἔβας ὦ χρόνῳ γᾶν πατρῴαν,

die dem oben zu Orest. 1295 besprochenen Gesetze entsprechen. Es wäre abergläubisch, wenn jemand dies für zufällig halten wollte.

ἔρημον πατρῷον ἔλιπες δόμον,
φυγὰς ἀποσταλεὶς ὁμαίμου λώβᾳ,
320 ἢ ποξεινὸς φίλοις,
ἢ ποξεινὸς Θήβαις.

Die beiden letzten Verse sind unmetrisch, und es lässt sich nicht mit Sicherheit sagen, welches Maass sie ursprünglich hatten. Geel will cretici herstellen und setzt darum ἢ ποξεινὸς πέλει. Seidler tilgt das ἢ zu Anfang beider Verse, um Dochmien zu gewinnen. Am liebsten würde ich setzen

ποξεινὸς φίλοισιν, ποξεινὸς δὲ Θήβαις.

324 ἄπεπλος φαρέων λευκῶν, τέκνον,

Sicherlich war der Vers ein dochmischer Dimeter. Darum habe ich ehemals vorgeschlagen ἄπεπλος, τέκνον, λευκῶν φαρέων. Weit einfacher ist jedoch die Vermuthung von Kirchhoff oder vielmehr von W. Dindorf, ἄπεπλος φαρέων λευκῶν, ὦ τέκνον, wo φαρέων als Iambus zu

messen ist. Bekanntlich schwankt die Quantität des Substantivum φᾶρος oder φάρος, und bei Euripides finden sich beide Formen.

ἐγὼ δ' οὔτε σοι πυρὸς ἀνῆψα φῶς
νόμιμον ἐν γάμοις,
ὡς πρέπει ματέρι μακαρίᾳ.

Die Worte νόμιμον ἐν γάμοις und ὡς πρέπει ματέρι μακαρίᾳ machen in dieser Verbindung den Eindruck einer Ueberladung. Ohne Zweifel ist ὡς πρέπει eine Interpretation, die dazu dienen sollte den Dativ ματέρι μακαρίᾳ, dessen Abhängigkeit von νόμιμον man übersah, zu rechtfertigen. Tilgen wir dies ὡς πρέπει, so ist zugleich das Metrum in Ordnung gebracht,

ἐγὼ δ' οὔτε σοὶ πυρὸς ἀνῆψα φῶς,
νόμιμον ἐν γάμοις ματέρι μακαρίᾳ,

und gerade hierin liegt eine nicht zu übersehende Stütze für die ausgesprochene Vermuthung. Eine andere Art die Dochmien herzustellen scheint an die Hand gegeben zu werden durch das Citat in den Schol. Apoll. Rhod. 4, 808, wo ὡς πρέπει sich findet, dagegen ἐν γάμοις fehlt. Indess ist auf dies Citat kein Gewicht zu legen, da ἐν γάμοις durch Plutarch Mor. p. 606 F und durch die Mediceischen Scholien zu Aesch. Sept. 103 hinlänglich bezeugt ist.

Polynices beklagt sich dass er von allem was in der Heimath ihm theuer war getrennt und zum Aufenthalt in der Fremde verurtheilt sei,

ὧν οὐ δικαίως ἀπελαθεὶς ξένην πέλιν
ναίω δι' ὄσσων ὄμμ' ἔχων δακρυρροοῦν.

Musgraves Vermuthung δι' ὄσσων ν' ἄμ' ἔχων δακρυρροοῦν, die den Beifall der meisten neueren Herausgeber gefunden hat, ist zwar palaeographisch sehr leicht, aber von Seiten des Sinnes völlig zu verwerfen, wie Badham Iphig. Taur. 363 richtig urtheilt. Wie jemand δι' ὄσσων ὄμμα für möglich halten kann, ist mir räthselhaft, und ich glaube, Valckenaer hatte vollkommen Recht, wenn er statt δι' ὄσσων ein Adjectivum forderte. Seine Vermuthung ξένην πόλιν ναίων, ἀειδὲς ὄμμ' ἔχω (oder ναίω κατηφὲς ὄμμ' ἔχων) δακρυρροοῦν ist indess etwas sehr gewagt. Was neuerdings ein Gelehrter vorschlug, ναίω τὸ δισσὸν ὄμμ' ἔχων δακρυρροοῦν, ist auch mir in den Sinn gekommen; nur glaubte ich dass daraus die jetzige Lesart sich nicht leicht erklären lasse und dass man sich der Ueberlieferung genauer anschliessen könne mit der Aenderung

ναίω δίοσσον ὄμμ' ἔχων δακρυρροοῦν.

Die Ausdrucksweise δίοσσον ὄμμα (dem Sinne nach so viel als δισσὸν ὄμμα) ist zwar unbezeugt, aber durch vielfältige Analogieen hinreichend gesichert. Vgl. ὄμματα σκληρόφθαλμα Aristot. Hist. anim. 4, 2 p. 526, 8. εὐωπροτέρους ὀφθαλμούς Aelian Hist. anim. 5, 47. κόρος μονόπαις Eur. Alc. 904. βαθύχθον' αἶαν Aesch. Sept. 306 und ähnliches bei Lobeck Paral. p. 371 f., besonders aber πυκνοφθάλμους κόρας Trag. adesp. 458, 14.

386 ἃ γὰρ σὺ βούλει, ταῦτ' ἐμοί, μῆτερ, φίλα.

Statt ταῦτ' habe ich ταὔτ' vorgezogen. Sollte die gewöhnliche Schreibung passend sein, so würde es heissen müssen ταῦτα κἀμοὶ φίλα.

In dem Zwiegespräche zwischen Iocasta und Polynices müssen, wie ich glaube, die Verse 402 und 403 mit den beiden zunächst folgenden ihre Stelle wechseln, so dass man liest:

400 ΙΟ. πόθεν δ' ἐβόσκου πρὶν γάμοις εὑρεῖν βίον;
ΠΟ. ποτὲ μὲν ἐπ' ἦμαρ εἶχον, εἶτ' οὐκ εἶχον ἄν.
404 ΙΟ. οὐδ' ηὐγένειά σ' ἦρεν εἰς ὕψος μέγα;
403 ΠΟ. κακὸν τὸ μὴ ἔχειν· τὸ γένος οὐκ ἔβοσκέ με.
402 ΙΟ. φίλοι δὲ πατρὸς καὶ ξένοι σ' οὐκ ὠφέλουν;
403 ΠΟ. εὖ πρᾶσσε· τἀ φίλων δ' οὐδέν, ἢν τις δυστυχῇ.

Es scheint mir klar dass diese Anordnung die allein angemessene ist. Wenn Iocasta bereits gehört hat dass sogar die Freunde und Gastfreunde des Oedipus ihren Sohn im Stich liessen (V. 403), so kann sie unmöglich noch erwarten dass die vornehme Geburt dem Polynices zu Statten gekommen sei. Nach der von mir vorgenommenen Umstellung schliessen sich auch die folgenden Worte passender an,

ΙΟ. ἡ πατρίς, ὡς ἔοικε, φίλτατον βροτοῖς.
ΠΟ. οὐδ' ὀνομάσαι δύναι' ἂν ὡς ἐστὶν φίλον,

wo übrigens φίλη nothwendig zu sein scheint. V. 403 ist statt ἤν τις δυστυχῇ ohne Zweifel mit Elmsley Review of Porson's Hecuba p. 79 zu lesen ἤν τι δυστυχῇς, vgl. Suppl. 897: χώπότ' εὖ πράσσοι πόλις, ἔχαιρε· λυπρῶς δ' ἔφερεν, εἴ τι δυστυχοῖ. Die Elmsleysche Verbesserung wird bestätigt durch Maximus Planudes Rhet. V p. 422, und eben dahin führt die Lesart ἤν (oder εἰ) σὺ δυστυχῇς Append. Proverb. 2, 90 und Macar. 4, 22.

417 ἦν ταῦτα· κᾆτά γ' ἦλθεν ἄλλος αὖ φυγάς.

Die Betonung des εἶτα, welche durch γε bedingt wird, ist hier durchaus ungehörig; auch die von alten Abschreibern versuchte Correctur κᾆτα δ' ἦλθεν ("und auch dann kam") taugt nichts. Vermuthlich ist κᾆτ' ἐπῆλθεν das ursprüngliche. Aus der alten Schreibung κἄιτα ἐπῆλθεν oder κἄιτα 'πῆλθεν ist die handschriftliche Lesart leicht zu erklären[1]).

1) Für die Kritik ist es nicht unwichtig das Schwanken der Abschreiber in Bezug auf die zu elidirenden Vocale sich immer gegenwärtig zu halten. Vgl. Phrynichus Com. 2 p. 606 bei Hephaest. p. 72, 12:

ἃ δ' ἀνάγκα 'σθ' ἱερεῦσιν καθαρεύειν φράσομεν.

Mit Recht nahm Bergk Anstoss an der dorischen Form ἀνάγκα in ionischen Versen; seine Aenderung ἀνάγκη hat jedoch keine Wahrscheinlichkeit. Es war vielmehr zu Gunsten des Sinnes zu schreiben:

ἃ δ' ἄναγν' ἔσθ' ἱερεῦσιν καθαρεύειν φράσομεν,

d. h. die Priester sollen καθαρεύειν τῶν ἀνάγνων. Die handschriftliche Lesart ἃδ' ἀνάγκας σ' ἱερεῦσιν findet ihre Erklärung in der Schreibung ἄναγνά 'σθ' ἱερεῦσιν. Bei Soph. Trach. 79 ff. glaube ich richtig hergestellt zu haben:

ὡς ἢ τελευτὴν τοῦ βίου μέλλει περᾶν,
ἢ τοῦτ' ἀνατλὰς βίοτον εὐδαίων' ἕξειν.

Der Lesefehler τουτονατλας (statt τοῦτο 'νατλὰς) veranlasste die unmetrische Conjectur τοῦτον ἄρας ἄξλον, und da man mit dem siebenfüssigen Trimeter nicht fertig zu werden wusste, so substituirte man zwei sechsfüssige:

435 ἀλλ' εἰς σὲ τείνει τῶνδε διάλυσις κακῶν,
μῆτερ, διαλλάξασαν ὁμογενεῖς φίλους,
παῦσαι πόνων με καὶ σὲ καὶ πᾶσαν πόλιν.

Schon früher habe ich φίλους als verdächtig bezeichnet, und jeder wird zugestehen dass diese Benennung der feindlichen Brüder die unpassendste ist deren sich jemand bedienen konnte. Der ganze Vers scheint unecht zu sein und lediglich veranlasst durch ein zu εἰς σὲ als Erklärung hinzugefügtes μῆτερ.

Zu V. 439 f. führt Kirchhoff die auffallende Abweichung an, welche sich bei Plutarch Mor. p. 497 B findet, τὸ δὲ ὑπὸ Εὐριπίδου λεγόμενον, τὰ χρήματ' ἀνθρώποισιν εὑρίσκειν φίλους δύναμίν τε πλείστην τῶν ἐν ἀνθρώποις ἔχειν. Zur Würdigung dieser scheinbaren Variante musste nothwendiger Weise hinzugefügt werden dass Plutarch einen leicht erklärlichen Gedächtnissfehler begangen hat, indem er die Stelle der Phoenissen mit Soph. fr. 86 confundirte. In ähnlicher Weise irrt Plutarch Mor. p. 64 C, wenn er den Vers anführt:

συσσωφρονεῖν γάρ, οὐχὶ συννοσεῖν ἔφυν,

wobei ihm einerseits Eur. Iphig. Aul. 407 vorschwebte, συσσωφρονεῖν σοι βούλομ' ἀλλ' οὐ (vermuthlich βούλομαι κοὐ) συννοσεῖν, andrerseits Soph. Ant. 523: οὗτοι συνέχθειν ἀλλὰ συμφιλεῖν ἔφυν. Dieser zuletzt erwähnte Gedächtnissfehler des Plutarch war mit Unrecht in die Euripideischen Ausgaben eingedrungen.

446 μῆτερ, πάρειμι· τὴν χάριν δὲ σοὶ διδοὺς
ἦλθον. τί χρὴ δρᾶν; ἀρχέτω δέ τις λόγου.

Wenn Eteocles mit diesen Worten auftritt, so sollte man meinen er werde nun warten bis jemand zu sprechen anhebt. Statt dessen fährt er selbst fort zu reden und muss erst durch das Eingreifen der Mutter, ἐπίσχες· οὗτοι τὸ ταχὺ τὴν δίκην ἔχει κτέ. (V. 452 ff.), zur Ruhe gebracht werden. Ferner sollte man aus der Frage τί χρὴ δρᾶν; den Schluss ziehen, Eteocles wisse noch nicht zu welchem Zweck Iocasta ihn herbeschieden habe: sofort aber zeigt Eteocles dass er davon hinlänglich unterrichtet ist. Der höchst unpassende Vers,

ἦλθον. τί χρὴ δρᾶν; ἀρχέτω δέ τις λόγου,

ist sicherlich eine fremde Zuthat, veranlasst durch eine leichte Entstellung der vorhergehenden Worte. Es ist mit Tilgung des anstössigen Verses zu verbessern:

μῆτερ, πάρειμι τήνδε σοὶ χάριν διδούς.

Nachdem dies in τὴν δὲ χάριν σοὶ διδούς übergegangen war (τήνδε und τὴν δὲ gilt den Abschreibern gleich viel), suchte man dem Metrum mit der Correctur τὴν χάριν δὲ σοὶ διδούς aufzuhelfen und sah sich in die Nothwendigkeit versetzt zu dem Participium διδούς ein

---

ἢ τοῦτον ἄρας ἄλλον εἰς τὸν ὕστερον
τὸν λοιπὸν ἤδη βίοτον εὐαίων' ἔχειν.

Ueber ἀνατλάς vgl. Eur. Phoen. 60: ὁ πάλλ' ἀνατλὰς Οἰδίπους παθήματα, und Herc. Fur. 1250: ὁ πάλλ' ἀνατλὰς Ἡρακλῆς λέγει τάδε; denn so ist statt des ganz unpassenden ὁ πολλὰ δὴ τλὰς zu schreiben.

Verbum finitum ἦλθον und diesem ἦλθον zu Gefallen einen vollständigen Vers zu ergänzen. — In der weiteren Rede des Eteocles,

ὡς ἀμφὶ τείχη καὶ ξυνωρίδας λόχων
τάσσων ἐπέσχον πόλιν, ὅπως κλύοιμί σου
κοινὰς βραβείας,

kann πόλιν unmöglich richtig sein, trotz des Stillschweigens von Kirchhoff und anderen Herausgebern. Es wäre eine harte oder vielmehr eine alberne Zumuthung an das Attische Publicum gewesen, wenn Euripides verlangt hätte die Zuhörer sollten ἀμφὶ τείχη καὶ πόλιν verbinden. Dass mit den Vermuthungen πάλιν oder μόλις der Stelle aufgeholfen sei, kann ich nicht glauben; auch die Worte καὶ ξυνωρίδας λόχων scheinen einen Fehler zu enthalten.

Nachdem Polynices seine Rede mit dem goldenen Spruch eröffnet hat, dass das Wort der Wahrheit einfach sei und nur die ungerechte Sache künstlicher Mittel bedürfe, geht er über auf seine Lage:

ἐγὼ δὲ πατρὸς δωμάτων προυσκεψάμην
τοὐμόν τε καὶ τοῦδ', ἐκφυγεῖν χρῄζων ἀράς,
ἃς Οἰδίπους ἐφῆγξατ' εἰς ἡμᾶς ποτε,
ἐξῆλθον ἔξω τῆσδ' ἑκὼν αὐτὸς χθονός.

Den Gesetzen der Einfachheit ist, wie es scheint, in den ersten Worten sehr wenig genügt; wenigstens gehen die Erklärungsversuche der neueren Gelehrten weit aus einander. Valckenaer sagt: *ego domui paternae meum et huiusce commodum praetuli.* Klotz: *ego vero paternae domui prospexi et meam et tuam vicem.* G. Hermann: *paternae domus meo et illius iuri prospexi.* Geel, der δεμάτων statt δωμάτων verlangt: *ego vero, quantum ad me et fratrem attinet, minas patris cavi.* Annehmbarer als diese geschraubten, willkürlichen und hinkenden Interpretationen wäre die Musgravesche Uebersetzung, *ego domui patris prospexi, et meo pariter commodo ac huius*, wenn nicht zwei Bedenken einträten: erstens verlangt προσκοπεῖν (denn zu diesem Praesens gehört der Aorist προσκέψασθαι) den Accusativ, und zweitens wäre es doch gar zu auffallend, wenn das Bemühen des Polynices dem Fluche des Vaters zu entgehen als eine Fürsorge für das Haus des entthronten Vaters bezeichnet würde. Man kann gegenüber der bunten Meinungsverschiedenheit über die in Rede stehenden Verse nicht umhin an V. 470 zu erinnern:

οὐ ποικίλων δεῖ τἀνδιχ' ἑρμηνευμάτων.

Alles würde ohne Anstoss sich lesen lassen, wenn wir nur folgende Worte vor uns hätten:

ἐγὼ δὲ πατρὸς ἐκφυγεῖν χρῄζων ἀράς,
ἐξῆλθον ἔξω τῆσδ' ἑκὼν αὐτὸς χθονός.

Mit dieser ehemals von mir versuchten Reinigung des Textes ist jedoch die Frage, wie die Worte δωμάτων — τοῦδ' in den Text kamen, nicht beantwortet, und aus diesem Grunde muss jener Versuch als höchst bedenklich erscheinen. Möglich dass V. 473 und 474 ehemals so lauteten:

ἐγὼ δὲ πατρὸς ἐκφυγεῖν χρῄζων ἀρὰς
τοὐμόν τε καὶ τὸ τοῦδ' ὁμῶς προυσκεψάμην.

Nach einer früheren Bemerkung (S. 6) wird man es nicht unglaublich finden dass in Folge einer Vertauschung der Versenden daraus entstehen konnte:

ἐγὼ δὲ πατρὸς ὁμῶς προυσκεψάμην
τοὐμόν τε καὶ τὸ τοῦδ' ἐκφυγεῖν χρῄζων ἀράς,

und in diesem Falle würde die Aenderung von ὁμῶς in δωμάτων wie das Weglassen des τὸ sehr erklärlich sein. Der Vers

ἃς Οἰδίπους ἐφῆκέ γ' εἰς ἡμᾶς ποτε

ist, sobald man die nothwendig zusammenzunehmenden Worte πατρὸς ἐκφυγεῖν χρῄζων ἀρὰς verbindet, vollkommen entbehrlich, und unter allen Umständen erscheint ποτέ als unpassend hier so gut wie oben V. 7.

Auch die nächsten Worte des Polynices scheinen von fremder Hand einen lästigen Anhang bekommen zu haben:

ἐξῆλθον ἔξω τῆσδ' ἐκὼν αὐτὸς χθονός,
δοὺς τῷδ' ἀνάσσειν πατρίδος ἐνιαυτοῦ κύκλον,
ὥστ' αὐτὸς ἄρχειν αὖτις ἀνὰ μέρος λαβὼν
καὶ μὴ δι' ἔχθρας τῷδε καὶ φόνου μολὼν
480 κακόν τι δρᾶσαι καὶ παθεῖν, ἃ γίγνεται.

Der letzte Vers würde besser fehlen; die Worte ἃ γίγνεται lassen sich nur durch den Verszwang erklären, der sechs Füsse forderte; für den Sinn muss ich sie als geradezu störend bezeichnen, da sie dasjenige was Polynices meiden wollte, als etwas im Leben gewöhnliches, gleichsam selbstverständliches darstellen. Der Interpolator verkannte dass in den von ὥστε abhängigen Worten die Participia λαβών und μολών am meisten zu betonen sind. Wir würden sagen: "unter der Bedingung dass ich meines Theils die Regierung von ihm bekäme, ohne in Hass und blutigen Kampf mit ihm zu gerathen".

491 μάρτυρας δὲ τῶνδε δαίμονας καλῶ,
ὡς πάντα πράσσων σὺν δίκῃ, δίκης ἄτερ
ἀποστεροῦμαι πατρίδος ἀνοσιώτατα.

Nach καλῶ hat Kirchhoff den Ausfall eines Verses durch Punkte bezeichnet und sodann V. 492 καὶ πάντα mit AB statt ὡς πάντα geschrieben. Wenn das Ansetzen der Lücke sich lediglich auf die Lesart καὶ πάντα gründet, so beruht es auf einer äusserst schwachen Stütze; denn καὶ und ὡς unterliegen beständig der Verwechslung.

ἄστρων ἂν ἔλθοιμ' ἡλίου πρὸς ἀντολὰς
505 καὶ γῆς ἑνερθε, δυνατὸς ὢν δρᾶσαι πάθε,
τὴν θεῶν μεγίστην ὥστ' ἔχειν τυραννίδα.

Was die Worte ἄστρων ἡλίου πρὸς ἀντολάς bedeuten, ist nicht leicht zu sagen. G. Her-

mann verstand πρὸς ἀστερούσσας ἡλίου ἀνατολάς, Klotz konnte meinen dem Dichter habe vorgeschwebt ἄστρων ἂν ἔλθοιμ' ἄνω καὶ γῆς ἑνέρτε, den Begriff ἄνω aber habe er umschrieben mit ἡλίου πρὸς ἀντολάς. Hartung, der das schlecht verbürgte αἰθέρος statt ἡλίου wieder in den Text gebracht hat, übersetzt:

Bis an des Himmels Sternen-Aufgang dräng' ich hin,

ohne auch nur anzudeuten, was er unter dem räthselhaften "Sternen-Aufgange des Himmels" gedacht wissen will. Ueberhaupt können die angeführten Erklärungen auf eine Widerlegung keinen Anspruch machen, und die Verbindung ἄστρων ἡλίου πρὸς ἀντολάς scheint absolut unerklärbar und folglich bei einem Dichter wie Euripides undenkbar zu sein. Geel billigt die Vermuthung von Pierson,

οἰστρῶν ἂν ἔλθοιμ' ἡλίου πρὸς ἀντολάς,

die ich für entschieden misslungen halte, weil οἰστρῶν einen ekstatischen Zustand bezeichnen würde, ein Hingerissenwerden, bei dem man seiner selbst nicht mächtig ist. Kirchhoff ändert im vorhergehenden Verse ἐγὼ δέ σ' οὐδέν statt ἐγὼ γὰρ οὐδέν, nicht weil γάρ dort unpassend wäre, sondern weil er γάρ hierher zu bringen wünscht, und er wünscht γάρ hierher zu bringen, weil er ἄστρων in ἄστρα ändern möchte und ohne ein γάρ mit dem Metrum nicht in Ordnung zu kommen weiss. Er schreibt nämlich:

ἄστρ' ἂν γὰρ ἔλθοιμ' ἡλίου πρὸς ἀντολάς.

Ständen diese Worte auch in allen Handschriften, sie würden nach der Stellung des ἄν als fehlerhaft zu bezeichnen sein. Wollte Kirchoff ἄστρα setzen, so würde er besser gethan haben vorzuschlagen

ὡς ἄστρ' ἂν ἔλθοιμ' ἡλίου πρὸς ἀντολάς.

Aber damit wäre wenig gewonnen; denn statt ἄστρα ἡλίου πρὸς ἀντολάς musste doch gesagt werden ἄστρα καὶ ἡλίου πρὸς ἀντολάς, und eben nur die Copula ist es welche in der überlieferten Lesart vermisst wird. Wenn es hiesse ἄστρων καὶ ἡλίου πρὸς ἀντολάς, so wäre von Seiten des Sinnes die Stelle in Ordnung. Hiernach wird zu lesen sein entweder

ἄστρων ἂν ἔλθοιμ' ἡλίου τ' ἐς ἀντολάς,
oder ἄστρων ἂν ἔλθοιεν χἡλίου πρὸς ἀντολάς.

Der letzten Vermuthung gebe ich den Vorzug, weil sie eine geringere Aenderung verlangt und, was besonders wichtig ist, den Anlass der Verderbniss ohne weiteres erklärt. Ueber die fast durchgängig von den Abschreibern verwischte Optativendung —οιεν statt —οιμι vgl. meine *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 51 f.

526 οὐκ εὖ λέγειν χρὴ μὴ ἐπὶ τοῖς ἔργοις καλοῖς·
οὐ γὰρ καλὸν τοῦτ', ἀλλὰ τῇ δίκῃ πικρόν.

G. Hermann giebt die Erklärung, οὐ χρὴ εὖ λέγειν μὴ ἐπὶ τοῖς ἔργοις καλοῖς οὖσι: *non oportet pulcris verbis uti, nisi quum res honestae sunt.* Wie dieser Sinn in dem jetzt vorliegenden Texte enthalten sein kann, ist mir räthselhaft; weder scheint μή hier erklärbar, noch halte

ich die Stellung von καλοῖς für gerechtfertigt. Das Citat des Iohannes Damasc. in Stob. Ecl. p. 717, 28 ed. Gaisf. hilft den Schwierigkeiten nicht ab. Ich vermuthete

οὐκ εὖ λέγειν χρῆν, εἴ τι τῶν ἔργων κακόν.

Vielleicht wissen andere ein leichteres Mittel der Heilung.

Iocasta sucht dem Eteocles darzuthun dass er einem Scheinglück nachjage, wenn er der Herrschaft einen so überschwänglichen Werth beilege:

531 περιβλέπεσθαι τίμιον; κενὸν μὲν οὖν.
ἢ πολλὰ μοχθεῖν πόλλ' ἔχων ἐν δώμασι
βούλει; τί δ' ἔστι τὸ πλέον; ὄνομ' ἔχει μόνον.

Die Worte πόλλ' ἔχων ἐν δώμασι sind unbestimmt, da jemand viel Gutes und auch viel Kreuz und Elend im Hause haben kann, hier aber die Bezeichnung grosser Glücksgüter durch den Gegensatz πολλὰ μοχθεῖν nothwendig gefordert wird. Sodann ist ἐν δώμασι nicht einmal passend, sofern die Macht und der Besitz gerade eines Herrschers weit hinausreicht über die engen Gränzen seines Hauses oder Palastes. Beiden Uebelständen hilft die Vermuthung πόλλ' ἔχων εὐδαίμονα, die durch einige ähnliche Stellen empfohlen und bis zur Evidenz bestätigt wird. Vgl. Eur. Suppl. 577, wo auf den Vorwurf des Heroldes,

πράσσειν σὺ πόλλ' εἰωθὰς ἥ τε σὴ πόλις,

die Antwort des Theseus erfolgt:

τοιγὰρ πονούσῃ πολλὰ πόλλ' εὐδαίμονα.

Denn so ist mit Hilfe des Palatinus zu verbessern, während gewöhnlich τοιγὰρ πονοῦσα πολλὰ πόλλ' εὐδαιμονεῖ gelesen wird. Hipp. 1096: ὦ πέδον Τροιζήνιον, ὡς ἐγκαθηβᾶν πόλλ' ἔχεις εὐδαίμονα.

535 οὗτοι τὰ χρήματ' ἴδια κέκτηνται βροτοί,
τὰ τῶν θεῶν δ' ἔχοντες ἐπιμελούμεθα·
ὅταν δὲ χρήζωσ', αὖτ' ἀφαιροῦνται πάλιν.
ὁ δ' ὄλβος οὐ βέβαιος, ἀλλ' ἐφήμερος.

Diese Verse stehen mit der Gedankenreihe der bisherigen Rede der Iocasta wie mit der unmittelbar darauf folgenden Sentenz, ἐπεὶ τά γ' ἀρκοῦντ' ἱκανὰ τοῖς γε σώφροσιν, in einem so laxen Zusammenhange, dass ich nicht umhin kann sie für eine unzeitige Reminiscenz eines Lesers oder Abschreibers zu halten. Der letzte Vers ist schon von andern als verdächtig bezeichnet worden. Vorher ist wohl zu lesen

ὅταν δὲ χρήζωσ', ἀνταφαιροῦνται πάλιν.

636 ἔξεστι χώρας· ἀληθῶς δ' ὄνομα Πολυνείκην πατὴρ
ἔθετό σοι θείᾳ προνοίᾳ νεικέων ἐπώνυμον.

Statt des handschriftlichen ἐπώνυμον, das von Eust. Il. p. 776, 52 bestätigt wird, hat Kirchhoff φερώνυμον geschrieben, weil ein Scholion sagt: παρετυμολογεῖ τὸ ὄνομα Πολυνείκους ὄνομα νεικέων φερώνυμον. Das Wort φερώνυμος ist ausserordentlich häufig bei Byzantinischen

Schriftstellern, in der Alexandrinischen Zeit findet es sich zuweilen; vor Alexander ist dagegen nicht ein einziges Beispiel nachweisbar, sondern die classische Zeit gebraucht dafür ἐπώνυμος. Aus der Erklärung der Scholien ist für unsere Stelle nicht einmal die Variante φερώνυμον zu entnehmen; noch viel weniger könnte φερώνυμον, wenn es als Variante existirte, für richtig gelten. Den Fehler des ersten Verses hat man durch die aus schlechten Handschriften gezogene Correctur ἔξιθ' ἐκ χώρας zu beseitigen gesucht. Kirchhoff will lieber ἔξιθ' οὖν χώρας, und Kayser in den Neuen Jahrb. für Philol. und Paed. LXXV p. 130 hat nicht ermangelt pflichtschuldigst beizustimmen. Dass die Aenderung ἔξιθ' οὖν χώρας leichter sei als ἔξιθ' ἐκ χώρας wird niemand behaupten; ebenso wenig dass die Praeposition hier unstatthaft sei: für den Zusammenhang ist aber οὖν nicht einmal angemessen. Denn wenn Polynices mit den Worten schliesst, er hoffe seinen Bruder zu tödten und die Herrschaft über Theben wiederzubekommen, so kann der nachfolgende Befehl des Eteocles ἔξιθι χώρας nicht als eine Folgerung hieraus dargestellt und also auch nicht mit οὖν eingeführt werden. In ἔξιθι χώρας liegt, wenn wir den Zügen der Ueberlieferung uns genau anschliessen, ἐξίοι χώρας. Nach V. 637 würden wir freilich die zweite Person ἐξίοις erwarten; da jedoch Polynices seine letzten Worte nicht an den Eteocles gerichtet hat, so ist es offenbar angemessener, dass auch Eteocles von dem Bruder in der dritten Person redet. Mit andern Worten, das durch die Ueberlieferung gegebene ἐξίοι ist beizubehalten; dagegen ist für σοι V. 637 die dritte Person οἱ zu setzen. Somit schreibe ich:

ἐξίοι χώρας· ἀληθῶς δ' ὄνομα Πολυνείκην πατὴρ
ἔθετό οἱ θείᾳ προνοίᾳ νεικέων ἐπώνυμον.

Der Hiatus vor οἱ, den man durch ein σοι zu beseitigen suchte, ist durch einige andere Beispiele hinlänglich sicher gestellt. Soph. Trach. 650: ἃ δέ οἱ φίλα δάμαρ. Cratinus Com. 2 p. 148: Ἥραν τέ οἱ Ἀσπασίαν τίκτει. Vgl. Cratinus Com. 2 p. 112.

713 ποῖ; μῶν νεαίζων οὐχ ὁρᾷς ἃ χρή σ' ὁρᾶν;

Offenbar muss es heissen ἃ χρῆν σ' ὁρᾶν; "siehst du nicht was du sehen solltest?" Dass χρῆν wirklich in F steht, kann bei der stehenden Verwechslung von χρή und χρῆν kaum in Betracht kommen.

739 λόχων ἀνάσσειν ἑπτὰ προσκεῖσθαι πύλαις.

Matthiae schrieb λόχων ἄνακτας ἑπτὰ προσκεῖσθαι πύλαις, wogegen Meineke Com. 3 p. 198 ἀνάσσειν χἀπτὰ vorschlug. Da wenige Verse später λόχων ἀνάσσειν als Versanfang wiederkehrt, so habe ich bereits in der ersten Ausgabe λόχων ἀνάσσειν eingeklammert und die Bemerkung gemacht: "*verba* λόχων ἀνάσσειν *ex* 742 *huc immigrarunt, genuina lectio latet.*" Aehnlich urtheilt, ohne von meiner Bemerkung Kenntniss zu nehmen, Kirchhoff: "λόχων ἄνακτας *Matthiae. sed fortasse totum hemistichium errore huc retractum e v.* 743".

Wie Euripides öfters gegen seine Vorgänger polemisirt (vgl. meine Bemerkung in der zweiten Ausgabe des Eurip. vol. 1 p. XXXVI), so lässt er mit augenscheinlicher Beziehung

auf Aeschylus in V. 751 den Eteocles sagen, es sei zu weitläufig die einzelnen Heerführer namhaft zu machen, die er an den sieben Thoren den Feinden entgegenstellen werde. Statt der hergebrachten Lesart,

ὄνομα δ' ἑκάστου διατριβὴ πολλὴ λέγειν,
ἐχθρῶν ὑπ' αὐτοῖς τείχεσιν καθημένων,

hat Kirchhoff geschrieben ὄνομα δ' ἑκάστου διατριβὴν πολλὴν ἔχει, nach den Spuren der Handschrift A, wo διατριβὴν πολλ sich findet mit einer Rasur, "*in qua a pr. m. supersunt* ην^ν, *cetera deleta et rejecta a m. 2 in* ὴ λέγειν." Wenn διατριβὴν πολλὴν ἔχει richtig ist, so muss statt ὄνομα δ' ἑκάστου wohl ein anderer Ausdruck erwartet werden, der den Sinn giebt ὀνομάζειν δ' ἕκαστον.

761 μητρὸς δ' ἀδελφὸς εἶ. τί δεῖ μακρηγορεῖν;

Wenn Eteocles sich dieser Worte bedient, nachdem er den Creon aufgefordert hat für die Vermählung seines Sohnes Haemon mit der Antigona Sorge zu tragen, so wird man leicht fühlen dass δέ hier völlig unpassend ist. Die störende Partikel ist augenscheinlich eingeflickt um einen prosodischen Fehler der Ueberlieferung μητρὸς ἀδελφὸς εἶ zu beseitigen. Man verkannte das richtige Heilmittel, μητέρος ἀδελφὸς εἶ.

766 ἓν δ' ἡμῖν ἀργόν ἐστιν, εἴ τι θέσφατον
οἰωνόμαντις Τερεσίας ἔχει φράσαι,
τοῦδ' ἐκπυθέσθαι.

So die besten Handschriften AE, während die übrigen ἓν δ' ἐστὶν ἡμῖν ἀργόν bieten. Bekanntlich hat Sophocles die Endsilben in ἡμῖν und ὑμῖν ausserordentlich häufig verkürzt, so häufig dass man sich versucht fühlen konnte überall die Formen ἡμιν und ὑμιν, oder nach anderer Accentuation ἡμίν und ὑμίν, ihm vindiciren zu wollen. Vgl. Elmsley zu Soph. Oed. R. p. XIII ed. Lips. Wäre für Euripides diese Verkürzung hinreichend verbürgt, so würde man bei der Lesart ἓν δ' ἡμιν ἀργόν ἐστιν sich beruhigen können. Ausser der vorliegenden Stelle sind jedoch, abgesehen von Hermanns willkürlicher Vermuthung Cycl. 641, nur zwei Beispiele vorhanden, die sich mit einigem Schein anführen lassen. Von diesen beruht das eine (fr. 711),

τὸν δὲ Τήλεφον
οὐκ οἰόμεσθα; νοῦς ἀρ' ἡμιν οὐκ ἐνι,

nur auf Aristophanes, von dem eine diplomatische Treue in den Parodieen fremder Dichterstellen kaum erwartet werden kann; das andere, fr. 407, 5, ist um des Sinnes willen bereits von Meineke angefochten worden. Somit scheint es nicht rathsam eine Form wie ἡμιν oder ὑμιν dem Euripides zuzutrauen, und für die Emendation des Phoenissenverses eröffnet sich hiernach ein weiterer Spielraum der Vermuthung. Vielleicht ist ἓν δ' ἀργὸν ἡμῖν ἐστιν zu schreiben, wie Kirchhoff vorschlug, vielleicht ist ἡμῖν ein späteres Einschiebsel, nach dessen Beseitigung sich die Vermuthung darböte,

ἓν δ' ἀργόν ἐστιν, εἰ θεοῦ τι θέσφατον.

Gegen ἡμῶν dürfte noch dies in Betracht kommen, dass auch Aeschylus sich diese Form nie gestattet hat, wonach Suppl. 959 (v. 923 Schwerdt) nicht ἔνθ' ὑμῖν ἔστιν, sondern ἔνθ' ἔστιν ὑμῖν εὐτύκους ναίειν δόμους zu schreiben sein dürfte.

Eteocles will den Tiresias holen lassen:

ἐγὼ δὲ παῖδα σὸν
Μενοικέα σοῦ πατρὸς αὐτεπώνυμον
λαβόντα πέμψω δεῦρο Τειρεσίαν, Κρέον.

Das λαβόντα V. 770 halte ich trotz der Vertheidigung von Schäfer und Geel, denen Dindorf, Matthiae, Hermann und andere beipflichten, für widersinnig. Die nahe liegende Verbesserung ἄξοντα machte bereits Valckenaer.

In einer Anrede an den stürmischen Kriegsgott heisst es: nicht liebst du die Töne der Flöte, nicht Spiel und Tanz,

ἀλλὰ σὺν ὁπλοφόρῳ στρατὸν Ἀργείων ἐπιπνεύσας
ἄσματι Θήβαις
κῶμον ἀναυλότατον προχορεύεις.

So habe ich V. 789 f. geschrieben nach der Verbesserung von C. Badham Iphig. Taur. praef. p. 18 f., dessen Worte hier eine Stelle finden mögen. "*Vulgo legitur* ἀλλὰ σὺν ὁπλοφόροις στρατὸν Ἀργείων ἐπιπνεύσας αἵματι Θήβας, *quasi* ὁπλοφόροις *pro militibus poni posset; et porro quid est exercitum cum militibus incitare? Neque hic saltem* αἵματι *pro* γέννᾳ *commode adhiberetur;* ἐπιπνεύσας *autem inutilis prorsus translatio esset, nisi adiecta fuisset bellici cantus mentio.* ὁπλοφόρον ἆσμα *conferri potest cum dictione Callimachi (Hymn. ad Del.)* ἡ δ' ἐλέλιξεν ἐνόπλιον, *neque audacius hoc dictum quam Iph. A.* 190 κλισίας ὁπλοφόρους." Ueber die Anwendung der Praeposition σὺν vgl. V. 807: ἀμυσσοτάταισι σὺν ᾠδαῖς.

Ueber die Worte χαλκῷ κοσμήσας V. 797 bemerkt Kirchhoff: "*verba* χαλκῷ κοσμήσας, *qui* (vielmehr *quae*) *sunt in libris omnibus, licet nec sana sint, nec in antistropha exstent, quae respondeant, male tamen eiecisse videntur recentiores auctoritatem secuti metrici codicis Kingiani. potius in antistropha lacunae signa ponenda curavi.*" Was über die neueren gesagt wird bedarf einer Modification: einerseits hatte schon Hermann bemerkt, *non temere abiiciendum esse istud* χαλκῷ κοσμήσας, *quod libri habent*, und er hatte diese Worte zu einer allerdings etwas gewagten Aenderung benutzt; andrerseits hatte ich bereits in der ersten Ausgabe die Worte χαλκῷ κοσμήσας in den Text aufgenommen, wie vor mir Geel im J. 1846 und noch früher Klotz im J. 1842. Die Behauptung dass für χαλκῷ κοσμήσας etwas entsprechendes in der Antistrophe sich nicht finde, gründet sich auf eine zum mindesten höchst unsichere Versabtheilung. Es entsprechen sich V. 797—99 und 815—17 in folgender Weise:

χαλκῷ κοσμήσας. οὐδ' οἱ μὴ νόμιμοι
ἦ δεινά τις Ἔρις Ζεός, ἃ τάδε παῖδες ματρὶ λόχευμα, μίασμα πα-
μήσατο πήματα γᾶς βασιλεῦσιν. τρὸς δὲ συναίμονος εἰς λέχος ἦλθον.

Allerdings glaube ich dass Euripides sich nicht gestattet hat dem Molossus κοσμήσας einen Choriambus μὴ νόμιμοι gegenüberzustellen; aus dieser Ungleichheit wird aber niemand den

Schluss ziehen dürfen dass für χαλκῷ κοσμήσας in der Antistrophe eine Lücke anzunehmen sei. In der Strophe folgen am Schluss noch die Worte Λαβδακίδαις πολυμόχθοις. Diese ermangeln einer antistrophischen Correspondenz, und es scheint als wären sie aus einer zu γᾶς βασιλεῦσιν beigeschriebenen Interpretation entstanden. Darum möchte ich diese Worte einfach tilgen; oder wenn γᾶς βασιλεῦσιν zu unbestimmt sein sollte, die Worte πήματα γᾶς βασιλεῦσιν als eine Variante zu V. 800 betrachten und demgemäss schreiben:

μήσατο Λαβδακίδαις πολυμόχθοις.

Denn allerdings ist es angemessener dass ganz bestimmt die Labdakiden als dass schlechthin die Könige des Landes genannt werden, und eine Verwechslung von ΓΑCΒΑCΙΛΕΥCΙΝ und ΛΑΒΔΑΚΙΔΑΙCΙΝ liegt nicht ganz ausser dem Bereich der Wahrscheinlichkeit. Statt in der oben angegebenen Weise die Verse zu ordnen, hat Kirchhoff für χαλκῷ κοσμήσας in der Antistrophe eine Lücke angesetzt und nachher abgetheilt:

ἦ δεινά τις Ἔρις θεός, ἃ τάδε = οὐδ' οἱ μὴ νόμιμοι παῖδες
μήσατο πήματα γᾶς βασιλεῦσιν, = ματρὶ λόχευμα, μίασμα· πατρὸς δὲ συν-
Λαβδακίδαις πολυμόχθοις. = αίμονος εἰς λέχος ἦλθον.

So entsprechen sich eben nur die Schlussverse, nicht aber die vorhergehenden. In der Antistrophe bieten unsere Handschriften μίασμα πατρός· ἡ δὲ συναίμονος εἰς λέχος ἦλθεν, mit der unerheblichen Variante σύναιμον statt συναίμονος. Kirchhoff hat aber aus den Scholien nachgewiesen *et ἦλθον fuisse in archetypo nec lectum ibi ἦ, quod libri inserunt post* πατρός. Die ursprüngliche Fassung ist damit natürlich noch nicht gefunden, und überhaupt dürfte es schwer sein die Stelle überzeugend zu heilen; ich versuchte

οὐδ' εὐώδινον
παῖδες ματρὶ λόχευμα, μίασμα δὲ
πατρὸς ὁμαίμονος εἰς λέχος ἦλθον.

Unter den παῖδες wird der eine Oedipus verstanden; der Pluralis ist hier generell gebraucht wie bei Sophocles Oed. R. 1250: τέκν' ἐκ τέκνων τέκοι. Vgl. Aristoph. Byz. p. 49. Schneidewin im Philol. 1 p. 442.

Der Chor wünscht 806 ff. es wäre nie die geflügelte Jungfrau erschienen:

μηδὲ τὸ παρθένιον πτερόν, οὔρειον τέρας, ἐλθεῖν
πένθεα γαίας,
Σφιγγός, ἀμουσοτάταισι σὺν ᾠδαῖς.

Der Genetiv Σφιγγός wäre bei einer andern Wortstellung wohl möglich, wenn er nämlich unmittelbar zu παρθένιον πτερόν oder οὔρειον τέρας hinzugefügt wäre; jetzt wo er sich an πένθεα γαίας anschliesst, ist er unerträglich, und der Accusativ wird mit Nothwendigkeit gefordert, wenn die Rede nicht an Undeutlichkeit leiden soll. Vermuthlich ist zu lesen

Σφίγγ', ἀπομουσοτάταισι σὺν ᾠδαῖς.

819 βάρβαρον ὡς ἀκοὰν ἐδάην ἐδάην ποτ' ἐν οἴκοις.

In Kirchhoffs Ausgabe steht ἐδάην nur einmal, ohne dass wir erfahren ob diese Abweichung von der hergebrachten Lesart auf der Autorität irgend einer Handschrift beruht. Sollte das eine ἐδάην nur in Folge eines Druckfehlers weggefallen sein?

Der greise Seher Tiresias, dem die Füsse fast den Dienst versagen, erkundigt sich bei Menoeceus dem Sohne des Creon, wie weit der Weg noch sei:

842 πόση τις ἡ ἐπίλοιπος ἄστεως ὁδὸς
πρὸς πατέρα τὸν σόν· ὡς ἐμὸν κάμνει γόνυ,
πυκνὴν δὲ βαίνων ἦλυσιν μόλις περῶ.

Hier ist ἄστεως, wofür die besseren Handschriften ἄστεος bieten, undeutlich und sicher verderbt. Bisher hat meines Wissens nur Reiske daran Anstoss genommen, dessen Vermuthung ἐστί πως das Wahre nicht zu treffen scheint. Seltsamer Weise antwortet nicht Menoeceus, sondern Creon:

843 Ἔᾶρσει· πέλας γάρ, Τειρεσία, φίλοισι σοῖς
ἐξορμίσαι σὸν πόδα· λαβοῦ δ' αὐτοῦ, τέκνον·
ὡς πᾶσ' ἀπήνη πούς τε πρεσβύτου φιλεῖ
χειρὸς Ἑυραίας ἀναμένειν κουφίσματα.

Diese Stellvertretung wäre gerechtfertigt, wenn Menoeceus als stumme Person aufträte; da dies nicht der Fall ist (vgl. 977 ff.), so werden wir kaum umhin können ihm die angeführten Verse oder doch mindestens den Anfang derselben beizulegen. Die Worte πέλας φίλοις ἐξορμίσαι σὸν πόδα werden schon von den alten Erklärern verschieden aufgefasst, wie denn auch die Schreibung schwankt zwischen ἐξορμίσαι, ἐξόρμισαι und ἐξώρμισαι. In jedem Falle ist ἐξορμίζειν oder ἐξορμίζεσθαι hier unpassend; das Ziel an welchem Tiresias anlangt, ist die Bucht in welche er einläuft, nicht das hohe Meer, das durch ein Auslaufen aus der Bucht gewonnen wird. Folglich ist nur ἐσορμίζειν hier denkbar. Am passendsten werden wir den auch durch die Handschriften empfohlenen Infinitivus aor. act. beibehalten, also ἐσορμίσαι σὸν πόδα schreiben, "um deinen Fuss in den Hafen (d. h. zur Ruhe) zu bringen". Zu πέλας vermisst man ein Verbum. Die leichteste Aenderung wäre πελᾷς γάρ, Τειρεσία, φίλοισι σοῖς. Für wahrscheinlicher aber halte ich πέλας γάρ, Τειρεσία, φίλοισιν εἶ. Was mit dem sinnlosen πᾶσ' ἀπήνη anzufangen sei, dessen Vertheidigung seltsamer Weise Klotz übernehmen konnte, weiss ich nicht zu sagen. — Es folgen die Worte des Tiresias:

849 εἶεν, πάρεσμεν· τί με καλεῖς σπουδῇ, Κρέον;

Vermuthlich ist zu lesen τί με καλεῖς σπεύδων, "in welcher Absicht".

Mit dem Untergange der entzweiten Brüder werden viele Argiver und Thebaner den Tod finden. So lautet die Weissagung des Tiresias, an die sich folgendes anschliesst:

σύ τ' ὦ τάλαινα συγκατασκάπτει πόλι,
885 εἰ μὴ λόγοισι τοῖς ἐμοῖς τις πείσεται.

Wenn Kirchhoff aus A συγκατασκάπτῃ πόλει schreibt, so ist diese Lesart zwar nicht unmöglich, aber πόλι ist vorzuziehen, und bei der stehenden Verwechslung von ει und ι kommt

die Autorität der einen Handschrift kaum in Betracht. Den fehlerhaften Ausgang[1]) τοῖς ἐμοῖς τις πείσεται beseitigt Porsons Vermuthung

εἰ μὴ λόγοις τις τοῖς ἐμοῖσι πείσεται,

eine Vermuthung die von Kirchhoff mindestens erwähnt werden musste. Die Aenderung ist darum eine ungemein leichte, weil λόγοις, λόγοισι, λόγοισιν von den Abschreibern als vollkommen indifferent behandelt wird[2]).

917 ὦ πολλὰ λέξας ἐν βραχεῖ χρόνῳ κακά.

Es scheint nothwendig ἐν βραχεῖ λόγῳ zu schreiben, d. h. διὰ βραχέων, mit wenig Worten. Vgl. meine Bemerkung Philol. XII p. 641.

931 δεῖ τόνδε Σαλάμιος, οὗ δράκων ὁ γηγενὴς
ἐγένετο Δίρκης ναμάτων ἐπίσκοπος,
σφαγέντα φόνιον αἷμα γῇ δοῦναι χοάς
Κάδμου, παλαιῶν Ἄρεος ἐκ μηνμάτων.

Die zusammenhängenden Worte γῇ Κάδμου sind in einer zwecklosen und sinnstörenden Weise durch das dazwischen gestellte χοάς getrennt, wodurch die Gefahr entsteht Κάδμου mit παλαιῶν ἐκ μηνμάτων oder mit χοάς zu verbinden. Wenn nicht eine tiefere Verderbniss vorliegt, so wird durch eine Umstellung zu helfen sein: γῇ Κάδμου χοὰς δοῦναι.

Nachdem Creon erklärt hat er könne sich nimmermehr dazu verstehen seinen Sohn Menoeceus zu opfern, und nachdem er darauf hingewiesen dass ein jeder seine Kinder liebt, fährt er fort:

967 μή μ' εὐλογείτω τἀμά τις κτείνων τέκνα.

Nach dieser Lesart würde τις auf Tiresias gehen, der als Mörder des Menoeceus bezeichnet würde. Diese Bezeichnung wäre wohl nicht passend, sofern dem Creon selbst zuge-

1) Noch immer scheinen viele an der Richtigkeit des sogenannten *canon Porsonianus* zu zweifeln. Das so eben mir zukommende Heft der Neuen Jahrb. f. Philol. u. Paedag. (Bd. LXXIX Heft 2) bringt p. 109 über Aesch. Suppl. 253 ed. Schwerdt. folgende Vermuthung:

χρανθεὶσ' ἀνῆκε γαῖα μήνη τ' αἰανῆ.

Einen solchen Trimeter hat Aeschylus sicherlich nicht gemacht, und das Wort μῆνος wäre dem Aeschylus wohl ebenso unverständlich gewesen als das p. 106 ihm zugemuthete ποτνίων ἁρμονιῶν.

2) Dessen haben sich die Kritiker nicht erinnert, wenn sie z. B. das Euripideische Fragment bei Stobaeus Flor. 8, 7:

ἀνὴρ δ' ὃς εἶναι φής, ἀνδρὸς οὐκ ἄξιον
δειλὸν κεκλῆσθαι καὶ νοσεῖν αἰσχρὰν νόσον,

unrichtig behandelten. In den *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 50 habe ich zwei prosodische Fehler angemerkt mit denen man den ersten Vers beschenkt hatte: ἀνὴρ δ' ὃς εἶναι φής, ἀνέρος οὐκ ἄξιον und ἀνὴρ δ' ὃς εἶναι φής, οὐκ ἄξιον σέθεν. Das Verdienst hierzu den dritten prosodischen Fehler geliefert zu haben, vindicirt sich Kayser N. Jahrb. f. Philol. u. Paed. Bd. LXXIII p. 233, welcher durch meine Behandlungsweise, wie er sagt, nicht ganz befriedigt, unmaassgeblich empfiehlt ἀνὴρ δ' ὃς εἶναι φής, ἄρ' ἐστὶν ἄξιον κτέ. Denn dass hier ἄρα und nicht ἆρα stehen muss, wird vielleicht selbst Kayser einsehen. Somit hatte ich wohl ein Recht zu sagen: *miror neminem adhuc vidisse quod videre quivis poterat, legendum esse* ἀνὴρ δ' ὃς εἶναι φησίν, ἄνδρ' οὐκ ἄξιον δειλὸν κεκλῆσθαι. Freilich konnte ich nicht erwarten dass darauf eingewendet werden würde, φησὶν sei nicht handschriftliche Lesart. Kayser hält es für gewaltthätig φησὶν aus φής zu machen; dagegen ἀνδρὸς οὐκ in ἆρ' (oder vielmehr ἄρ') ἐστὶν zu ändern und einen Spondeus an die vierte Stelle zu bringen, scheint ihm eine billige Licenz.

muthet wird seinen Sohn dem Tode zu weihen: mehr aber kommt dies in Betracht dass Creon auf den Beifall vieler zählen darf, wenn das Vaterland durch den Tod seines Sohnes gerettet wird. Theils aus diesen Gründen theils um der Sentenz selbst willen dürfte es angemessener sein, wenn Creon das Lob ablehnt der Mörder seiner Kinder zu sein, ein Lob das seiner Meinung nach factisch ein schwerer Vorwurf ist; d. h. ich möchte schreiben: μή μ' εὐλογείτω τἀμά τις κτείνειν τέκνα, nicht soll mir jemand nachrühmen dass ich meine Kinder tödte.

990 ἀλλ' εἶα χώρει. μὴ τὸ σὸν κωλυέτω.
γυναῖκες, ὡς εὖ πατρὸς ἐξεῖλον φόβον
κλέψας λόγοισιν, ὥσθ' ἃ βούλομαι τυχεῖν.

Menoeceus hat versprochen der ihm drohenden Todesgefahr sich durch die Flucht zu entziehen. Dies trügerische Versprechen, das er gegeben um seinen Vater zu beruhigen, ist nicht so angethan dass Menoeceus Grund hätte die Art wie er seinem Vater die Furcht genommen zu bewundern. Mit andern Worten, in dem ὡς εὖ liegt ein hier ganz unpassendes Selbstlob. Vermuthlich ist unser ὡς εὖ aus der nämlichen Quelle geflossen wie Hec. 1137: ἄκουσον ὡς εὖ καὶ σοφῇ προμηθίᾳ, worüber oben S. 22 das nöthige bemerkt ist. Die Worte μὴ τὸ σὸν κωλυέτω· γυναῖκες, ὡς εὖ scheinen unecht zu sein.

V. 1037 ff. giebt Kirchhoff nach den Handschriften:

ὑήιον μέλος [μέλος]
ἄλλος ἄλλον ἐπετότυζε
διαδοχαῖς ἀνὰ πτόλιν,

und weist Valckenaers Verbesserung ἄλλος ἀλλ' ἐπωτότυζε zurück als unnütz. Vielmehr ist diese Verbesserung durchaus nothwendig, erstens weil das masculinische ἄλλον keinen Sinn giebt, zweitens weil zwar ὀτοτύζω, nicht aber τοτύζω sich findet, drittens weil der antistrophische Vers 1062: Παλλάς ἃ δράκοντος αἷμα, vier reine Trochaeen fordert.

1104 προσῆγε Νηίταις πύλαις.

Die richtige Schreibung Νηίσταις πύλαις hat Unger Parad. Theb. p. 310 ff. mit vollkommener Evidenz dargethan, vgl. Hermann zu d. St. Einen neuen Beleg für die von Unger erkannte Form liefert der Choliambendichter bei Pseudo-Callisth. p. 52 b ed. Didot.:

πύλαις δὲ ταύταις προστεθείσαις ἡμῖν
ἀρρήκτες ἀμφιάραον χαίρουσα δεχοιοῖτε γαῖα
ὠγυγίαις πύλεσι ἐν τρίταις
κλῆθρε πομέδοντα τὸν μέγαν εὐσθενῆ τ'
εἶπε τὸ κηδίστεσιν παρὰ πύλαις
παρθενοποιός· ὅτε ἦν μόλην* ὠῆς πύλαις
ὀλώλς μυριέσιν ἐκλήθη.

Obgleich es mir nicht möglich ist diese Stelle auch nur annähernd zu emendiren, so liegen

doch in der Corruptel κηδίστεσιν παρὰ πύλαις die ursprünglichen Worte Νηίσταισιν παρὰ πύλαις offen zu Tage.

Am siebenten Thore, so erzählt der Bote, stand Adrastus,

1135 ἑκατὸν ἐχίδναις ἀσπίδ' ἐκπληρῶν γραφῇ
ὕδρας ἔχων λαισῖσιν ἐν βραχίοσιν
Ἀργεῖον αὔχημ'.

Da es im höchsten Grade auffallend ist dass Adrastus selbst es sein soll der mit hundert Schlangen seinen Schild ausfüllt, so hat Geel ἐκπληροῦν verbessert; und man wird nicht umhin können diese Emendation anzunehmen, obgleich es nicht unwahrscheinlich ist dass auch in γραφῇ ein Fehler liegt. Sehr bedenklich scheint auch Ἀργεῖον αὔχημα, weil weder Adrastus im Gegensatz zu den vorgenannten Heerführern als Argiver bezeichnet werden kann, noch die Prahlerei ein charakteristisches Merkmal des Argivischen Stammes abgiebt. Man erwartet den Begriff "eitle, nichtige Prahlerei", und somit dürfte ἀχρεῖον αὔχημα zu schreiben sein, oder ἄχρειον αὔχημα, wofern nämlich Eustathius Od. p. 1842, 54 Recht hat wenn er behauptet dass die Attiker dies Adjectivum als Proparoxytonon betonen.

Der Bote erzählt weiter:

1153 ὁ δ' Ἀρκάς, οὐκ Ἀργεῖος, Ἀταλάντης γόνος
τυφὼς πύλαισιν ὥς τις ἐμπεσὼν βοᾷ.

Parthenopaeus der Sohn der Atalanta war ein Arkadier seiner Geburt nach, erzogen dagegen in Argos. Vgl. Aesch. Sept. 547. Eur. Suppl. 888. Dass darauf hier Bezug genommen wird erkannten bereits die Scholien, und mit ihnen stimmen die neueren Erklärer überein. Wie aber soll dieser Thatbestand durch die Worte οὐκ Ἀργεῖος bezeichnet sein? G. Hermann sagt: *cum dicat poeta* οὐκ Ἀργεῖος, *suspicio est fuisse qui eum etiam natum Argis putaverint.* Mit Recht bemerkt dagegen Geel dass eine derartige Beziehung auf eine übrigens unerweisbare Meinungsverschiedenheit über den Geburtsort des Parthenopaeus sich eher für einen Scholiasten als für den Dichter Euripides schicken würde. Geels eigene Vermuthung ist aber um nichts besser; er meint der hier bezeichnete Parthenopaeus sollte von einem gleichnamigen Argiver, dem Sohne des Talaus, unterschieden werden. Es ist ja klar dass durch Ἀταλάντης γόνος jede Verwechslung mit dem Sohne des Talaus ausgeschlossen war. Nach dem angegebenen factischen Verhältniss ist vielmehr Parthenopaeus zugleich Arkadier und Argiver, weshalb ich ὁ δ' Ἀρκὰς αὖ καὶ γεῖος bereits in der ersten Ausgabe vorgeschlagen habe. Ziemlich dieselbe Vermuthung machte nach mir Schoene im Philol. X p. 393, nur dass er ὁ δ' Ἀρκὰς ὢν καὶ γεῖος wollte.

Capaneus, der sich vermessen hatte dem Blitzstrahle des Zeus Trotz zu bieten, wird für diese frevelhafte Ueberhebung gestraft:

1180 ἤδη δ' ὑπερβαίνοντα γεῖσα τειχέων
βάλλει κεραυνῷ Ζεύς νιν· ἐκτύπησε δὲ
χθών, ὥστε δεῖσαι πάντας· ἐκ δὲ κλιμάκων
ἐσφενδονᾶτο χωρὶς ἀλλήλων μέλη,

κόμαι μὲν εἰς Ὄλυμπον, αἷμα δ' εἰς χθόνα,
1183 χεῖρες δὲ καὶ κῶλ' ὡς κύκλωμ' Ἰξίονος
εἰλίσσετ'· εἰς γῆν δ' ἔμπυρος πίπτει νεκρός.

Diese Stelle ist von ungeschickter Hand in einer geschmacklosen, zum Theil albernen Weise erweitert. Zuerst sind die Worte ἐκτύπησε — πάντας 1181 f. so nüchtern dass sie besser ganz fehlen würden. Bei weitem anstössiger aber erscheinen die Verse 1183—85. Den mittleren derselben hat bereits Geel verurtheilt, und in der That streitet es gegen alle Vernunft zu sagen dass die Haare des vom Blitz getroffenen in die Luft und gar in den Olymp gehen, das Blut aber zur Erde fällt. Man sollte glauben, Capaneus wäre durch den Blitz einerseits scalpirt, andrerseits erstochen worden, und doch würde immer die Gegenüberstellung der Haare und des Blutes absurd sein. Die Worte ἐσφενδονᾶτο χωρὶς ἀλλήλων μέλη sind indess ebenfalls unpassend; denn wenn Euripides so schrieb, so konnte er nicht hinterher sagen εἰς γῆν ἔμπυρος πίπτει νεκρός. Oder sollen etwa die aus einander gerissenen Glieder, die nach verschiedenen Seiten hin fliegen, sich nach einigen Irrfahrten wieder so verbinden dass dennoch unten ein todter Mensch ankommt? Wie abgeschmackt es aber ist dass Hände und Füsse sich drehen sollen wie das Rad des Ixion, wird jeder fühlen. Nach Ausscheidung der als unecht oder doch verdächtig bezeichneten Verse behalten wir folgende untadelhafte Schilderung:

ἤδη δ' ὑπερβαίνοντα γεῖσα τειχέων
βάλλει κεραυνῷ Ζεύς νιν· ἐκ δὲ κλιμάκων
εἰλίσσετ', εἰς γῆν δ' ἔμπυρος πίπτει νεκρός.

Nach den ausweichenden und unbestimmten Antworten die der Bote auf die Frage nach dem Schicksal des Eteocles und Polynices giebt, fürchtet Iocasta dass irgend ein Unglück ihr verheimlicht werde. Auf ihre Aeusserung dieses Verdachtes, κακόν τι κεύθεις καὶ στέγεις ὑπὸ σκότῳ, erwidert der Bote:

1213 οὐκ ἄν γε λέξαιμ' ἐπ' ἀγαθοῖσι σοῖς κακά.

Die Handschriften sind zwischen οὐκ ἄν und κοὐκ ἄν getheilt. Mit κοὐκ ἄν bestätigt der Bote die Muthmassung der Iocasta; dadurch bekommt die gleichwohl folgende Verweigerung einer weiteren Auskunft etwas unehrerbietiges und trotziges. Darum würde ich οὐκ ἄν vorziehen. Völlig unpassend scheint das nachfolgende γε, und mit Recht hat schon Geel an σοῖς Anstoss genommen, deshalb weil die bisherige Erzählung des Boten nicht sowohl speciell die Iocasta als vielmehr die ganze Stadt Theben angieng. Durch Geels Vermuthung ἐπ' ἀγαθοῖσί σοι κακά wird allerdings der zweite Theil des Verses erträglich, obgleich σοι jedenfalls überflüssig ist, da der Bote nicht bloss der Iocasta sondern schlechthin einem jeden gegenüber sich scheuen muss auf die Meldung glücklicher Ereignisse eine Trauerbotschaft folgen zu lassen. Für sicher ist das σοι auf keinen Fall zu halten, so lange nicht die erste Vershälfte in Ordnung gebracht ist. Wenn ich nicht irre, sind σοῖς und γε lediglich verkehrte Supplemente eines unvollständig überlieferten Verses:

οὐκ ἄν λέξαιμ' ἐπ' ἀγαθοῖσι κακά.

Ich vermuthe:

οὐκ ἂν λέγων λέξαιμ' ἐπ' ἀγαθοῖσιν κακά.

Wie leicht hier λέγων vor λέξαιμ' ausfallen konnte liegt auf der Hand, und die von mir vorausgesetzten Supplemente würden dem Ungeschick der Abschreiber wohl anstehen. Ueber die Redeweise vgl. Aristoph. Com. 2 p. 1079: ἀλλα πολλα' ἃ' ὧν οὐδ' ἂν λέγων λέξαις. Eubulus Com. 3 p. 223: κοὐδ' ἂν λέγων λέξαιμι.

Wie der Bote berichtet, verkündete Eteocles vor dem versammelten Heere er sei entschlossen mit seinem Bruder einen Zweikampf zu bestehen:

ἐγὼ γὰρ αὐτὸς τόνδε κίνδυνον μεθείς
μόνος συνάψω συγγόνῳ τῷμῷ μάχην·
κἀν μὲν κτάνω τόνδ', οἶκον οἰκήσω μόνος,
ἡσσώμενος δὲ τῷδε παραδώσω μόνος.

Unter κίνδυνον μεθείς versteht man gewöhnlich κίνδυνον ῥίψας. Eine entsprechende Anwendung von μεθιέναι ist mir nicht bekannt; aber ebenso wenig wird Kirchhoffs Vermuthung ἐγὼ δ' ἐμαυτὸν τῷδε κινδύνῳ μεθείς, zu billigen sein. Weder glaube ich dass man *periculum subire* durch κινδύνῳ ἑαυτὸν μεθιέναι ausdrücken kann, noch scheint es rathsam vier Aenderungen vorzunehmen wo man mit einer auskommen kann. Wer weiss welchen Entstellungen die Versausgänge unterlegen haben, wird es nicht verwegen finden wenn ich τόνδε κίνδυνον τεμὼν vermuthe. Vgl. κίνδυνον πολιῷ τεμεῖν σιδάρῳ Heracl. 758. μαχᾶν τέμνειν τέλος Pind. Ol. 13, 57 und ähnliches. V. 1232 bieten παραδώσω μόνος die beiden besten Handschriften: diese augenscheinlich falsche Lesart erklärt sich aus dem Schlusse des voraufgehenden Verses (vgl. meine *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 24 f.). Ihr gegenüber können die Lesarten der geringeren Handschriften, παραδώσω μόνῳ, παραδώσω πάλιν, παραδώσω πάλιν, παραδώσω δόμον, nur als Verbesserungsversuche gelten, die durchaus nicht mehr Anspruch auf Wahrscheinlichkeit haben als jede neuere Vermuthung. Das einzig angemessene scheint zu sein:

ἡσσώμενος δὲ τῷδε παραδώσω θρόνους.

Von den beiden feindlichen Brüdern heisst es:

ἔσταν δὲ λαμπρὰ χρῶμά τ' οὐκ ἠλλαξάτην,
μαργῶντ' ἐπ' ἀλλήλοισιν ἶέναι δόρυ.

Die Form ἔσταν für ἔστησαν ist bei einem scenischen Dichter im Trimeter höchst bedenklich. Das einzige ähnliche ist ἵπποι δ' ἐκρυφθεν Hipp. 1247, was kaum richtig sein dürfte, während κατέναθεν Ar. Vesp. 662, ἔβαν Aesch. Pers. 18. Eur. Andr. 287. Herc. F. 662, κατέβαν Soph. Trach. 504, σπέδραν Ai. 167 u. ähnliches durch das Versmaass entschuldigt wird[1]). An unserer Stelle ist offenbar zu lesen στήτην δὲ λαμπρώ. Die Weglassung des Augmentes hat in einer ῥῆσις ἀγγελική zu Anfang des Trimeters nichts gegen sich.

1) Vgl. Meineke Com. 2 p. 77 f. Bei Eur. Phoen. 349 ist nach den Handschriften jetzt hergestellt: ἀνὰ δὲ Θηβαίαν πόλιν ἐσιγάθη σᾶς ἔσοδοι (statt des früheren ἔσοδος) νώμφας. Der Dichter hat sich also lieber des sogenannten Pindarischen Schema als der Form ἐσίγαθεν bedient.

Vgl. meine Bemerkung zu Soph. Oed. C. 1606 und Hermann in der Vorrede zu Eur. Bacch.

Den Eteocles ermuntern seine Freunde:

νῦν πόλεως ὑπερμαχεῖς,
νῦν καλλίνικος γενόμενος σκήπτρων κρατεῖς.

Das scharf betonte νῦν scheint hier unpassend; denn weder hat Eteocles jemals anders als zur Vertheidigung seines Vaterlandes die Waffen geführt, noch würde es, wenn er dies gethan, an der Zeit sein dass seine Freunde ihn daran erinnerten. Offenbar wird ein Gegensatz gemacht zwischen Eteocles dem Vertheidiger und Polynices dem Angreifer des Vaterlandes, und demgemäss werden wir schreiben müssen:

σὺ πόλεως ὑπερμαχεῖς,
σὺ καλλίνικος γενόμενος σκήπτρων κράτει.

Den Imperativ κράτει halte ich für nothwendig, da Eteocles nur ermuntert werden kann durch siegreiche Waffen seine Herrschaft zu sichern, während καλλίνικος γενόμενος σκήπτρων κρατεῖς den Sieg als eine Thatsache darstellen würde.

Als Iocasta erfahren dass ihre Söhne bereits die Vorbereitungen zum Zweikampfe getroffen haben, ruft sie ihre Tochter Antigona um in Verbindung mit ihr den unheilvollen Kampf wo möglich zu hintertreiben. Erschrocken tritt Antigona aus dem Palast und fragt:

τίν', ὦ τεκοῦσα μῆτερ, ἔκπληξιν νέαν
φίλοις αὐτεῖς τῶνδε δωμάτων πάρος;

Die Worte τῶνδε δωμάτων πάρος klingen zumal in dieser ihrer Stellung am Schlusse der Frage höchst nüchtern, oder eigentlich läppisch. Sie passen durchaus nicht zu der vorliegenden Situation, deren Erregtheit in den gleich nachher V. 1273—78 eintretenden ἀντιλαβαί einen angemessenen Ausdruck findet, und sie scheinen eben nur zur Füllung des Verses zu dienen. Auch die Antwort der Iocasta,

ὦ Ὑύγατερ, ἔρρει σῶν κασιγνήτων βίος,

enthält eine Unrichtigkeit; denn noch hat Iocasta nicht alle Hoffnung aufgegeben ihre Söhne zu retten (vgl. 1280: ὡς ἦν μὲν φᾶσω παῖδας πρὸ λέγχης, σύμὸς ἐν φάει βίος): wäre das Leben ihrer Söhne dahin, so könnte von einem συγγένων λύειν ἔριν (V. 1277) nicht mehr die Rede sein. Betrachtet man V. 1273:

AN. πῶς εἶπας; IO. αἰχμὴν ἐς μίαν καΞέστατον,

so kann es kaum zweifelhaft sein, dass σῶν κασιγνήτων aus σὼ κασιγνήτω gemacht ist, wie die Dualformen nicht selten derartigen Entstellungen unterlagen. Hiernach dürfte für V. 1270—73 folgende Schreibung vorzuziehen sein:

AN. τίν', ὦ τεκοῦσα μῆτερ, ἔκπληξιν νέαν
φίλοις αὐτεῖς; IO. σὼ κασιγνήτω . .
AN. πῶς εἶπας; IO. αἰχμὴν ἐς μίαν καΞέστατον.

Was nach κασιγνήτω zu ergänzen sei, bleibt natürlich ungewiss; passend wäre eine Anrede wie τέκνον. In den zuletzt angeführten Worten befremdet μίαν. Verständlich wäre ἐς αἰχμὴν καθέστατον, aber ἐς μίαν αἰχμὴν καθέστατον ist ebenso widersinnig, als ob wir sagen wollten "die beiden Brüder sind zu einem einzigen Kampfe zusammengetreten". Vermuthlich schrieb Euripides:

αἰχμῆς ἐς πάλην καθέστατον.

Vgl. Heracl. 159: εἰς πάλην καθίσταται δορὸς τὸ πρᾶγμα. Lycophr. 1358: λόγχης — μίξαντες πάλην. Aristoph. Com. 2 p. 1167: ἐς Οἰδίπου δὲ παῖδε, διπτύχω κόρω, Ἄρης κατέσκηψ', ἐς τε μονομάχου πάλης ἀγῶνα νῦν ἑστᾶσιν. Wie konnte aber αἰχμῆς ἐς πάλην in αἰχμὴν ἐς μίαν verderbt werden? Offenbar nur durch eine absichtliche Fälschung, die indess sehr leicht erklärlich wird, wenn wir der fast unvermeidlichen Verwechslung von πάλην und πάλιν uns erinnern.

In banger Sorge um das Schicksal der feindlichen Brüder fragt der Chor:

δίδυμα τέκεα πότερος ἄρα πότερον αἱμάξει,
ἰώ μοι πόνων,
ἰὼ Ζεῦ, ἰὼ γᾶ,
ὁμογενῆ δέραν, ὁμογενῆ ψυχάν,
δι' ἀσπίδων, δι' αἱμάτων;

Die Verbindung αἱμάξει δι' αἱμάτων ist undenkbar, und es lässt sich kaum zweifeln dass in αἱμάτων ein dem ἀσπίδων verwandter Begriff gesucht werden müsse, so dass wie vorher ὁμογενῆ δέραν und ὁμογενῆ ψυχάν einen Parallelismus bildet, hier dem δι' ἀσπίδων ein dem Sinne nach möglichst entsprechender Ausdruck sich anschliesst. Mit andern Worten, statt des Blutes verlangt man eine Waffe, und zwar muss dies nothwendig eine Angriffswaffe sein. Diesen Sinn hat man durch verschiedene Vermuthungen zu erreichen gesucht: δι' αἰγανῶν wollte Reiske, δι' ἐγχέων Geel, δι' ἡμάτων C. F. Hermann (Philol. II p. 402). Die letzte Vermuthung mag sehr scheinbar sein, allein für richtig kann ich sie nicht halten, theils weil das Wort ἧμα nur auf einer wahrscheinlich verderbten Stelle beruht, Il. Ψ, 891:

Ἀτρεΐδη· ἴδμεν γὰρ ὅσον προβέβηκας ἁπάντων
ἠδ' ὅσσον δυνάμει τε καὶ ἥμασιν ἔπλευ ἄριστος,

theils besonders deshalb weil die Beurtheilung des Phoenissenverses im engsten Zusammenhange steht mit der Erklärung oder Verbesserung von Soph. El. 1394, wo Orestes als Rächer des ermordeten Agamemnon eindringt

ἀρχαιόπλουτα πατρὸς εἰς ἑδώλια
νεακόνητον αἷμα χειροῖν ἔχων.

Wenn alte Grammatiker (Anecd. Bekk. p. 356, 20. Hesychius und Suidas v. αἷμα. Etym. M. p. 35, 4) behaupten αἷμα sei so viel als μάχαιρα, so ist dies eine willkürliche Erfindung, die sich lediglich auf die Stelle der Electra gründet. Völlig unstatthaft ist die Schreibung νεοκόνητον αἷμα χειροῖν ἔχων, wo ganz abgesehen von dem nicht zu rechtfertigenden νεοκόνητος wie von dem instrumental zu fassenden χειροῖν schon dies widersinnig ist dass dem

Orestes, bevor er noch den Mord vollzogen hat, blutbefleckte Hände beigelegt werden; und wie es hier unmöglich ist mit Heusinger νεακόνητον ἥμα zu schreiben, da von einem Wurfgeschoss nicht die Rede sein kann, so wird man auch für die Euripideische Stelle C. F. Hermanns Vermuthung abweisen müssen. In der dritten Auflage der Schneidewinschen Ausgabe der Electra habe ich bereits die Vermuthung geäussert (p. 164), dass es für αἰχμή eine Nebenform αἶχμα gab, für deren Vorhandensein wenigstens die Analogie von γραμμή und γράμμα, βρώμη und βρῶμα, ξώμη und ξῶμα, γνώμη und γνῶμα u. ä. sich geltend machen lässt. Wie ich also bei Sophocles νεακόνητον αἶχμα χειροῖν ἔχων schreiben möchte[1]), so scheint für Euripides δι' ἀσπίδων, δι' αἰχμάτων das allein angemessene zu sein.

ἀνάγετ' ἀνάγετε κωκυτόν,
ἐπὶ κάρα τε λευκοπήχεις κτύπους χεροῖν.

Das Metrum dieser beiden Verse ist augenscheinlich gestört; zu ἐπὶ κάρα vermisst man ein Verbum, und χεροῖν schleppt so matt nach dass es wenigstens in dieser Stellung nicht richtig sein kann. In der ersten Ausgabe schlug ich vor

ἀνάγετ' ἀνάγετ' ὦ κωκυτόν, χεροῖν τ'
ἐπικραδᾶτε λευκοπήχεις κτύπους.

Kirchhoff meint dagegen: "*haec sic scripta fuisse a poeta putaverim*

ἄναγ' ἄναγε κωκυτὸν ἐπὶ κρᾶτα λευ-
κοπήχεις κτύπους [τιθεμένα] χεροῖν."

Von palaeographischer Seite ist dieser Versuch höchst unwahrscheinlich.

Den Vers 1360: οἱ τοῦ γέροντος Οἰδίπου νεανίαι, bezeichnete ich schon in der ersten Ausgabe als *suspectus*. Dies scheint Kirchhoff übersehen zu haben; er sagt, ohne meiner Ansicht zu gedenken: "*v.* 1365 *ab interprete huc illatus e v.* 1250." Zugleich hatte ich bemerkt: "*fortasse ante* 1359 *quaedam exciderunt.*" Es war, um die Berechtigung dieser Vermuthung einzusehen, nur nothwendig die Rede des Boten im Zusammenhange zu lesen:

τὰ μὲν πρὸ πύργων εὐτυχήματα χθονὸς
οἶσθ'· οὐ μακρὰν γὰρ τειχέων περιπτυχαί,
ὥστ' οὐχ ἅπαντά σ' εἰδέναι τὰ δρώμενα.
ἐπεὶ δὲ χαλκέοις σῶμ' ἐκοσμήσανθ' ὅπλοις
[οἱ τοῦ γέροντος Οἰδίπου νεανίαι],
ἔστησαν ἐλθόντ' ἐς μέσον μεταίχμιον
[δισσὼ στρατηγὼ καὶ διπλῶ στρατηλάτα]
ὡς εἰς ἀγῶνα μονομάχου τ' ἀλκὴν δορός.

Die eingeklammerten Verse (1360 und 1362) sind zwei Supplemente, die dazu dienen sollten zu ἐκοσμήσαντο das fehlende Subject zu gewinnen. Euripides würde sich undeutlich

1) Eben diese Emendation hat, wie ich hinterher gesehen, für die Sophocleische Stelle Musgrave vorgeschlagen, der zu Soph. Trach. 1021 viele derartige Doppelformen beibringt.

und ungeschickt ausgedrückt haben, wenn er auf V. 1356—58 die Worte ἐπεὶ — ὅπλοις hätte folgen lassen, ohne des Eteocles und Polynices nochmals zu gedenken. Allerdings aber geben die ersten Worte deren sich der Bote bedient zu mannichfachen Bedenken Anlass, so dass man sich des Verdachtes einer ausgedehnteren Interpolation kaum erwehren kann.

Der Kampf der feindlichen Brüder erregte, wie der Bote sagt, eine allgemeine Theilnahme:

1388 πλείων δὲ τοῖς ὁρῶσιν ἐστάλασσ' ἱδρὼς
ἢ τοῖσι δρῶσι, διὰ φίλων ὀρρωδίαν.

Die Worte διὰ φίλων ὀρρωδίαν sind völlig unbestimmt; wenn sie den Sinn haben den Hartung ihnen beilegt, "aus Angst um ihre Angehörigen", so ist die Motivirung des πλείων ἱδρώς höchst ungenügend; um ihre Angehörigen sich zu ängstigen haben die Zuschauer überhaupt sehr wenig Grund, und φίλοι sind meines Wissens nicht Angehörige sondern Freunde. Wie ist es denkbar dass die Zuschauer aus Besorgniss um das Loos ihrer Freunde mehr Angstschweiss vergiessen als die um ihr eigenes Leben ringenden Brüder? Auch der Ausdruck τοῖσι δρῶσι scheint nicht glücklich gewählt zu sein; die Wirkung des Berichtes wird geschwächt, wenn der Kampf als ein Schauspiel bezeichnet wird, wie es mit der Gegenüberstellung der ὁρῶντες und der δρῶντες geschieht. Und wie kann ein vernünftiger Dichter überhaupt die Frage aufwerfen oder entscheiden lassen, ob hier oder dort mehr Schweiss vergossen wurde? Tilgen wir den ungeschickten V. 1389, so ist es nicht schwer die vorhergehenden Worte mit einer sehr gelinden Aenderung herzustellen; es muss einfach heissen πᾶσιν δὲ τοῖς ὁρῶσιν ἐστάλασσ' ἱδρώς.

Offenbar wurde statt ΠΑCΙΝ gelesen ΠΛΕΙΝ. Man emendirte dafür πλείων, und fand sich nunmehr durch den Comparativ veranlasst eine vermeintliche Lücke auszufüllen, d. h. dem Euripides einen ganz abgeschmackten Vers unterzuschieben. Der erste Theil dieses Verses war durch den Comparativ πλείων bedingt, die Worte διὰ φίλων ὀρρωδίαν dienen nur zur Vervollständigung des Trimeters.

Von der Iocasta, die ihre Söhne tödtlich verwundet findet, heisst es:

1433 προσπίτνουσα δ' ἐν μέρει τέκνα
ἔκλαι' ἐπῄνει τὸν πολὺν μαστῶν πόνον στένουσα.

Kann es wohl etwas abgeschmackteres geben als das μαστῶν πόνον? Von der Mühe und Arbeit der Mütter bei dem Warten und Pflegen und Erziehen ihrer Kinder ist zu allen Zeiten in Poesie und Prosa oft und viel geredet worden; aber nie meines Wissens ist es jemand in den Sinn gekommen zu behaupten dass das Stillen der Kinder die Hauptarbeit wäre: Arme, Hände und Füsse werden viel mehr angestrengt als die Brüste. Gesetzt aber auch Iocasta hätte ein besonderes Leiden beim Säugen ihrer Kinder zu bestehen gehabt, immer würde ihr πόνος durch den Tod der Söhne nicht vergrössert worden sein, und sie hätte nicht ihre grosse Anstrengung zu beklagen, sondern nur die Fruchtlosigkeit dieser Anstrengung. Statt τὸν πολὺν μαστῶν πόνον muss es mit andern Worten heissen τὸν

πολὺν μάτην πόνον. Statt anderer Stellen genügt Tro. 757: ὦ νέον ὑπαγκάλισμα μητρὶ φίλτατον, ὦ χρωτὸς ἡδὺ πνεῦμα· διὰ κενῆς ἄρα ἐν σπαργάνοις σε μαστὸς ἐξέθρεψ' ὅδε, μάτην δ' ἐμόχθουν καὶ κατεξάνθην πόνοις. Dass Kirchhoff diese Verbesserung, die ich bereits in der ersten Ausgabe gemacht habe, weder in den Text aufgenommen noch in den Anmerkungen erwähnt hat, ist befremdlich: schwerlich wird er im Stande sein das überlieferte μαστῶν gegen den Vorwurf der äussersten Albernheit zu schützen.

Der Bote schliesst seinen Bericht mit den Worten:

πόλει δ' ἀγῶνες οἱ μὲν εὐτυχέστατοι
τῇδ' ἐξέβησαν, οἱ δὲ δυστυχέστατοι.

Es ist bekannt dass die Tragiker im Allgemeinen es vermieden haben auf einander folgenden Versen einen gleichlautenden Ausgang zu geben, und es dürfte sich keine zweite Stelle finden, die in dieser Hinsicht mit Alc. 782 ff. verglichen werden könnte:

βροτοῖς ἅπασι κατθανεῖν ὀφείλεται,
κοὐκ ἔστι θνητῶν ὅστις ἐξεπίσταται
τὴν αὔριον μέλλουσαν εἰ βιώσεται·
τὸ τῆς τύχης γὰρ ἀφανὲς οἷ προβήσεται.

Ob von diesen vier Versen die drei ersten interpolirt sind oder ob Euripides das fortgesetzte Homoeoteleuton sich gestattet hat, darüber kann gestritten werden; sicherlich aber ist die Häufung der gleichen Verbalendungen für das Ohr weniger unangenehm als die Aufeinanderfolge der Versenden οἱ μὲν εὐτυχέστατοι und οἱ δὲ δυστυχέστατοι. Je leichter es war einen solchen Missklang zu meiden, um so wahrscheinlicher ist es dass die jetzige Lesart auf jenem Fehler beruht, der schon oben S. 53 f. berührt wurde. Ich vermuthe

πόλει δ' ἀγῶνες οἱ μὲν εὐτυχέστατοι
τῇδ' ἐξέβησαν, οἱ δὲ δυσποτμώτατοι.

Ueber die Anwendung des Wortes δύσποτμος wo von Sachen die Rede ist und über das Omega der drittletzten Silbe vgl. Phoen. 1345: οἶμοι ξυμφορᾶς βαρυποτμωτάτας, 1348: καὶ πῶς γένοιτ' ἂν τῶνδε δυσποτμώτερα u. ä.

τίς Ἑλλὰς ἢ βάρβαρος ἢ
τῶν προπάροιθ' εὐγενετᾶν ἕτερος
ἔτλα κακῶν τοσῶνδ'
αἵματος ἀμερίου
τοιάδ' ἄχεα φανερά;

Hermanns Versuch für diese Verse eine antistrophische Responsion zu gewinnen können wir füglich auf sich beruhen lassen, da einerseits die von ihm angewendeten Mittel sehr willkürlich sind, er geht nämlich nur auf die Herstellung der von ihm vorausgesetzten Responsion aus, und da andrerseits der Erfolg zu weit hinter den Bemühungen zurückbleibt, sofern die von ihm beliebte Responsion mehrere unzulässige Concessionen beansprucht. Halten wir uns lediglich an den Sinn der vorstehenden Worte, so ist es zunächst klar

dass Ἑλλάς für Ἕλλην zu nehmen ist, wie bei Soph. Trach. 1060: οὔτ' Ἑλλὰς οὔτ' ἄγλωσσος, und in einem Orakel bei Phlegon in Müllers Fragm. Hist. vol. 3 p. 603 f.: ὅτε δῆμον ἐναιεν Ἑλλάδα. Vgl. Antiatt. p. 97, 4: Ἑλλάς· ὁ ἀνήρ. Σοφοκλῆς Αἴαντι Λοκρῷ (fr. 16), eine Angabe deren Richtigkeit ohne Grund bezweifelt worden ist. Eine wirkliche Schwierigkeit bieten die Worte αἵματος ἀμερίου. Kirchhoff vermuthet αἵματος ἀμετέρου, offenbar deshalb weil Antigona um ihre nächsten Angehörigen trauert. Allein weder ist es glaublich dass das gewählte ἀμέριος von einem Abschreiber herrührt, noch ist die Verbindung κακῶν τοσῶνδ' αἵματος ἀμετέρου τοιάδ' ἄχεα erklärlich, und statt ἀμετέρου αἵματος müsste doch vielmehr gesagt sein αἵματος συγγενοῦς, da Antigona nur fragen kann: "wer erduldete einen gleichen Schmerz durch den Verlust seiner Angehörigen", nicht aber "durch den Verlust meiner Angehörigen". Das Wort ἀμέριος weist darauf hin dass von den Menschen überhaupt die Rede ist. Die Menschen werden ἡμέριοι genannt oder ἐφήμεροι und ἐφημέριοι wegen ihres kurzen und flüchtigen Daseins. Vgl. Hesychius: ἡμερίων· ἀνθρώπων. Eur. Phoen. 130: οὐχὶ πρόσφορος ἀμερίῳ γένναι u. ähnl. Hieraus ergiebt sich zunächst dass αἵματος unpassend ist; man erwartet dafür einen Begriff wie γένος. Oder sollte wirklich αἷμα ἀνθρώπων im Sinne von γένος ἀνθρώπων jemals gesagt worden sein? Vermuthlich ist zu lesen σπέρματος ἀμερίου. Gerade bei Euripides ist diese Anwendung des Wortes σπέρμα ziemlich häufig, während sonst etwas ganz entsprechendes sich kaum finden dürfte. Vgl. Hec. 254: ἀχάριστον ὑμῶν σπέρμ' ὅσοι δημηγόρους ζηλοῦτε τιμάς. Iphig. Aul. 520: τὸ μαντικὸν πᾶν σπέρμα φιλότιμον κακόν (wo ich κυρεῖ vorziehen würde). fr. 332, 6: οὕτω δὲ θνητῶν σπέρμα τῶν μὲν εὐτυχεῖ λαμπρᾷ γαλήνῃ, τῶν δὲ συννέφει πάλιν. fr. 977: εἴθ' ἦν ἄφωνον σπέρμα δυστήνων βροτῶν. fr. 1001: ἀεί ποτ' ἐστὶ σπέρμα κηρύκων λάλον. Zweitens aber ist nun auch klar dass die Worte αἵματος (oder σπέρματος) ἀμερίου mit τις ἕτερος zu verbinden sind, d. h. dass V. 1511 und 1512 ihre Stelle tauschen müssen. Danach würde sich folgende Schreibung ergeben:

τίς Ἑλλὰς ἢ βάρβαρος ἥ
τῶν προπάροιθ' εὐγενετᾶν ἕτερος
σπέρματος ἀμερίου
ἕτλα κακῶν τοσῶνδε
τοιάδ' ἄχεα φανερά;

Um den Hiatus in ἀμερίου ἕτλα zu vermeiden, habe ich statt ἕτλα κακῶν τοσῶνδε vorgeschlagen τοσῶνδ' ἕτλα κακῶν. Derselbe Fehler ist oben 1488 f. zu beseitigen:

οὐ προκαλυπτομένα — φοίνικ' ἐρύθημα προσώπου,
αἰδομένα φέρομαι βάκχα νεκύων.

Statt αἰδομένα wird zu verbessern sein καδομένα. "Nicht verschleiert", sagt Antigona, "nicht geschminkt eile ich dahin gleich einer Bacchantin, καδομένα νεκύων, trauernd um die Todten". Erst so ist der Genetiv νεκύων gerechtfertigt, den Hartung tilgen wollte, weil die Verbindung βάκχα νεκύων des Sinnes wegen unstatthaft ist. Die dorische Form καδομενος findet sich bei Pindar Ol. 6, 47.

τίς ἄρ' ὄρνις ἢ δρυὸς ἢ ἐλάτας
ἀκροκόμοις ἀμφὶ κλάδοις
ἑξομένα μονομάτορος ὀδυρμοῖς
ἐμοῖς ἄχεσι συνῳδός;

Die Praeposition ἀμφὶ fehlt in der besten Handschrift, und wir dürfen kein Bedenken tragen sie zu tilgen, zumal da sie für den Sinn nichts weniger als angemessen ist; der klagende Vogel sitzt in den Zweigen oder unter denselben, nicht aber um dieselben herum. Es wird zu Gunsten des Metrum zu schreiben sein ἀκροκόμοισι κλάδοις ἑξομένα, wo der Dativ local gebraucht ist wie Θάμνοις Soph. El. 55 und ähnliches sonst. Im folgenden sind die Worte μονομάτορος ὀδυρμοῖς ganz unverständlich. Wenn die besten Handschriften μονομάτερος bieten, so ist dies nichts weiter als ein bei den Composita von μήτηρ überaus häufiger Fehler, vgl. Lobeck Phryn. p. 659 f. Die Scholien scheinen μονομάτωρ gelesen zu haben; wenigstens erklären sie ἡ μεμονωμένη τῆς μητρός. Hiernach schreibt Hermann:

ἑξομένα μονομά-
τωρ ἐμοῖς ἄχεσι συνῳδός;

Indess hat die Annahme dass ὀδυρμοῖς eine Interpretation von ἄχεσι sei, nicht die mindeste Probabilität; oder ist es vielleicht wenige Verse früher einem Abschreiber in den Sinn gekommen die Worte τοιάδ' ἄχεα φανερά 1513 in ähnlicher Weise zu erläutern? Lieber also möchte ich lesen

ἑξομένα μονομάτορ' ὀδυρμὸν ἵησιν
ἐμοῖς ἄχεσι συνῳδός.

Mit μονομάτωρ ὀδυρμός vgl. κακόγαμβρον γόον Rhes. 260.

αἴλινον αἰάγμασιν ἁ
τοῖσδε προκλαίω μοναδ' αἰῶνα
διάξουσα τὸν ἀεὶ χρόνον ἐν
λειβομένοισιν δακρύοισιν.

Vergleicht man mit dieser Stelle die Worte des Oedipus V. 1539—42:

τί μ', ὦ παρθένε, βακτρεύμασι τυ-
φλοῦ ποδὸς ἐξάγαγες εἰς φῶς
λεχήρη σκοτίων ἐκ θαλάμων
οἰκτροτάτοισιν δακρύοισιν,

so ist die strophische Responsion unverkennbar; V. 1521 f. und 1541 f. entsprechen sich vollkommen genau; vor αἴλινον 1519 fehlen dagegen zwei Silben, ⏑ –, und 1520 steht αἰῶνα wo die Antistrophe εἰς φῶς bietet. Wie die erste Incongruenz zu heben sei, lasse ich dahin gestellt: unzweifelhaft aber scheint es mir dass statt αἰῶνα die kürzere dichterische Form αἰῶ herzustellen ist. Vgl. Anecd. Bekk. p. 363, 17: αἰῶ τὸν αἰῶνα κατὰ ἀποκοπήν Αἰσχύλος εἶπεν. Diese Notiz bezieht sich, wie G. Hermann erkannt hat, auf Choeph. 350:

ἐπιστρεπτὸν αἰῶ, wo die Abschreiber natürlich wiederum das ihnen bekannte αἰῶνα substituirt haben. Auch bei Soph. El. 1087 ist dieselbe Form herzustellen:

ὡς καὶ σὺ πάγκλαυτον αἰῶνα κοινὸν εἶλου.

Vielmehr, wie ich in meiner Ausgabe gezeigt habe, αἰᾶ σύνοικον εἶλου. Ein unbekannter Dichter (Anthol. append. 200, 7) sagt endlich: ὄφρ' ἂν ἐς αἰῶ Σώστρατος ἐν φῶτι μένοις μυρίον αἶνον ἔχῃ. Ueber analoge Formen wie Ἀπόλλω, Ποσειδῶ u. a. genügt es auf Buttmann Griech. Sprachl. I p. 198 zu verweisen.

1527 ματρὸς ἐμᾶς διδύμοισι γάλακτος παρὰ μαστοῖς.

Unter γάλακτος μαστοί versteht man μαστοὶ γαλακτοῦχοι, oder genauer gesagt, Brüste die vor vielen Jahren γαλακτοῦχοι waren, seit geraumer Zeit aber es nicht mehr sind. Mit andern Worten, γάλακτος μαστοί ist, selbst für den Fall dass es an sich gesagt werden könnte, doch hier wo von der Iocasta geredet wird, vollkommen undenkbar. Ehemals habe ich vorgeschlagen διδύμοισι γάλακτος in διδύμοις τάλανος zu ändern. Betrachtet man jedoch das Metrum der zunächst folgenden Worte,

ἢ πρὸς ἀδελφῶν οὐλόμεν' αἰκίσματα νεκρῶν,

so wird es wahrscheinlicher dass zu lesen ist διδύμοισι ταλαίνας παρὰ μαστοῖς.

Antigona ruft ihrem greisen Vater zu er möge erscheinen: πάτερ γεραιέ, δεῖξον, Οἰδιπόδα, σὸν αἰῶνα μέλεον, ὃς ἐπὶ

δώμασιν αἰέριον σκότον ὄμμασι

1535 σοῖσι βαλὼν ἕλκεις μακρόπνουν ζωάν.

Vermuthlich war Oedipus nicht ἐπὶ δώμασιν, sondern ἐν δώμασιν, wie er bald nachher 1540 sagt: ἐξάγαγες εἰς φῶς σκοτίων ἐκ θαλάμων. Das Epitheton μακρόπνουν ist nicht angemessen: μακρόπνους bildet sonst immer einen Gegensatz zu βραχύπνους oder δύσπνους, hier kann μακρόπνους ζωά nichts sein als "*vita longa, utpote in qua longo tempore spiratur*" (Thes. Gr. L.), d. h. der zweite Theil des Compositum ist entweder überflüssig und nichtssagend oder geradezu störend. Denn urgirt man den Begriff πνεῖν, so muss es scheinen als fände Antigona dass ihr Vater Oedipus schon zu lange athmete, d. h. als wünschte sie ihm den Tod. Ohne Zweifel ist zu lesen μακρόπονον ζωάν, ein langes mühseliges Leben. Für diese Aenderung spricht die in den Handschriften überlieferte Variante μακρόπουν ζωάν. Dass wir nicht im Stande sind das Wort μακρόπονος anderweitig zu belegen, thut der Evidenz der Verbesserung keinen Eintrag, da das Wort vollkommen richtig gebildet ist.

In den zunächst folgenden Worten 1536 ff. glaubte Kirchhoff handgreifliche Spuren einer antistrophischen Responsion zu entdecken: die Strophe sei enthalten in V. 1536—38, die Antistrophe in V. 1539—45. Er sagt hierüber: "*antistrophicae responsionis vestigia apparent manifesta. nihilominus in textu quidquam novare nefas duxi, ne vera genuinae scripturae vestigia quamvis evanida prava corrigendi libidine, quae corrigi nequeunt, delevisse videar, equidem, ut dicam, quid sentiam, haec sic aliquando ab Euripide disposita fuisse arbitror:*

str. κλύεις, ὦ κατ[ά τ'] αὐλάν . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . ἀλαίνων γεραι-
ὸν πόδα δεμνίοις
δύστανον ἰαύων;

ant. OI. τί μ', ὦ παρθένε, βακτρεύμασι τυφ-
λοῦ ποδὸς ἐξάγαγες εἰς φῶς
λεχήρη σκοτίων ἐκ θαλάμων
οἰκτροτάτοισιν δακρύοισιν,
πολιὸν αἰθέρος ἀφανὲς εἴδωλον ἢ
νέκυν ἔνερθεν ἢ
π[ο]τανὸν ὄνειρον;"

Was lässt sich nicht alles möglich machen, wenn man in dem Ansetzen von Lücken sich einige Freiheiten gestattet! Je grösser die Lücke, desto leichter die Mühe; und so sicher es auch ist, dass die Euripideischen Dramen unendlich mehr durch fremde Zuthaten verwässert und verunstaltet als in Folge von Auslassungen zusammengeschrumpft sind, so wird doch derjenige Theil des gelehrten Publicum, dem eine Einsicht in die Schicksale der alten Texte abgeht, und somit der bei weitem grössere Theil, es viel lieber sehen wenn durch die harmlose Einschaltung einiger punctirter Zeilen seine Phantasie angeregt wird, als wenn die classische Litteratur den baaren Verlust eines oder mehrerer Verse tragen soll. Die von Kirchhoff beabsichtigte Responsion ist indess nicht erreicht, wenn —ὸν πόδα δεμνίοις und νέκυν ἔνερθεν ἢ sich gegenübersteht oder δύστανον ἰαύων und ποτανὸν ὄνειρον. Am meisten aber widerstrebt seiner Anordnung ein Umstand: V. 1536 sind vier Bacchien überliefert,

κλύεις, ὦ κατ' αὐλὰν ἀλαίνων γεραιόν,

die dem oben S. 61 f. erwähnten Gesetz entsprechen; diese Bacchien dem blinden Zufall beimessen, wie es Kirchhoff thut, wenn er meint Euripides habe erst κατά τ' αὐλάν und dann vier Verse später ἀλαίνων geschrieben, heisst die Sehenden für blind und die Blinden für sehend erklären. Die vier Bacchien κλύεις — γεραιὸν lehren auf das bestimmteste dass zu V. 1536 ein antistrophischer Vers in dem Kommos 1485—1581 nicht vorhanden ist.

Den Rückblick auf sein von zahllosen Leiden erfülltes Leben beginnt Oedipus mit den Worten:

1393 ὦ μοῖρ', ἀπ' ἀρχῆς ὥς μ' ἔφυσας ἄθλιον
καὶ τλήμον', εἰ τις ἄλλος ἀνθρώπων ἔφυ·
ὃν καὶ πρὶν εἰς φῶς μητρὸς ἐκ γονῆς μολεῖν,

ἄγονον Ἀπόλλων Λαΐῳ μ' ἐξέσπισε
φονέα γενέσθαι πατρός· ὦ τάλας ἐγώ.

Den zweiten dieser Verse hat zuerst Valckenaer als unecht bezeichnet, nach ihm die Gebrüder Dindorf, Apitz, G. Hermann, Geel und andere.; Kirchhoff hat ihn geduldet ohne auch nur den leisesten Verdacht zu äussern. "*Recte dixit Matthiae legitimam loquendi rationem fuisse:* καὶ τλήμον', εἴ τιν' ἄλλον ἀνθρώπων ποτέ. *Sic quidem scriptus ferri potest versus. Posset etiam, si sic scriptus esset:* τλήμων γάρ, εἴ τις ἄλλος ἀνθρώπων, ἔφυν. *Ut vero in libris scriptus legitur, non puto ab Euripide et ne ab histrionibus quidem profectum esse*". So sagt G. Hermann; und nicht minder richtig ist die Bemerkung von Geel, "*vulgata verba significant: si quis alius hominum natus est*". Zu 1598 macht Kirchhoff den Vorschlag Λαΐῳ 'τεθεσπίκει. Offenbar war es nicht der Aorist an dem er Anstoss nahm, sondern das zum Relativpronomen ὅν pleonastisch hinzugefügte Personalpronomen με. Dieser Pleonasmus lässt sich indess gegen jeden Zweifel sicher stellen. Zunächst ist es nicht ungewöhnlich dass der durch das Relativum ausgedrückte Begriff, besonders nach einem eingeschalteten Zwischensatze, nochmals durch ein anderes Pronomen ausgedrückt wird. Menander Anth. Pal. 7, 72: χαῖρε, Νεοκλείδα (vielleicht Νεοκλειδᾶν) δίδυμον γένος, ὧν ὁ μὲν ὑμῶν πατρίδα δουλοσύνας ῥύσασθ', ὁ δ' ἀφροσύνας. Callimachus epigr. 44: ὧν ὁ μὲν αὐτῶν εἶλκεν, ὁ δ' οὐκ εἴα σώφρονα θυμὸν ἔχειν. Nonnus Dionys. 1, 187: ὧν ὁ μὲν αὐτῶν ὄρθιον ἀξονίοιο διέτρεχεν ἄντυγα κύκλου — ὁ δὲ Κηφέος ἐγγύθι κούρης κτέ. Soph. Trach. 1208: ὧν ἔχω παιώνιον καὶ μοῦνον ἰατῆρα τῶν ἐμῶν κακῶν. Demosth. de Halon. § 38: φησὶ δὲ καὶ τοὺς αἰχμαλώτους ἡμῶν ἀποδεδωκέναι· ὃς τὸν μὲν Καρύστιον, τὸν πράξενον τῆς ἡμετέρας πόλεως, ὑπὲρ οὗ ὑμεῖς τρεῖς πρεσβείας ἐπέμψατε ἀπαιτοῦντες, τοῦτον τὸν ἄνδρα ἐκεῖνος οὕτω σφόδρα ὑμῖν ἐβούλετο χαρίσασθαι ὥστ' ἀπέκτεινε. Kirchhoff selbst hat Andr. 710 die Ueberlieferung geduldet, ἣν δ' ἐξ ἡμῶν γεγὼς ἑλᾷ δι' οἴκων τήνδ' ἐπισπάσας κόμης, eine Stelle die ich in dieser Gestalt nicht für richtig halte. Sodann aber, und dies kommt vorzugsweise hier in Betracht, ist με ein so kleines und unbedeutendes Wörtchen dass es sehr leicht pleonastisch gebraucht werden kann. Vgl. Phoen. 497: ἐμοὶ μέν, εἰ καὶ μὴ καθ' Ἑλλήνων χθόνα τεθράμμεθ', ἀλλ' οὖν ξυνετά μοι δοκεῖς λέγειν. Soph. Phil. 349: οὐ πολὺν χρόνον μ' ἐπέσχον μή με ναυστολεῖν ταχύ. Oed. Col. 1279: ὡς μή μ' ἄτιμον τοῦ θεοῦ γε προστάτην οὕτως ἀφῇ με. Trach. 218: ἰδού μ' ἀναταράσσει εὐθὺ μ' ὁ κισσός. Aristoph. Com. 2 p. 997: ἔδει δέ γέ σε βληθεῖσαν εἰς Ἀλμυρίδας τηδὶ μὴ παρέχειν σε πράγματα. Menander Com. 4 p. 107: δι' ὅπερ ἐγώ σε φημὶ δεῖν, ὅσον χρόνον εἶ κύριος, χρῆσθαί σε γενναίως, πάτερ. Soph. Oed. R. 248: κατεύχομαι δὲ τὸν δεδρακότ', εἴτε τις εἷς ὢν λέληθεν εἴτε πλειόνων μέτα, κακὸν κακῶς νιν ἄμορον ἐκτρῖψαι βίου. Trach. 287: αὐτὸν δ' ἐκεῖνον, εὖτ' ἂν ἀγνὰ θύματα ῥέξῃ πατρῴῳ Ζηνὶ τῆς ἁλώσεως, φρόνει νιν ὡς ἥξοντα. Oed. R. 270: καὶ ταῦτα τοῖς μὴ δρῶσιν εὐχομαι θεοὺς μήτ' ἄροτον αὐτοῖς γῆς ἀνιέναι τινὰ μήτ' οὖν γυναικῶν παῖδας. Hiernach ist die Verbindung von ὅν und με nicht weiter zu beanstanden.

1600 ἐπεὶ δ' ἐγενόμην, αὖθις ὁ σπείρας πατὴρ

κτείνει με νομίσας πολέμιον πεφυκέναι·
χρῆν γὰρ Ξανεῖν νιν ἐξ ἐμοῦ· πέμπει δέ με
μαστὸν ποΞοῦντα Θηρσὶν ἄξλιον βοράν.

Ueber den ersten Vers bemerkt Geel: "*Suspiceris pro* αὖτις *scriptum fuisse* αὐτίκ', *quae facile permutari potuerunt, et nonnumquam permutata sunt. Sed haec Oedipi verba sic interpretanda puto, ut* αὖΞις *sit vicissim.*" Aber sollte *vicissim* hier einen passenden oder auch nur erträglichen Sinn geben? Schwerlich: denn in den Worten ἐπεὶ δ' ἐγενόμην ist nicht ein Handeln sondern ein Leiden des Oedipus ausgedrückt; sein Geborenwerden kann nicht als etwas betrachtet werden was er seinem Vater anthut, und somit ist αὖΞις in dem von Geel geforderten Sinn unbrauchbar. Auch αὐτίκα wäre müssig: ob Oedipus sofort nach seiner Geburt oder etwas später ausgesetzt wird, verschlägt sehr wenig. Es ist nothwendig zu lesen αὐτὸς ὁ σπείρας πατήρ, wodurch Oedipus die fühllose Härte seines leiblichen Vaters angemessen bezeichnet. Im nächsten Verse ist das hergebrachte πεφυκέναι schlecht verbürgt; die besseren Handschriften bieten statt dessen δυσδαίμονα (so ABF*C*), und in zweien derselben (AB) wird πεφυκέναι als Variante angemerkt. Wenn Kirchhoff sagt, *fortasse neutrum verum*, so ist dies richtig, aber in anderem Sinne als er es gemeint haben mag. Die folgenden Worte nämlich, χρῆν γὰρ Ξανεῖν νιν ἐξ ἐμοῦ, enthalten nichts was man nicht aus dem vorhergehenden (V. 1598 f.) bereits wüsste, und sie sind im Ausdrucke so ungeschickt wie möglich. Der Verfasser hatte im Sinne, ἐφοβεῖτο γὰρ μὴ ἐξ ἐμοῦ Ξάνοι: die von ihm gebrauchte Wendung führt dagegen nothwendig zu dem Missverständniss, als wollte Oedipus sagen, Laius hätte von ihm getödtet werden sollen. Somit halte ich die Worte πεφυκέναι (oder δυσδαίμονα) — ἐμοῦ für interpolirt und schreibe:

ἐπεὶ δ' ἐγενόμην, αὐτὸς ὁ σπείρας πατὴρ
κτείνει με νομίσας πολέμιον· πέμπει δέ με
μαστὸν ποΞοῦντα Θηρσὶν ἄξλιον βοράν.

Aus einer zu νομίσας πολέμιον beigeschriebenen Erläuterung gingen zunächst die Worte χρῆν γὰρ Ξανεῖν νιν ἐξ ἐμοῦ hervor, und zur Ausfüllung des Trimeters nahm man entweder δυσδαίμονα oder πεφυκέναι hinzu. Bedenklich bleibt noch πολέμιον, da ein kriegerisches Verhältniss zwischen Laius und Oedipus weder statt gefunden hat noch durch das Orakel des Apollon irgend wie angedeutet war. Vielleicht ist πολέμιον gemacht aus ὀλέμιον d. h. ᾽λέΞριον, denn μ und Ξρ werden in den Handschriften öfters mit einander vertauscht[1]).

1) Ein evidentes Beispiel für diese Verwechslung findet sich bei Soph. Trach. 1138, wo Hyllus von seiner Mutter sagt:

στέργημα γὰρ δοκοῦσα προσβαλεῖν σέϑεν,
ἀπήμπλαχ', ὡς προσεῖδε τοὺς ἐνδον γάμους.

Vielmehr στέργηΞρα, wonach στέργημα aus dem Lexicon zu tilgen ist. Eben dahin gehört, wenn ich nicht irre, Soph. El. 851:

πανσύρτῳ παμμήνῳ πολλῶν
δεινῶν στυγνῶν τ' ἀχαίων.

Statt ἀχαίων hat Hermann αἰῶνι verbessert; in πανσύρτῳ παμμήνῳ scheint nichts anderes zu liegen als was ich in meiner Ausgabe vorgeschlagen habe, πανδύρτῳ παν–Θρήνῳ. Auf πανδύρτῳ ist auch Bergk gekommen, wogegen Meineke Philol. XIII p. 552 πανσύρτῳ für πανώλει nimmt und statt παμμήνῳ stillschweigend παλλύμῳ sub-

*

Cobet behauptet allerdings V. L. p. 246, *neminem umquam de homine* ὀλέθριος *dixisse*, und weist nach dass die Abschreiber gern ὀλέθριος statt ὄλεθρος da setzten wo das Nomen von Menschen gebraucht war. Ist dies richtig, so wird auch hier die gleiche Verderbniss vorausgesetzt werden dürfen, und dies um so eher, da πέμπει θηρσὶ βοράν ein höchst auffallender Ausdruck ist. Möglich dass die Stelle ehemals so lautete:

κτείνει με νομίσας ὄλεθρον· ἐκβάλλει δέ με
μαστὸν ποθοῦντα θηρσὶν ἄθλιον βοράν.

Dass die zuletzt geäusserte Vermuthung manches Bedenkliche hat, entgeht mir selbst keineswegs, und ich werde mich freuen wenn andere eine wahrscheinlichere Verbesserung ausfindig machen. Auch Sophocles Oed. R. 1343 wartet, um dies beiläufig zu bemerken, noch der Erledigung:

ἀπάγετ', ὦ φίλοι, τὸν ὀλέθριον μέγαν, τὸν καταρατότατον.

Gewöhnlich schreibt man mit Turnebus τὸν ὄλεθρον μέγαν, ich habe Erfurdts Aenderung τὸν μέγ' ὀλέθριον aufgenommen. Das Richtige ist noch zu suchen.

Auf die Frage welche Antigona an Creon richtet, was er über den unglücklichen Todten (Polynices) verfüge, erfolgt die Antwort: Ἐτεοκλέους βουλεύματ', οὐχ ἡμῶν τάδε. Hiermit ist in kürzester Weise bezeichnet dass Creon bei seinem früheren Ausspruche (1631—33) beharrt,

κηρύξεται δὲ πᾶσι Καδμείοις τάδε,
ὃς ἂν νεκρὸν τόνδ' ἢ καταστέφῃ χλῇ
ἢ γῆ καλύπτων, θάνατον ἀνταλλάξεται,

und dass er zur Beschönigung seiner Impietät gegen Polynices die dem Eteocles gebührende Pietät geltend macht. Antigona erwidert V. 1647:

ἄφρονά γε, καὶ σὺ μῶρος ὃς ἐπείθου τάδε.

Statt ἐπείθου (so AFbc) bieten einige Handschriften (BC) ἐπίθου. Der Aoristus ist hier ganz unzulässig: das Imperfectum lässt sich allenfalls verstehen; immer aber wird, wie schon Hermann erkannte, das Praesens den Vorzug verdienen, sowohl des Sinnes als des Rhythmus wegen. Ich vermuthe μῶρος εἰ πείθει τάδε, weil hieraus die jetzige Lesart μῶρος ὃς ἐπείθου τάδε sich am einfachsten erklärt.

Die Rache welche Creon am gefallenen Polynices nehmen will, bezeichnet Antigona als eine ungerechte, indem sie sagt: οὐκ ἔννομον γὰρ τὴν δίκην πράσσεσθέ νιν. Darauf heisst es weiter:

---

stituirt. Meinekes Erklärung von πάνσυρτος gründet sich auf Hesychius: πασσύριον· ἀντὶ τοῦ πασσυδίην. Αἰολεῖς τὸ πασσύριον ἡμῶν ἅπάντων γένος. Für diese Glosse wird folgende Herstellung versucht: πάσσυρτον· ἀντὶ τοῦ πασσυδίῃ. "διώλετο πάσσυρτον ἡμῶν ἄθλιον πάντων γένος" (oder ἀθλιώτατον γένος). Unbeachtet blieben hierbei zwei andere Stellen, die der Vermuthung πάσσυρτον statt πασσύριον nicht günstig sind, die Glosse des Hesychius: πασσύρως· ἄρδην, πανοικί, und Pollux 9, 143: πανδημεί, παγγενεί, πασσυδί· ὑπομίαρον γὰρ τὸ πασσυρεί. Aber gesetzt auch man konnte sagen πάνσυρτον τὸ γένος διώλετο, so folgt daraus keineswegs dass ein πάνσυρτος αἰὼν denkbar sei. Die beiden Verbesserungen πανδύρτῳ und πανδρήνῳ stützen sich gegenseitig; denn nothwendig wird hier die Verbindung zweier Synonyma gefordert, wie nachher δεινῶν und στυγνῶν zusammenstehen.

1652 ΚΡ. εἴπερ γε πόλεως ἐχθρὸς ἦν, οὐκ ἐχθρὸς ὤν.
ΑΝΤ. οὐκοῦν ἔδωκε τῇ τύχῃ τὸν δαίμονα.
ΚΡ. καὶ τῷ τάφῳ νῦν τὴν δίκην παρασχέτω.

Jeder einzelne dieser drei Verse zwingt uns an der Richtigkeit der Lesart zu zweifeln. In V. 1652 sind die Worte οὐκ ἐχθρὸς ὤν unverständlich: sicherlich war doch Polynices nicht gleichzeitig von Liebe und von Hass gegen sein Vaterland erfüllt; und wenn er gleichzeitig ἐχθρὸς und οὐκ ἐχθρὸς war, so begreift man nicht, weshalb dieser Widerspruch in dem er mit sich selbst stand ihn strafbar machen soll; strafbar bleibt nur die Aeusserung seines Hasses. Daraus geht zugleich hervor dass die Worte οὐκ ἐχθρὸς ὤν müssig und zwecklos sind, wenn sie auf die frühere Zeit bezogen werden: dass Polynices vor dem Zuge gegen Theben keinen Hass gegen sein Vaterland hegte, kann seine Schuld nicht steigern. Auch scheint es mir sehr hart, wenn zum Vordersatz εἴπερ πόλεως ἐχθρὸς ἦν der Nachsatz ἔννομον τὴν δίκην πρασσόμεσθά νιν ergänzt wird, zumal da die Negation ausschliesslich zu ἔννομον gehört, so dass οὐκ ἔννομον τὴν δίκην so viel ist als ἄνομον τὴν δίκην. Mit andern Worten, wenn Antigona sagt: die Rache die ihr an Polynices nehmt, ist gesetzwidrig, so kann Creon nicht entgegnen was die jetzigen Worte besagen: so gewiss er das Vaterland hasste ohne es zu hassen. Es ist, wie ich glaube, zu verbessern:

εἴπερ γε πόλεως ἐχθρὸς ἦν, ἐχθαρτέος.

"So gewiss er das Vaterland hasste, muss er gehasst werden". Die Gegenüberstellung von ἐχθρός und ἐχθαρτέος findet sich auch bei Soph. Ai. 679: ὅ τ' ἐχθρὸς ἡμῖν ἐς τοσόνδ' ἐχθαρτέος ὡς καὶ φιλήσων αὖθις. An dem folgenden Verse,

οὐκοῦν ἔδωκε τῇ τύχῃ τὸν δαίμονα,

hat zuerst Hartung Anstoss genommen, gewiss mit Fug und Recht; denn die Worte lassen sich weder übersetzen noch verstehen. Verfehlt aber ist seine Aenderung,

οὐκοῦν ἔτισε τῇ τύχῃ τὸν δαίμονα,

wie die beigefügte Umschreibung: er hat mit seinem Schicksale die ihm von der Vorsehung verhängte Verirrung (τὸν δαίμονα) bezahlt und gebüsst. Hartung erzählt in seiner Ausgabe S. 262, die göttliche Fügung oder Vorsehung werde δαίμων genannt, und zugleich versteht er unter δαίμων die von einem Gott verhängte Verirrung, also das was die Griechen ἄτη nennen. Es liegt auf der Hand dass diese beiden vermeintlichen Bedeutungen von δαίμων mit einander unverträglich und der wirklichen Bedeutung des Wortes δαίμων in gleicher Weise völlig fremd sind. Was δαίμων bedeute, zeigt die vortreffliche Abhandlung von Lehrs Popul. Aufsätze S. 123 ff.; dass es nicht bedeutet was Hartung wollte und dass es unmöglich ist zu sagen ἔτισε τὸν δαίμονα, lehren die von Hartung selbst angeführten Stellen, Trag. adesp. 72, 3: εἴτε τύχα τις εἴτε δαίμων τὰ βρότεια κραίνει, und Eur. Cycl. 606: τὴν τύχην μὲν δαίμον' ἡγεῖσθαι χρεών, τὰ δαιμόνων δὲ τῆς τύχης ἐλάσσονα. Einen andern Vorschlag über Phoen. 1653 macht Kirchhoff; er vermuthet

οὐκοῦν ἔδωκε τῇ τύχῃ οὐκ εὐδαίμονα.

Hier ist zunächst die Synizesis τύχῃ οὐκ auffallend, die weder durch ἢ οὐ noch durch

μὴ οὐ hinlänglich gesichert ist, so lange nicht nachgewiesen wird dass die Tragiker sich Freiheiten gestattet haben wie wir sie bei Homer finden Od. Ω, 247: οὐκ ὄγχνῃ, οὐ πρασιῇ τοι ἄνευ κομιδῆς κατὰ κῆπον[1]). Viel befremdlicher ist die Verbindung von οὐκοῦν und οὐκ εὐδαίμονα, zumal wenn es richtig ist was Elmsley zu Eur. Heracl. 256 bemerkt: "*Discrimen quod inter* οὐκοῦν *et* οὔκουν *statuunt grammatici, verissimum est, si Plutarchi aut Luciani scripta pro vera Graecitatis norma accipiantur. Apud veteres Atticos utraque particula semper propriam suam significationem servat. Ego ubique* οὐκ οὖν *scribo, adhibita, prout opus est, vel omissa interrogatione.*" Vgl. Elmsley zu Eur. Bacch. 191. Endlich welcher Grieche hat jemals gesagt τῇ τύχῃ εὐδαίμονα (oder οὐκ εὐδαίμονα) διδόναι, und was soll diese Ausdrucksweise bedeuten? Etwas besser als die beiden erwähnten Vermuthungen ist Kaysers οὐκοῦν ἔδωκε τὴν δίκην τῷ δαίμονι (N. Jahrb. f. Philol. u. Paed. LXXV, 2 p. 126): doch scheint auch damit die Stelle noch nicht geheilt zu sein. Der Tod des Polynices ist eine Genugthuung nicht für den δαίμων, sondern für die Stadt; gegen diese hatte sich Polynices vergangen, sie forderte die Bestrafung des Schuldigen, und nach Antigonas Ansicht war Polynices bestraft, indem er den Tod gefunden hatte. Somit erwartet man dem Sinne nach etwa

οὐκ οὖν ἔδωκε τὴν δίκην Ἅιδου πόλει;

Vgl. Heracl. 1025: οὗτος δὲ δώσει τὴν δίκην Ἅιδου ἐμοί. — Endlich ist in Betreff des Verses

καὶ τῷ τάφῳ νῦν τὴν δίκην παράσχέτω

zu bemerken, dass τάφῳ hier völlig unpassend ist. Unter τῷ τάφῳ kann man nur das Grab des Polynices verstehen: hat dies von Polynices eine Genugthuung zu fordern? oder ist der Ausdruck τῷ τάφῳ τὴν δίκην παρέχειν so viel als ἄταφον εἶναι? Vielleicht wissen andere der Schwierigkeit abzuhelfen.

ΟΙΔ. ἰὼ ἰώ, δυστυχεστάτας φυγᾶς·
ἐλαύνων τὸν γέροντά μ' ἐκ πάτρας.
ἰὼ ἰώ, δεινὰ δεύ' ἐγὼ τλάς.

Der Genetiv φυγᾶς ist durch die besten Handschriften (ABF) geschützt; um so weniger begreife ich was Kirchhoff bewogen hat den Accusativus plur. φυγάς in den Text zu setzen. Im folgenden Verse vermisst man zu ἐλαύνων das Subject, und statt des Participium ἐλαύνων sollte man vielmehr den Indicativus ἐλαύνει erwarten. Dem Sinne würde genügen

Κρέων ἐλαύνει τὸν γέροντά μ' ἐκ πάτρας.

Doch ist es bei dem argen Zustande der letzten Partie unseres Stückes kaum möglich mit einiger Sicherheit eine Vermuthung zu wagen.

Antigona bricht in den Schmerzensruf aus

1) Mit Unrecht zieht Krüger Gramm. II § 13, 6 Anm. 2 eben dahin den Hesiodeischen Vers Op. 640: Ἄσκρῃ, χεῖμα κακῇ, θέρει ἀργαλέῃ, οὐδέ ποτ' ἐσθλῇ. Hier ist vielmehr eine Synizesis der beiden letzten Silben in ἀργαλέῃ anzunehmen, wie in den Homerischen Worten χρυσέῳ ἀνὰ σκήπτρῳ.

τάλαιν' ἐγὼ συγγόνου Τ' ὑβρισμάτων,
ὃς ἐκ δόμων νέκυς ἄταφτος οἴχεται
μέλεος, ὄν, εἰ με καὶ θανεῖν, πάτερ, χρεών,
σκοτίᾳ γᾷ καλύψω.

Den zweiten Vers hat ein alter Abschreiber zu einem Trimeter zu machen gesucht, indem er schrieb

ὃς ἐκ δόμων ἄταφτος οἴχεται νέκυς.

Mit Recht haben die Kritiker diese Aenderung verschmäht; aber nicht besser verfuhren diejenigen unter ihnen, welche durch ein nach ἐγὼ eingeschaltetes σοῦ dem ersten Verse dieselbe Gestalt zu geben suchten, welche sie bei V. 1744 verwarfen. Dass indess der erste Vers fehlerhaft ist lehrt die unstatthafte Copula; vermuthlich ist zu schreiben

τάλαιν' ἐμῶν συγγόνου Τ' ὑβρισμάτων.

Im dritten Verse ist wahrscheinlich ebenfalls erst von der Hand eines Correctors das jetzige Metrum geschaffen. Eine Uebereinstimmung mit den früheren Versen wird erreicht, wenn man mit einer Florentiner Handschrift (c) das Wörtchen με tilgt. V. 1746 hat man Hermanns Verbesserung σκότια γᾷ καλύψω jetzt allgemein aufgenommen; es wäre jedoch nicht unmöglich dass Euripides geschrieben

σκότῳ γᾶς καλύψω.

Vgl. γῆς σκότῳ κέκρυπται Hel. 61, γαίας ἀμαυροῦσθαι σκότῳ Aesch. Pers. 223 u. ähnl.

Der Schluss des Stückes erinnert an den Ausgang des Sophocleischen Oed. R. und hat von dort, wie schon andere erkannt haben, eine unpassende Erweiterung bekommen:

ὦ πάτρας κλεινοὶ πολῖται, λεύσσετ', Οἰδίπους ὅδε,
[ὃς τὰ κλεὶν' αἰνίγματ' ἔγνω καὶ μέγιστος ἦν ἀνήρ,]
ὃς μόνος Σφιγγὸς κατέσχον τῆς μιαιφόνου κράτη,
νῦν ἄτιμος αὐτὸς οἰκτρὸς ἐξελαύνομαι χθονός.
ἀλλὰ γάρ τί ταῦτα θρηνῶ καὶ μάτην ὀδύρομαι;
τὰς γὰρ ἐκ θεῶν ἀνάγκας θνητὸν ὄντα δεῖ φέρειν.

Wie nicht leicht jemand sich dazu entschliessen wird nach dem Vorgange von Hartung diese sechs Verse ohne Unterschied für unecht zu erklären, so wird man es auch nicht billigen dürfen, wenn Valckenaer, welchem Kirchhoff beigetreten ist, die beiden ersten Verse verwarf. Dass die alten Dichter nicht selten ganze Verse von einander entlehnten, ist nicht in Abrede zu stellen; wer also V. 1758 deshalb verurtheilt, weil wir Soph. Oed. R. 1524 lesen

ὦ πάτρας Θηβης ἔνοικοι, λεύσσετ', Οἰδίπους ὅδε,

folgt einem völlig unhaltbaren Princip. Gegen die Authentie von V. 1759 spricht nicht bloss die Uebereinstimmung mit Soph. Oed. R. 1525, sondern zugleich die Form ἔγνω: entweder müsste hier ἔγνων stehen oder im Folgenden κατέσχεν und ἐξελαύνεται. Somit urtheilten Porson, Dindorf, Hermann und Geel ganz richtig dass V. 1759 zu verwerfen, V. 1758 dagegen beizubehalten sei. Auf diese Weise ist auch der Ursprung der Interpo-

lation leicht ersichtlich; gerade die Aehnlichkeit des Euripideischen Verses mit jener Sophocleischen Stelle veranlasste eine unzeitige Reminiscenz. Uebrigens ist κλεινοί (wofür einige neuere Handschriften passender κλεινῆς bieten) vielleicht erst durch die κλειναὶ αἰνίγματα des interpolirten Verses entstanden[1]); nach der Sophocleischen Stelle würde Θήβης zu erwarten sein. V. 1761 ist statt des müssigen αὐτὸς offenbar αὑτὸς zu schreiben, und für οἰκτρὸς haben schon alte Verbesserer richtig οἰκτρῶς gesetzt.

Zur Ergänzung des aus den Schriftstellern zu gewinnenden kritischen Apparates dienen folgende Citate, die ich der Kirchhoffschen Verszählung anpasse.

V. 1 wird benutzt von Georgius Pachym. bei Walz Rhet. I p. 553, 9.

V. 3 Stobaeus Ecl. I p. 540. Moschop. Hesiod. Op. 412 p. 220 f.

V. 18 f. Schol. Aesch. Sept. 745 p. 60, 13. Argum. Aesch. Sept.

V. 19 Alcinous Isag. c. 26. Anecd. Oxon. vol. 1 p. 164, 18.

V. 20 Dio Cassius 78, 8.

V. 26 Schol. Eur. Phoen. 805.

V. 28 Eust. Il. p. 160, 5.

V. 30 f. Schol. Eur. Phoen. 1606.

V. 32 vgl. Anecd. Bachm. vol. 1 p. 356, 8 und Suidas v. ἐξανδρούμενος.

V. 40 Stobaeus Flor. 17, 16.

V. 68 Schol. Eur. Phoen. 1565.

V. 69 f. Moschop. Hesiod. Op. 538.

V. 77 Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 69.

V. 90 Thomas Mag. p. 90, 5.

V. 92 f. Schol. Eur. Phoen. 736.

V. 93 Thomas Mag. p. 385, 13.

V. 114 Schol. Soph. p. 344, 9 ed. Dind.

V. 120 f. Schol. Eur. Phoen. 110.

V. 174 Schol. Arat. 455.

V. 198 vgl. Nicetas Eug. 5, 50.

V. 201 ἀλλήλαις auch Choricius Gaz. p. 110.

V. 202—204 Schol. Eur. Phoen. 6. — V. 202 Argum. Aesch. Pers.

V. 244 f. Schol. Eur. Phoen. 629. 768.

V. 270 f. Nicephorus Greg. Hist. Byzant. XIII, 2 p. 638, 5 ed. Bonn., wo die Varianten τὰ πλεῖστα und δεινὰ γίνεται zu bemerken sind.

V. 326 vgl. Anecd. Bekk. p. 389, 19. Georgius Lecap. bei Matthaei Lect. Mosq. II p. 59. Suid. v. ἀμφιτρυγῆ.

---

1) Ueber derartige Fehler, die durch ein Abirren des Auges sich leicht erklären, vgl. meine *Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 25. Die daselbst vorgeschlagene Verbesserung für Sclerias bei Ath. IX p. 402 B:

ἔνθ' οὔτε ποιμὴν ἀξιοῖ φέρβειν (statt νέμειν) βοτὰ
οὔτ' ἀσχέδωρος νεμόμενος καπρώζεται,

hat Meineke in den Text gesetzt.

V. 356 Eumath. VI p. 560, 28 ed. Didot.

V. 361 Thomas Mag. p. 140, 13.

V. 378 Thomas Mag. p. 333, 11.

V. 393 Ioh. Damasc. post Stob. Ecl. ed. Gaisf. p. 717, 26.

V. 394 Cicero ad Att. II, 25, 1.

V. 402 Schol. Eur. Phoen. 71.

V. 404 Macarius 4, 22.

V. 406 Aphthon. Rhet. I p. 71.

V. 407 Menandri monost. 216.

V. 416 Thomas Mag. p. 313, 8.

V. 452 Schol. Eur. Or. 1457.

V. 455 Phot. Lex. p. 561, 19. Suid. v. σχάσον.

V. 470—73 Philoponus de mundi creat. VI, 1. — V. 470 Schol. Aristot. p. 827 b 25 ed. Brandis. — V. 471 Eust. Il. p. 103, 40.

V. 485 f. Schol. Eur. Phoen. 601.

V. 501 Porphyrius in Ptolem. Harm. p. 190.

V. 522 Philostr. V. Apoll. p. 135, 27 ed. Kays. Philo Iud. vol. 2 p. 53. Eusebius P. E. p. 242 C.

V. 525 Plut. Niciae et Crassi comp. c. 4.

V. 527 f. Ioh. Damasc. bei Gaisf. Stob. Ecl. p. 717, 28. — V. 528 Schol. Eur. Phoen. 202.

V. 530 f. Theodos. Göttl. p. 31, 26.

V. 536—39 Anecd. Oxon. vol. 4 p. 162, 26.

V. 542—49 Anecd. Oxon. vol. 4 p. 162, 31—163, 6. — V. 543 Priscian Inst. vol. 1 p. 10. 52 ed. Hertz.

V. 547 Isidorus Pelus. Epist. 4, 58 p. 444 C.

V. 552 Aelian V. H. 2, 12.

V. 560 Schol. Pind. Ol. 6, 82.

V. 583 Priscian. Inst. vol. 1 p. 10. 52 ed. Hertz.

V. 595 Philostr. V. Apollon. p. 148, 14 ed. Kays.

V. 598 vgl. Carcinus trag. fr. 10 p. 622. Aristoph. Plut. 203.

V. 600 Polyaen. Strat. 8, 24, 4.

V. 633 Etym. M. p. 256, 10.

V. 638 Eust. Il. p. 776, 52.

V. 639 Schol. Eur. Phoen. 6. Orest. 1481.

V. 668 Hesych. v. φραδαῖσι.

V. 707 Thomas Mag. p. 110, 1.

V. 747 vgl. den anonymen Dichter in Anecd. Paris. vol. 4 p. 343, 33.

V. 751 Etym. Gud. p. 283, 13.

V. 772 f. Schol. Eur. Phoen. 865.
V. 794 Schol. Aesch. Pers. 203. Thomas Mag. p. 403, 1.
V. 892 Eust. Il. p. 55, 18. 154, 33.
V. 934—36 Schol. Eur. Phoen. 1011.
V. 937 vgl. Plat. Phaedr. p. 244 D. Aristid. vol. 2 p. 14.
V. 942 Tzetzes Epist. p. 63.
V. 970 Hesych. v. εὐλογείτω.
V. 973 Eust. Il. p. 107, 26.
V. 985 Schol. Il. Π, 223 p. 449 b 41.
V. 987 Thomas Mag. p. 283, 17.
V. 993 Eust. Il. p. 107, 26.
V. 1027 Hesych. v. δάιον τέρας. Suid. v. δαΐον τέρας.
V. 1074 Eust. Il. p. 174, 4.
V. 1094 Phot. Lex. p. 476, 3.
V. 1106 Schol. Eur. Phoen. 1130.
V. 1109 Schol. Eur. Phoen. 1377.
V. 1116 f. Schol. Eur. Phoen. 174.
V. 1119 Iulian p. 303 D. Philostr. Heroic. p. 321, 6.
V. 1142 Schol. Lucian. p. 137 not.
V. 1158 vgl. Lycophr. 296.
V. 1413 Schol. Eur. Or. 1075.
V. 1423 Thomas Mag. p. 140, 16.
V. 1446 Eust. Il. p. 650, 58.
V. 1461 Hesych. v. ὑπερπαξήσας.
V. 1467 f. Eust. Il. p. 236, 35.
V. 1659 Schol. Eur. Phoen. 1710.
V. 1690 Theodorus Metoch. p. 391.

---

4. Medea.

Eine Anzahl von Stellen der Euripideischen Medea habe ich bereits früher in zwei Recensionen der von Kirchhoff und von Schoene in sehr verschiedenem Sinne besorgten Specialausgaben dieses Stückes einer Besprechung unterworfen, und ich könnte mich vielleicht begnügen über mehrere der hier in Betracht kommenden Punkte auf jene Aufsätze zu verweisen (N. Jahrb. f. Philol. u. Paed. LXIX, 6 p. 618—630 und Mützells Zeitschr. f. d. Gymnasialw. X p. 494—510). Da jedoch einerseits die in Zeitschriften verstreuten Abhandlungen bekanntlich ein sehr ephemeres Andenken zu geniessen pflegen, andrerseits manches was ich dort gegeben habe eine Ergänzung oder bestimmtere Fassung zulässt, so

halte ich es für angemessener das was für die Texteskritik in jenen Recensionen bemerkt war, der Hauptsache nach hier zu wiederholen.

οὐδ' ἂν κτανεῖν πείσασα Πελιάδας κόρας
πατέρα κατῴκει τήνδε γῆν Κορινθίαν
ξὺν ἀνδρὶ καὶ τέκνοισιν, ἀνδάνουσα μὲν
φυγῇ πολιτῶν ὧν ἀφίκετο χθόνα,
αὐτή τε πάντα ξυμφέρουσ' Ἰάσονι·
ἥπερ μεγίστη γίγνεται σωτηρία,
ὅταν γυνὴ πρὸς ἄνδρα μὴ διχοστατῇ.
νῦν δ' ἐχθρὰ πάντα καὶ νοσεῖ τὰ φίλτατα.

In den Worten ἀνδάνουσα μὲν φυγῇ πολιτῶν ὧν ἀφίκετο χθόνα liegt eine Schwierigkeit, die sehr zahlreiche Vermuthungen hervorgerufen hat. Barnesius schrieb φυγῇ πολίταις, Pierson φυγὰς πολίταις, Brunck φυγῇ πολίτας, Canter φυλῇ oder ψυχῇ πολιτῶν, Reiske φυῇ oder φύτλῃ πολιτῶν, Musgrave ὀργῇ πολιτῶν, Wyttenbach φύσει πολιτῶν, Iacobs φύσει πολίταις, Elmsley φυγὴ πολιτῶν, Pflugk und Schneidewin verlangten eine Umstellung von V. 12 und 13, ich selbst dachte an τέκνοισι λανθάνουσα. Wenn Kirchhoff von allen diesen Vermuthungen nicht eine einzige erwähnt hat, so wäre es wenigstens in der Ordnung gewesen dass er mit einer Silbe angedeutet hätte, wie er die Worte, die den Kritikern so viel zu schaffen gemacht haben, verstanden wissen wollte. Der Interpretationsversuch von G. Hermann Opusc. III p. 161 scheint nicht um ein Haar besser zu sein als die schlechteste der angeführten Conjecturen. Er versteht: ὧν πολιτῶν χθόνα φυγῇ ἀφίκετο, ταύτῃ ἀνδάνουσα, zu Deutsch: "gefallend dem Lande der Bürger, in das sie durch die Flucht gekommen war." Wie ist es möglich dies aus den Griechischen Worten herauszulesen oder vielmehr herauszuhören? Unmöglich dürfen wir doch voraussetzen dass Euripides darauf ausging dem Attischen Publicum Räthsel aufzugeben. Wie jetzt die Worte uns vorliegen, kann man nur verstehen, "gefallend der Flucht der Bürger, in deren Land sie gekommen war". Und bei Hermanns gewaltsamer Interpretation kommt dennoch eine Verschrobenheit zu Tage; statt des sinnlosen "gefallend dem Lande der Bürger" müsste es vielmehr heissen "gefallend den Bürgern, in deren Land sie gekommen war". Die früher erwähnten Vermuthungen einzeln zu besprechen würde zu weit führen; für den Kundigen bedürfen ohnehin die meisten derselben kaum eine Widerlegung[1]). Soll der Gedanke ausgedrückt wer-

1) Brunckς πολίτας widerstrebt, soweit wir urtheilen können, den Gesetzen der Grammatik. Gleichwohl hat W. Dindorf in seinen Anmerkungen diese Vermuthung gebilligt, in der zweiten Ausgabe der *Poetae scenici* (Oxon. 1851) sie sogar in den Text gebracht. Dass ἀνδάνω mit dem Accusativ sich verbinden lasse, kann durch die Analogie des Verbum ἀρέσκω natürlich nicht erwiesen werden. Beiläufig bemerke ich, dass bei Eur. (fr. 942) in Orion. Flor. Eurip. 6 p. 55, 32 ed. Schneidew., p. 265, 5 ed. Meinek. die überlieferte Lesart,

θεοῖς ἀρέσκου· πᾶν γὰρ ἐκ θεῶν τέλος,

nicht geduldet werden durfte. Es war zu verbessern θεοὺς ἀρέσκου. Ganz derselbe Fehler findet sich bei Porphyrius de abstin. 2, 36: καὶ οὕτως χρέσκοντο τοῖς θεοῖς ταῖς τοιαύταις ἀπαρχαῖς. Auch hier ist ohne Zweifel τοὺς θεοὺς zu schreiben.

*

den, dass Medea in gutem Vernehmen mit den Corinthiern stand, so wird man einen Ausdruck erwarten müssen, wie Canter mit seiner Aenderung φυλῇ πολιτῶν ihn herstellen wollte; nur würde, wie Elmsley erinnerte, statt φυλῇ vielmehr φύλῳ nothwendig sein. Indess zweifle ich ob überhaupt dieser Gedanke hier passt. Weder hören wir weshalb Medea den Corinthiern gefiel, noch wodurch das Verhältniss zwischen ihr und den Bürgern, wenn es anfangs ein freundliches war, später sich ungünstiger gestaltete. Nach dem Charakter der Medea, wie Euripides ihn darstellt, werden wir viel eher geneigt sein zu glauben, dass Medea, ein leidenschaftliches und stolzes Weib, bisher nur ihrem Manne lebte; ihm hat sie mit unbeschränkter Hingebung ihre Heimath, ihre Angehörigen, ja den Frieden ihres Herzens zum Opfer gebracht; und nach allen diesen Opfern erfuhr sie συμφορᾶς ὕπο, οἷον πατρῴας μὴ ἀπολείπεσθαι χθονός (34 f.). Demgemäss muss man erwarten dass Medea in Corinth fremd und vereinsamt dastand, und darum glaube ich meine frühere Vermuthung λανθάνουσα festhalten zu müssen. V. 13 ist es nothwendig statt αὐτή τε mit Stobaeus Flor. 74, 38 αὐτὴ δὲ zu schreiben, wie bereits Elmsley gethan hat; denn es würde verkehrt sein, wenn jemand meinte, dass dem μὲν das V. 16 nachfolgende νῦν δ' entspräche. Hiernach möchte ich die Stelle so fassen: zwar lebte Medea in der Verborgenheit und abgeschieden von dem Verkehr mit den Bürgern, sie fühlte sich aber vollkommen eins mit dem Iason.

δέδοικα δ' αὐτὴν μή τι βουλεύσῃ νέον·
βαρεῖα γὰρ φρήν, οὐδ' ἀνέξεται κακῶς
πάσχουσ'· ἐγὼδα τήνδε, δειμαίνω τέ νιν
μὴ τηκτὸν ὥσῃ φάσγανον δι' ἥπατος
σιγῇ δόμους εἰσβᾶσ', ἵν' ἑστρῶται λέχος,
ἢ καὶ τύραννον τόν τε γήμαντα κτάνῃ
κἄπειτα μείζω συμφορὰν λάβῃ τινά.

Die Verse 40 und 41 müssen hier, abgesehen von anderen Gründen, schon deshalb den Verdacht einer Interpolation erregen, weil sie unten V. 379 f. an passenderer Stelle wiederkehren. Schon längst haben andere V. 41 angefochten; allein die Worte μὴ τηκτὸν ὥσῃ φάσγανον δι' ἥπατος sind nicht minder anstössig, weil sie in diesem Zusammenhang es völlig unbestimmt lassen, an wem Medea nach der Ansicht der τροφός sich vergreifen wird. Ein allgemeiner Ausdruck wie "Mord und Todtschlag anrichten" kann gebraucht werden auch ohne dass man erfährt wer gemordet und todt geschlagen wird; von einem Durchbohren des Herzens kann man nicht reden ohne anzudeuten wessen Herz durchbohrt wird. Darum habe ich in der ersten Ausgabe V. 40 und 41 als eine lästige und ganz unpassende Wiederholung einer späteren Stelle getilgt und im folgenden Verse μὴ καὶ τύραννον geschrieben. In der Hauptsache stimmt hiermit überein E. v. Leutsch im Philol. X p. 368, der jedoch bemerkt, es bleibe auffallend dass nicht Glauca neben dem τύραννος und dem γήμας genannt werde, Glauca, gegen die doch Medea am meisten aufgebracht

sein müsse. Daher sei zu schreiben μὴ τοὺς τυράννους τόν τε γήμαντα κτάνῃ, und mit τυράννους bezeichne Euripides *regem et puellam regiam*. Die Vermuthung τυράννους machte bereits Hermann Opusc. III p. 163 f. Indess ist damit nicht viel gewonnen. In V. 42 bleibt unpassend die Bezeichnung ὁ γήμας, "derjenige welcher heirathete"; was für ein Object zu γήμαντα zu ergänzen sei, ist im Texte nicht einmal angedeutet, und darum ist γήμαντα hier ziemlich nichtssagend; anders V. 288: τὸν δόντα καὶ γήμαντα καὶ γαμουμένην, wo diese drei Bestimmungen sich gegenseitig erläutern. V. 43 widerspricht geradezu den folgenden Worten,

δεινὴ γάρ· οὔτοι ῥᾳδίως γε συμβαλὼν
ἔχθραν τις αὐτῇ καλλίνικον οἴσεται.

Die τροφός deutet hier wie V. 38 f. darauf hin dass andere den schroffen Charakter der Medea zu fürchten haben, nicht also kann sie die Besorgniss hegen Medea werde sich in grösseres Unglück stürzen; und wenn sie diese Besorgniss hegt, so kann sie dieselbe wenigstens nicht damit begründen dass sie sagt, Medea sei furchtbar und wer mit ihr anbinde, erlange nicht leicht einen Triumph über sie. Offenbar haben wir in V. 40. 41 und V. 42. 43 zwei verschiedene Ausfüllungen einer vermeintlichen Lücke. Scheiden wir diese vier Verse aus, so hängt alles auf das beste zusammen:

ἐγῷδα τήνδε δειμαίνω τέ νιν·
δεινὴ γάρ· οὔτοι ῥᾳδίως γε συμβαλὼν
ἔχθραν τις αὐτῇ καλλίνικον οἴσεται.

Jetzt erst erklärt sich, wie jemand dazu kam die Verse μὴ ξηκτὸν — λέχος hier einzuschwärzen; und sicherlich ist die unbestimmte Bezeichnung "ich kenne die Medea und fürchte sie" dem Zusammenhange weit angemessener als eine nähere Angabe des concreten Factum, das man von der Leidenschaftlichkeit des tief gekränkten Weibes zu gewärtigen habe; denn weder ist es zu billigen, wenn der Dichter der Entwickelung vorgreift, noch hat es einen Sinn ganz zwecklos falsche Vermuthungen über den weiteren Verlauf der Handlung aussprechen zu lassen.

Auf die Aeusserung der τροφός, dass Iason sich gegen seine Freunde offenbarer Schlechtigkeit schuldig mache, entgegnet der Paedagog, ein jeder liebe nun einmal sich am meisten:

85 τίς δ' οὐχὶ ξυνητῶν; ἄρτι γιγνώσκεις τόδε,
ὡς πᾶς τις αὑτὸν τοῦ πέλας μᾶλλον φιλεῖ,
οἱ μὲν δικαίως, οἱ δὲ καὶ κέρδους χάριν,
εἰ τοὐσδε γ' εὐνῆς οὕνεκ' οὐ στέργει πατήρ.

Die beiden letzten Verse können in dieser Gestalt wohl kaum richtig sein. Was den ersten derselben betrifft, so bilden zunächst δικαίως und κέρδους χάριν keinen richtigen Gegensatz, da δικαίως die Art und Weise, κέρδους χάριν den Zweck bezeichnet. Wenn, wie

Elmsley sagt, δίκη und κέρδος bei den Tragikern einander entgegengesetzt werden[1]), so folgt daraus nicht dass κέρδους χάριν so viel sei als ἀδίκως. Ferner ist δικαίως unpassend, weil bei der allen Menschen gemeinsamen Selbstsucht nicht unterschieden werden kann zwischen solchen die in gerechter und andern die in ungerechter Weise sich selbst lieben. Eben so schief ist endlich κέρδους χάριν: nicht um des Gewinnes willen liebt jeder sich selbst am meisten, sondern um der Selbstliebe willen trachtet jeder nach Gewinn. Ueber V. 88 bemerkt Elmsley, wenn εἰ richtig wäre, würde der Dichter geschrieben haben:

εἰ τούσδε γ' εὐνῆς ἕνεκα μὴ στέργει πατήρ.

Darum verlangt er καὶ (oder ὡς) τούσδε γ' εὐνῆς οὕνεκ' οὐ στέργει πατήρ. Die Frage welche von beiden Aenderungen den Vorzug verdiene, können wir füglich unentschieden lassen, so lange erheblichere Schwierigkeiten da sind, die durch Elmsleys Vorschläge nicht beseitigt werden. Unter τούσδε sind die Kinder zu verstehen; allerdings vergeht sich Iason auch an diesen (vgl. 74 f. und 82), indem er sie ihrer leiblichen Mutter beraubt; aber vorzugsweise ist es doch die Medea, welche durch den Egoismus des Iason leidet. Die Worte εὐνῆς οὕνεκα sind durchaus unbestimmt, so dass man nicht weiss, ob sie sich auf die Medea oder deren Nebenbuhlerin beziehen. Nach allem scheint es unzweifelhaft dass V. 87 und 88 in ihrer jetzigen Fassung nicht vom Dichter herrühren; was aber ursprünglich hier gestanden habe wird sich schwer ermitteln lassen.

122 τὸ γὰρ εἰζίσζαι ζῆν ἐπ' ἴσοισιν
κρεῖσσον· ἔμοιγ' οὖν, εἰ μὴ μεγάλως,
ὀχυρῶς τ' εἴη καταγηράσκειν.

Statt ἔμοιγ' οὖν war mit Musgrave ἐμοὶ γοῦν zu schreiben. Denn γοῦν wird da gebraucht, wo wie hier ein allgemein ausgesprochener Satz auf einen einzelnen Fall angewendet und für diesen bestimmten Fall als unzweifelhaft geltend bezeichnet werden soll. Das folgernde οὖν ist dagegen hier unpassend, weil jeder allgemeine Satz in einem speciellen Falle sehr wohl eine Ausnahme erleiden kann. Wie Kirchhoff ἐμοὶ γοῦν aufgenommen hat, so hätte er auch kein Bedenken tragen sollen Reiskes Verbesserung ὀχυρῶς γ' εἴη in den Text zu setzen; der Vorschlag ὀχυρῶς δ' εἴη scheint nicht zulässig. Endlich ist μεγάλως höchst seltsam in der Verbindung mit καταγηράσκειν: man sollte erwarten λιπαρῶς. So findet sich λιπαρὲν γῆρας Od. Λ, 136. Τ, 368. Ψ, 283. Pind. Nem. 7, 99. Cratin. Com. 2 p. 15. Babr. 103, 10, und λιπαρῶς γηρασκέμεν Od. Δ, 210. An die obigen Worte schliesst sich folgendes an:

τῶν γὰρ μετρίων πρῶτα μὲν εἰπεῖν
τοὔνομα νικᾷ, χρῆσζαι τε μακρῷ

1) Von den drei Stellen die Elmsley hiefür beibringt, ist nur eine passend, nämlich Eur. fr. 758: κακοῖς τὸ κέρδος τῆς δίκης ὑπέρτερον. Dagegen kann Eur. Heracl. 2 nichts beweisen: ὁ μὲν δίκαιος τοῖς πέλας πέφυκ' ἀνήρ, ὁ δ' εἰς τὸ κέρδος λῆμ' ἔχων ἀνειμένον πόλει τ' ἄχρηστος καὶ συναλλάσσειν βαρύς, αὑτῷ δ' ἄριστος. Noch weniger gehört hierher Soph. Oed. R. 889: εἰ μὴ τὸ κέρδος κερδανεῖ δικαίως.

λῶστα βροτοῖσιν· τὰ δ' ὑπερβάλλοντ'
οὐδένα καιρὸν δύναται θνητοῖς·
μείζους δ' ἄτας, ὅταν ὀργισθῇ
δαίμων, οἴκοις ἀπέδωκεν.

Die Worte τὰ δ' ὑπερβάλλοντ' οὐδένα καιρὸν δύναται θνητοῖς sind auf die verschiedenste Art verstanden worden. Brunck glaubte mit einem "*subauditur verbum* παρέχειν, *aut simile quid*" sich helfen zu können; Hermann nahm an, der Dichter habe οὐδένα καιρὸν δύναται statt οὐδὲν καίριον δύναται gesagt; Elmsley sagt οὐδένα καιρὸν bedeute οὐκ εἰς καίριον, ἀκαίρως, und hiernach in übertragenem Sinne *immoderate, supra modum;* δύναται sei so viel als ἰσχύει, σθένει, und hiernach habe man unter den Worten οὐδένα καιρὸν δύναται θνητοῖς zu verstehen "*plus aequo valent mortalibus, id est, potentiores quam expedit reddunt homines, ad tempus scilicet.*" Schoene giebt eine Interpretation, die kaum diesen Namen verdient: οὐδένα καιρὸν δύναται soll heissen "hat keineswegs das Gewicht eines rechten Maasses". Wenn die heutigen Philologen in ihren Erklärungen so weit aus einander gehen und so hin und her rathen was Euripides hier eigentlich gemeint habe, so wird das Attische Publicum wohl eben so wenig im Stande gewesen sein die Stelle zu verstehen — falls nämlich Euripides das schrieb was unsere Handschriften, die über tausend Jahre jünger sind als der Dichter, ihm beilegen. Gerade aber weil Euripides für Zuhörer dichtete, von denen er verstanden sein wollte und verstanden wurde, können wir nicht glauben dass die obigen Textesworte unverfälscht sind, und wer statt der Schrauben und Krücken vieler Interpreten nur einen schlichten und gesunden Sinn mitbringt, wird dieser Ansicht beistimmen. Meinem Gefühle nach muss δύναται hier einen Infinitiv bei sich haben; die Stelle wäre verständlich, wenn es hiesse

τὰ δ' ὑπερβάλλοντ'
οὐδὲν ἐπαρκεῖν δύναται θνητοῖς.

Aber freilich ist diese Aenderung nicht leicht genug, um überzeugend zu sein. Dagegen zweifle ich nicht dass bei Teles in Stob. Flor. 91, 33 das hier vorgeschlagene Verbum herzustellen ist, ὁ πλοῦτος ἐσεμνύνετο — πρέπειν εἰρήνῃ, πολέμοις δὲ παρέχειν, θεραπεύειν δ' ἐκ νόσων. Statt πολέμοις δὲ παρέχειν habe ich verbessert πολέμοις δ' ἐπαρκεῖν.

ἄιες, ὦ Ζεῦ καὶ γᾶ καὶ φῶς,
ἰαχὰν οἵαν ἁ δύστανος
μέλπει νύμφα;

Elmsleys Vermuthung ἀχὰν ist von Kirchhoff keiner Erwähnung gewürdigt worden, und doch ist diese Vermuthung unzweifelhaft richtig. Das Wort ἰαχή hat in der Tragoedie die zweite Silbe stets lang. Vgl. Aesch. Pers. 939: πέμψω πολύδακρυν ἰαχάν. Eur. Phoen. 1302: ἰαχὰν στενακτάν. Tro. 337: ἰαχαῖς τε νύμφαν. El. 143, wo in der Corruptel der Ueberlieferung die Bacchien ἰαχὰν ἀσιδάν unverkennbar sind. Iph. Aul. 1039: ἔστασεν ἰαχάν (entsprechend dem antistrophischen κρατῆρά τε Βάκχου 1061). Ion 499: ὑπ' αἰόλας

ἰαχᾶς, wo Dindorf *Metra Aesch. Soph. Eur. et Aristoph.* p. 218 sich geirrt hat. Ganz entsprechend ist die Messung des Verbum ἰαχέω. Soph. Oed. R. 1222: περίαλλ' ἰαχέων (= θαλαμηπόλῳ πεσεῖν 1210). Eur. Heracl. 752: ἰαχήσατε δ' οὐρανῷ (= κακὸν δ', ὦ πόλις, εἰ ξένους 763). Heracl. 783: ἰαχεῖ ποδῶν κρότοισιν. Orest. 826: Τυνδαρὶς ἰάχησε τάλαινα. Orest. 965: ἰαχείτω δὲ γᾶ Κυκλωπία (wo der antistrophische Vers 976 vermuthlich zu schreiben ist: ἰὼ ὦ, πανδάκρυτ' ἐφαμέρων statt ἰὼ ἰώ, π. ἐφ.). Herc. F. 349: μολπᾷ Φοῖβος ἰαχεῖ (= Κενταύρων ποτὲ γένναν 365). Hel. 1486: ἐπιπετόμενος ἰαχεῖ (= βόστια πολιὰ θαλάσσας 1503). El. 1150: ἰάχησε δὲ στέγα λάινοί τε Φρυγικοὶ δόμων (Dochmien). Tro. 516: ἰαχήσω (= θεᾷ δώσων 536). Allerdings lesen wir Iph. Taur. 180 in einem anapaestischen Systeme

Ἀσιήταν σοι βάρβαρον ἰαχάν.

Allein schon oben S. 4 wurde darauf hingewiesen dass die Aufeinanderfolge des Daktylus und Anapaestus anstössig ist; man hat zu verbessern βάρβαρον ἀχάν, wie ich bereits in der ersten Ausgabe gethan habe. Damit fällt zusammen die Beurtheilung von Aesch. Sept. 868: ὕμνον Ἐρινύος ἰαχεῖν Ἅιδᾳ τ' ἐχθρὸν παιᾶν' ἐπιμέλπειν. Hier hat bereits Elmsley ἀχεῖν vorgeschlagen. Auch bei Soph. Trach. 642: ἰάχων καναχὰν ἐπάνειsιν, ist mit Elmsley ἀχῶν zu schreiben, nach Anleitung des strophischen Verses Οἴτας παρανασταίντες 635. So wird man denn auch kein Bedenken tragen dürfen Phoen. 1295 mit Elmsley herzustellen πότερον ἆρα νέκυν ὀλόμενον ἀχήσω (statt ἰαχήσω), wie Kirchhoff selbst Iph. Aul. 1045 geschrieben hat: μελῳδοῖς Θέτιν ἀχήμασι τόν τ' Αἰακίδαν, und Hipp. 585: ἀχὰν μὲν κλύω, wie Phoen. 1040: ἀχά τ' ἦν ὅμοιος, obgleich die Handschriften hier ἰαχὰν und ἰαχά, dort ἰαχήμασι bieten. Unsicher ist das Metrum Herc. F. 884: ὄφεων ἰαχήμασι λύσσα μαρμαρωπός. Man kann zweifeln ob auch hier mit Dindorf ἀχήμασι zu setzen sei; sicherlich aber konnte Euripides in ἰάχημα die zweite Silbe nicht verkürzen. Was mit der verdorbenen Stelle Eur. Hel. 1147 anzufangen sei, καὶ ἰαχὴ σὴ καθ' Ἑλλανίαν, wage ich nicht zu entscheiden; nur so viel steht fest dass Hermanns Vermuthung κάτ' ἰαχήσῃς mit dem antistrophischen Verse 1161 sich schlecht verträgt. Endlich ist noch zu bemerken dass im Aoristus ἴαχον, der bei den Attikern überhaupt selten und nur im Indicativus erscheint, das Alpha stets kurz ist. Somit bewahren hier die Attischen Dichter die epische Messung, während sie in den vermuthlich aus dem Dorischen Dialekt entlehnten Formen ἰαχή und ἰαχέω nur ein langes Alpha kennen. Jedenfalls scheint es hiernach klar zu sein dass kein Grund vorliegt ἰακχή und ἰακχέω zu schreiben, wie dies nach dem Vorgange von Musgrave (Phoen. 1302. Hel. 1486. Heracl. 783. Herc. F. 349) Porson, Seidler, G. Hermann, die Gebrüder Dindorf und viele andere gethan haben. Meines Wissens sind die Formen ἰακχή und ἰακχέω völlig unbezeugt. Wo in Wörtern desselben Stammes κχ sich findet, ist die specielle Bedeutung des jubelnden, frohlockenden Rufes entschieden vorherrschend, wie in παιᾶν' ἐπεξιακχάσας Aesch. Sept. 635. Eine Ausnahme macht, wenn die Stelle richtig überliefert ist, Eur. Tro. 1230: ΧΟ. στέναξον, μᾶτερ, ΕΚ. αἰαῖ. ΧΟ. νεκρῶν ἴακχον. ΕΚ. οἴμοι μοι.

Nach den zuletzt angeführten Worten fährt der Chor fort:

151 τίς σοί ποτε τᾶς ἁπλήστου
κοίτας ἔρος, ὦ ματαία,
σπεύσει θανάτου τελευτάν;

Die Handschriften sind zwischen ἁπλάστου (so BEc) und ἀπλήστου (Cd*BC*) getheilt. Die erstere Lesart ist völlig sinnlos, die andere ist nicht viel besser. Wenn behauptet wird, ἄπληστος κοίτη bedeute *lectus non impletus, i. e. desertus, vacuus*, so müsste der Beweis erst geführt werden dass jemals ein "einsames" Lager als ein "nicht angefülltes" bezeichnet werden könne. Man beruft sich auf Soph. Ced. Col. 528: ἦ ματρόθεν, ὡς ἀκούω, δυσώνυμα λέκτρ' ἐπλήσω; Diese Stelle würde nichts beweisen, selbst wenn sie richtig überliefert wäre[1]). Wäre aber auch ἄπληστος κοίτη so viel als ἔρημος κοίτη, so würde damit unserer Stelle nicht geholfen sein; denn ein Ausdruck wie τῆς ἐρήμου κοίτης ἔρως könnte nur von der Sehnsucht nach dem einsamen Bette, d. h. nach der Ehelosigkeit, verstanden werden. Das unverständliche ἁπλάστου kommt der ursprünglichen Lesart ganz nahe; es ist ἁπλάτου zu lesen, wie bereits Elmsley verbessert hat, dessen Emendation Kirchhoff verschweigt.

Wenn dein Gatte, tröstet der Chor die Medea, sich von dir entfremdet hat, so lass dich dadurch nicht zur Bitterkeit gegen ihn verleiten:

138 Ζεύς σοι τόδε συνδικήσει. μὴ λίαν
τάκου ὀδυρομένα σὸν εὐνέταν.

Die dazu gehörigen antistrophischen Verse 182 f. lauten:

σπεῦσον πρίν τι κακῶσαι τοὺς εἴσω·
πένθος γὰρ μεγάλως τόδ' ὁρμᾶται.

Dem letzten Verse wird der strophische entsprechen, wenn man, wie bereits von andern vorgeschlagen ist, τάκου δυρομένα σὸν εὐνήταν (oder εὐνάταν) schreibt; die Form εὐνήτης bezeugt Hesychius. Dasselbe Maass haben die Worte σπεῦσον πρίν τι κακῶσαι τοὺς εἴσω, die auch von Seiten des Sinnes völlig unverdächtig sind. Daher scheint es mir einleuchtend, dass der erste der angeführten Verse (158) fehlerhaft ist, und ich glaube mit dem Vorschlage

Ζεύς σοι σύνδικος ἔσται. μὴ λίαν

das richtige zu treffen: das τόδε, wofür einige Handschriften τάδε bieten, ist aus den unmittelbar vorhergehenden Worten, κείνῳ τόδε μὴ χαράσσου hierher gerathen.

Ohne der beschwichtigenden Rede des Chores Gehör zu geben, ruft Medea die Themis und Artemis an und verwünscht den Iason wie seine Braut. Hierauf sagt die Amme:

κλύεθ' οἷα λέγει κἀπιβοᾶται

1) Dass ἐπλήσω unrichtig ist liegt auf der Hand. Man braucht nur Schneidewins Erklärung zu lesen, «hast du dir dein Ehebett seitens der Mutter angefüllt», um das Ungereimte der Verbindung ματρόθεν ἐπλήσω zu fühlen. Ohne Zweifel ist δυσώνυμα λέκτρ' ἐπάσω zu verbessern. So sagt Euripides γαμβρὸν πεπᾶσθαι Andr. 641, und die Form ἐπάσω statt ἑκτήσω gebraucht Aeschylus fr. 211. Bergk vermuthete, wie er p. LI sagt, ἔπλησο i. e. ἐπλάσῃς. Der Aorist ἐπλήμην ist im Epos zu finden, nicht aber in der Tragoedie. Aber auch davon ganz abgesehen, welcher Grieche hätte eine Verbindung wie μητρόθεν λέκτρα ἐπλάσῃς sich jemals auch nur im Traume einfallen lassen? Meinte vielleicht Bergk, Sophocles habe μητρόθεν λέκτρα statt μητρὸς λέκτρα gesagt?

Θέμιν εὐκταίαν Ζηνά Ϝ', ὃς ὅρκων
170 Ϝνητοῖς ταμίας νενόμισται;

Schon die alten Erklärer haben daran Anstoss genommen dass die Amme von einer Anrufung des Zeus redet, obgleich dieser von der Medea nicht angerufen worden ist. Die Scholien sagen: τῶν διαβεβοημένων ἐστὶ ζητημάτων καὶ τοῦτο, πῶς ἡ μὲν Μήδεια τὴν Θέμιν καὶ τὴν Ἄρτεμιν βοᾶται, ἡ δὲ πρεσβῦτις ἀντὶ τῆς Ἀρτέμιδος τὸν Δία φησὶν αὐτὴν ἐπιμαρτύρασθαι. Von den verschiedenen Experimenten diese Schwierigkeit zu lösen, ist nur eins der Erwähnung werth: ὅτι διὰ τῆς Θέμιδος τὸν Δία ἐπεκαλεῖτο διὰ τὸ εἶναι Διὸς τὴν Θέμιν. Diese Lösung könnte man gelten lassen, wenn ein Grund ersichtlich wäre der die Amme bewog eine solche Substitution vorzunehmen, und wenn nicht ein sehr leichtes Mittel sich böte, den jetzt vorliegenden Widerspruch zu beseitigen. Es ist zu lesen

Θέμιν εὐκταίαν Ζηνός, ὃς ὅρκων κτέ.,

wie es unten von der Medea V. 207 f. heisst: Ϝεοκλυτεῖ δ' ἄδικα παϜοῦσα[1]) τὰν Ζηνὸς ὁρκίαν Θέμιν. Wenn ζηνα statt ζηνος gelesen wurde, was bei der currenten Verwechslung von ος und α sehr leicht geschah, so war die Einschaltung eines τε nicht weiter befremdlich[2]).

217 οἱ δ' ἀφ' ἡσύχου ποδὸς
δύσκλειαν ἐκτήσαντο καὶ ῥᾳϜυμίαν.

Während Kirchhoff mehrentheils die wahrscheinlichsten Vermuthungen und selbst ganz sichere Emendationen mit Stillschweigen übergeht, hat er hier Musgraves ῥᾳϜυμίας zu erwähnen für gut befunden, und Schoene hat sogar dieses ῥᾳϜυμίας in den Text gesetzt. Die Verbindung ἀφ' ἡσύχου ποδὸς καὶ ῥᾳϜυμίας giebt ein unerträgliches Hyperbaton, wogegen die handschriftliche Lesart vollkommen richtig ist: ῥᾳϜυμίαν κτήσασθαι bedeutet "sich den Vorwurf der ῥᾳϜυμία zuziehen", wie Soph. Ant. 924 sagt: τὴν δυσσέβειαν εὐσεβοῦσ' ἐκτησάμην.

228 ἐν ᾧ γὰρ ἦν μοι πάντα, γιγνώσκεις καλῶς,
κάκιστος ἀνδρῶν ἐκβέβηχ' οὑμὸς πόσις.

Im ersten dieser Verse hat Kirchhoff γινώσκεις in den Text gesetzt und unter dem Texte γινώσκειν als *v. l.* angemerkt. Danach muss man voraussetzen die Handschriften seien zwi-

1) Kirchhoff hat drucken lassen Ϝεοκλυτεῖ δ' ἔτ' ἄδικα παϜοῦσα, weil in zwei Handschriften δέ τ' ἄδικα sich findet. Was das ἔτι hier soll, ist mir räthselhaft; ich würde es tilgen, auch wenn alle Handschriften es böten. Die Lesart δέ τ' ἄδικα erklärt sich aus der Schreibung δὲ ἄδικα ohne Schwierigkeit, s. Anm. 2.

2) Vgl. Hec. 80 oben S. 3. Dort sollte ein Hiatus vermieden werden, hier war es der Sinn der die Aenderung gebot. Aehnlich ist der Fall bei Lucian de asino c. 37. Hier wird berichtet dass die Gaukler, in deren Hände der Held der Erzählung gerathen war, für ihre Kunststücke sich von den Zuschauern kleine Gaben zusammenbettelten: ἐκ τῶν περιεστηκότων Ϝεατῶν συνέλεγον ὀβολοὺς καὶ ϑραχμάς· ἄλλος ἰσχάδας καὶ οἶνον καὶ τυροῦ κάδον ἐπέδωκε. So lautet die Ueberlieferung, statt deren Couriers unrichtige Aenderung ἰσχάδας καὶ τυροὺς καὶ οἶνου κάδον sich in unsere Texte eingedrängt hat. Die ursprüngliche Lesart ergiebt sich sehr leicht, sobald man erkennt dass das vor τυροῦ κάδον stehende καὶ ein späterer Zusatz ist. Ohne Zweifel haben wir statt ἄλλος ἰσχάδας καὶ οἶνον τυροῦ κάδον ἐπέδωκε zu verbessern: ἄλλος ἰσχάδας καὶ οἶνου τρυγίου κάδον ἐπέδωκε.

schen γινώσκεις und γινώσκειν getheilt. In der *adnot. crit.* p. 458 wird dagegen γινώσκειν als handschriftliche Lesart bezeichnet, von γινώσκεις ist gar nicht die Rede, dagegen lesen wir "*positum fuisse* γινώσκω *probabilis est Fixii coniectura.*" Zunächst wollte Fix γιγνώσκω, nicht γινώσκω: sodann ist eben dieses γιγνώσκω schon viel früher von Canter vermuthet worden: endlich versteht man nicht, weshalb γινώσκεις, eine Verbesserung von Musgrave (nur billigte dieser mit Recht die Schreibung γιγνώσκεις), in den Text aufgenommen, dagegen in den Anmerkungen stillschweigend verworfen wird.

Medea klagt über das Loos der Weiber: die verheirathete Frau muss Seherkraft besitzen, um zu wissen mit was für einem Manne sie es zu thun haben wird. Weiter heisst es V. 241—43:

κἂν μὲν τάδ' ἡμῖν ἐκπονουμέναισιν εὖ
πόσις ξυνοικῇ μὴ βίᾳ φέρων ζυγόν,
ζηλωτὸς αἰών· εἰ δὲ μή, θανεῖν χρεών.

Kirchhoff bemerkt, nachdem er die unerheblichen Varianten des mittleren Verses angeführt hat: "*ceterum scribendum videtur* μὴ βίᾳ φέρειν ζυγόν". Der Sinn dieser Vermuthung ist mir nicht klar, und ich wünschte, Kirchhoff hätte eine Uebersetzung beigefügt; aber der Infinitiv φέρειν kann wohl nur von ἐκπονουμέναισιν abhängen, und die Worte μὴ βίᾳ φέρειν ζυγόν scheinen somit eine Erläuterung des vorhergehenden ταῖδε sein zu sollen. Hiernach bekämen wir etwa folgenden Gedanken: "wenn wir mit Erfolg uns bemühen unser Joch zu tragen, so sind wir glücklich; im entgegengesetzten Falle bleibt uns nur übrig zu sterben". Damit würde Medea das Glück oder Unglück der Frauen von diesen selbst abhängig machen; je nachdem sie sich dem Joche fügen oder sich dagegen auflehnen, schaffen sie sich ein glückliches oder ein unerträgliches Dasein. Es liegt auf der Hand dass Medea zu einer derartigen Anschauung sich nicht verstehen kann; sie meint vielmehr dass das Wohl oder Wehe des Weibes ganz von dem bis zur Vermählung unerforschten Charakter des Mannes abhängig sei: der Mann kann sich, wie sie im Folgenden sagt, ausserhalb des Hauses Zerstreuung verschaffen, die Frau ist auf den Mann allein angewiesen. Oder sollen die Worte βίᾳ φέρειν ζυγόν eine Erläuterung zu ζηλωτὸς αἰών enthalten? Dann entsteht die Frage, wie es möglich sein soll in dem Tragen eines Joches einen beneidenswerthen Zustand zu sehen. Offenbar setzt doch das φέρειν ζυγόν ein unfreies Dasein voraus, und dies kann schwerlich ein Gegenstand des Neides werden. Ohne Zweifel nahm Kirchhoff daran Anstoss dass Medea in den Worten πόσις μὴ βίᾳ φέρων ζυγόν von einem Joche des Mannes redet, während sie doch in dem Manne den Herren und Unterdrücker sieht, der dem Weibe das Joch auferlegt. Natürlich hat man bei dem φέρων ζυγόν nicht an ein Pantoffelregiment zu denken, sondern nur an das was in den Worten selbst liegt, an das Tragen der Gebundenheit, die durch die Ehe als eine συζυγία für beide Theile gegeben ist, nur mit dem Unterschiede dass der Mann theilweise, die Frau vollständig sich gebunden sieht.

τοσοῦτον δέ σου τυγχάνειν βουλήσομαι,
ἵν μοι πόρος τις μηχανή τ' ἐξευρεῖν ἢ

πόσιν δίκην τῶνδ' ἀντιτίσασθαι κακῶν
τὸν δόντα τ' αὐτῷ θυγατέρ' ἥν τ' ἐγήματο,
σιγᾶν. γυνὴ γὰρ τἄλλα μὲν φόβου πλέα κτέ.

Das fehlerhafte τοσοῦτον δέ σου (oder δὲ σοῦ) findet sich in den meisten Handschriften (BCcd, vermuthlich auch in Ea), wogegen *BC* τοσοῦτον οὖν σου bieten. Die letztere Lesart ist in den meisten Ausgaben geduldet worden: wenn Schoene τοσοῦτο δ' ἐκ σοῦ schreibt, so hat dies weder eine diplomatische Autorität für sich — es beruht auf einer ganz werthlosen Handschrift, die für die Euripideische Kritik überhaupt ignorirt werden muss —, noch verträgt es sich mit dem Sprachgebrauche der Tragiker, die nur τοιοῦτον und τοσοῦτον, niemals τοιοῦτο oder τοσοῦτο setzen[1]). Kirchhoff macht jetzt den Vorschlag τοσόνδε τοίνυν σοῦ τυχεῖν βουλήσομαι, ohne sich Rechenschaft zu geben wie daraus die jetzige Lesart entstehen konnte. Ich vermuthete ehemals das unpassende δέ sei in ἄρα zu verwandeln; jetzt glaube ich vielmehr dass zu verbessern ist

τοσόνδε δή σου τυγχάνειν βουλήσομαι.

Wie leicht δή nach τοσόνδε ausfallen konnte, wird jedem einleuchten; und τοσόνδε σου oder τόσον δέ σου in τοσοῦτον δέ zu ändern lag einem Abschreiber gewiss nicht zu fern. An dem Futurum βουλήσομαι ist kein Anstoss zu nehmen; vgl. Schneidewin zu Soph. Ai. 681. Den Soloecismus ἥν τ' ἐγήματο statt ἥν τ' ἐγημε V. 262 hat man mit einer allerdings sehr leichten Aenderung ἥ τ' ἐγήματο beseitigen zu können gemeint, und selbst Kirchhoff hat diese Aenderung in den Text gesetzt. Allein das Lästige und Schleppende des Verses ist damit nicht fortzuschaffen; einerseits ist es seltsam dass Medea sich nicht damit begnügt an ihrem Gatten Rache zu nehmen, von dem allein sie sich gekränkt fühlt; andrerseits sind die Worte τὸν δόντα — ἐγήματο unrichtig gestellt; sie müssten zu πόσιν gesetzt sein, von dem sie durch die Worte δίκην τῶνδ' ἀντιτίσασθαι κακῶν jetzt so getrennt sind, dass sie in einer unerträglichen Weise nachhinken. Darum glaube ich, V. 262 gehört einem Interpolator, der darauf hinweisen wollte dass auch Creon und Glauca von der Rache der Medea betroffen werden. Diese Vermuthung wird fast zur Gewissheit durch die ganz ähnlichen Worte in V. 288: τὸν δόντα καὶ γήμαντα καὶ γαμουμένην.

277 αἰαῖ· πανώλης ἡ τάλαιν' ἀπόλλυμαι.

1) Dies einfache Factum wird für jeden Urtheilsfähigen genügen, um τοσοῦτο δ' ἐκ σοῦ für unzulässig zu halten. Kayser pflegt auf derartige Argumentationen nichts zu geben. Wenigstens erlaubte er sich, gegen meine Beobachtung (*Observ. crit. de trag. Graec. fragm.* p. 26) dass die Tragiker stets λοίσθιος, niemals λοῖσθος gebraucht haben, in den Neuen Jahrb. f. Philol. u. Paed. LXXIII, 4 p. 232 einzuwenden: «ohne Noth wird die Form λοῖσθος in Stob. Fl. 120, 7 verworfen als den Tragikern ungebräuchlich; ein innerer Grund, den jene gehabt hätten sie zu vermeiden, wird nicht nachzuweisen sein.» Vielleicht weiss Kayser zu sagen weshalb in der älteren Sprache niemals ἀγαθῶς vorkommt, niemals ἀγαθώτερος und ἀγαθώτατος, niemals ἤρησα, ἤρήθην und dgl. m. Allerdings ist es höchst bequem die starren Facta des Sprachgebrauches zu verachten und an die Stelle der todten Empirie innere Gründe zu setzen, d. h. der Willkür Thür und Thor zu öffnen. Wer so verfährt, kann freilich dem Euripides Hipp. 1418 ein Perfectum κατεσκήφασιν andichten (Neue Jahrb. f. Philol. u. Paed. LXXV, 2 p. 128), ohne danach zu fragen ob in der ganzen Gräcität ein Perfectum ἔσκηφα sich vorfindet.

ἐχθροὶ γὰρ ἐξιᾶσι πάντα δὴ κάλων,
κοὐκ ἔστιν ἄτης εὐπρόσοιστος ἔκβασις.

Für die von Kirchhoff beibehaltene Trennung αἳ αἳ sprechen die Handschriften, für die Verbindung αἰαῖ der Grammatiker Herodian περὶ μον. λέξ. p. 27, 13 (p. 96 ed. Lehrs.): wofür wir uns zu entscheiden haben, kann hiernach nicht zweifelhaft sein. V. 279 halte ich εὐπρόσοιστος für unrichtig. Die jetzige Lesart würde besagen: dem Ausgange des Unheils kann man schwer sich nähern. Denn εὐπρόσοιστος ist entweder ὃς εὐχερῶς προσφέρεταί τινι oder ᾧ τις εὐχερῶς προσφέρεται. Für die letztere Auffassung, die allein hier denkbar wäre, vgl. Aesch. Pers. 91: ἀπρόσοιστος γὰρ ὁ Περσῶν στρατός. Vermuthlich schrieb der Dichter:

κοὐκ ἔστιν ἄτης εὐπρόσωπος ἔκβασις,

d. h. es giebt kein scheinbares und günstiges, kein die Rettung versprechendes Mittel um dem Unheile zu entgehen. Ueber diese Anwendung des Wortes εὐπρόσωπος vgl. man οὐκ εὐπροσώποις φροιμίοις ἄρχει λόγου Eur. Phoen. 1336. λόγους εὐπροσώπους Demosth. de corona § 149. ὑπεκρίναντο μὲν οὕτω εὐπρόσωπα Herodot. 7, 168. εὐπρόσωπος μὲν οὖν ἡ τοιαύτη νομοθεσία Aristot. Polit. 2, 5 p. 1263 b 15. ἔγκλημα δ' ἔχθρας εὐπρόσωπον ἐζήτει Babrius 89, 3. εὐπρόσωπον πρόφασιν Tzetzes Epist. 2 p. 4. εὐπροσωπότερον γὰρ ἐκεῖνο (τὸ ψεῦδος) καὶ διὰ τοῦτο ἥδιον Lucian Hermot. c. 51. εὐπροσώπων ἀπολογιῶν Aesop. Fab. 14. εὐπροσώπους αἰτίας Libanius Epist. 814. εὐπρόσωπος αἰτία ἐς προκάλυμμα τῆς πλεονεξίας Agathias 1, 5 p. 24, 15. τὸ τῆς ἀφορμῆς εὐπρόσωπον Eust. Il. p. 309, 26. εὐπρόσωπον εἰρήνην Eunapius Exc. p. 42 ed. Bonn. Ganz denselben Fehler habe ich bei Soph. Oed. Col. 1277 beseitigt:

πειράσατ' ἀλλ' ὑμεῖς γε κινῆσαι πατρὸς
τὸ δυσπρόσοιστον κἀπροσήγορον στόμα.

Angemessener ist τὸ δυσπρόσωπον — στόμα, wie Suidas εὐπρόσωπος durch εὐπροσήγορος erklärt, und Phrynichus Bekk. p. 35, 10 δυσπρόσωπα ὄμματα anführt mit der Interpretation τὰ σκυθρωπὰ καὶ δύσμορφα. Im Oed. Col. 286 schwankt die Lesart zwischen κἀπρόσωπον τὸ δυσπρόσωπον und τὸ δυσπρόσοπτον: für ersteres erklärte sich schon L. Dindorf im Thes. Gr. L. vol. 2 p. 1789 B.

290 κρεῖσσον δέ μοι νῦν πρός σ' ἀπέχθεσθαι, γύναι,
ἢ μαλθακισθέντ' ὕστερον μέγα στένειν.

Die Accentuation ἀπέχθεσθαι findet sich durchgängig, wie es scheint, in unseren Handschriften: so ausser der vorliegenden Stelle auch Il. Φ, 83. Thuc. 1, 136. Plat. Rep. I p. 343 E. Lysias 6, 53. Isaeus bei Dionys. Hal. vol. 5 p. 603, 9 ed. Reisk. Plut. Mor. p. 530 C. Anecd. Bekk. p. 423, 25. Suidas v. ἀπεχθάνομαί σοι. Gleichwohl scheint Elmsley mit Recht ἀπεχθέσθαι zu fordern. Ein Praesens ἀπέχθομαι ist in der älteren Grācität nicht nachzuweisen, und die aus späteren Schriftstellern (Theocr. 7, 45. Quintus Smyrn. 5, 465. Dionys. Hal. Ant. Rom. 8, 29 p. 1568, 6. Hesych.) beigebrachten Belegstellen werden

schwerlich eine andere Grundlage haben als Fehler der Abschreiber[1]), wie denn die ehemalige Lesart

οὔτ' ἤδομαι τοῖσδ' οὔτ' ἀπέχθομαι κακοῖς

bei Euripides Hipp. 1260 jetzt nach den besseren Handschriften beseitigt ist. Ganz verkehrt aber ist das μέγα στένειν V. 291. Auf das laute Seufzen kommt es hier nicht an, sondern auf das zu späte Seufzen, d. h. auf die Reue. Es ist also zu lesen ὕστερον μεταστένειν, hinterher Reue empfinden. Dass schon Plutarch μέγα στένειν vorgefunden hat, spricht zwar für das Alter, nicht aber für die Richtigkeit der handschriftlichen Lesart; selbst auf Münzen und Inschriften[2]) sind Γ und Τ sehr häufig verwechselt worden. Auch bei Eur. Andr. 814:

οὕτω μέγ' ἀλγεῖ καὶ τὰ πρὶν δεδραμένα
ἔγνωκε πράξασ' οὐ καλῶς,

ist οὕτω μεταλγεῖ mit Nothwendigkeit durch den Zusammenhang gefordert.

νῦν δ', εἰ μένειν δεῖ, μίμν' ἐφ' ἡμέραν μίαν·
οὐ γάρ τι δράσεις δεινὸν ὧν φόβος μ' ἔχει.

Diese beiden Verse sind wohl die absurdesten, die in unseren Ausgaben des Euripides vorkommen. Dass Männer wie Porson und Elmsley sie als authentisch hinnehmen konnten, würde man für unmöglich halten, wenn nicht die Thatsache feststände, dass auch die einfachsten Dinge zuweilen von den bedeutendsten Kritikern nicht gesehen werden. Creon sagt vorher:

εἴ σ' ἡ ἐπιοῦσα λαμπὰς ὄψεται Θεοῦ
καὶ παῖδας ἐντὸς τῆσδε τερμόνων χθονός,
Θανεῖ· λέλεκται μῦθος ἀψευδὴς ὅδε.

Die Wirkung dieser nachdrucksvollen Worte kann nicht empfindlicher gestört werden, als wenn ein so sinnloses Gerede nachfolgt, wie die obigen Verse es bieten: "jetzt aber, wenn man bleiben muss, bleibe; denn du wirst nichts schreckliches thun von den Dingen die ich fürchte". In mindestens drei Handschriften (BCd) findet sich δράσαις statt δράσεις. Darauf gründet Kirchhoff, der beide Verse für echt hält, folgende Vermuthung:

εἰ γάρ τι δράσαις, δεινόν· ὧν φόβος μ' ἔχει.

Zu δεινόν soll vermuthlich ἐστίν ergänzt werden, und ὧν φόβος μ' ἔχει soll vermuthlich so viel sein als ἃ φοβοῦμαι. Sind diese Voraussetzungen richtig (ich wenigstens sehe keine andere

1) Bei Theocr. 7, 45 ist vielleicht zu lesen:
ὡς μοι καὶ τέκτων μέγ' ἀπήχθετο ὅστις ἐρευνῇ
ἶσον ὄρευς κορυφῇ τελέσαι δόμον Ὠρομέδοντος.
Ueber den Hiatus vgl. die von Meineke p. 358 gegebenen Beispiele, namentlich 19, 5: δεῖξέ τε τὰν ὀδύναν, καὶ μέμφετο ὅττι τε τυτθὸν κτέ., nebst Hermann Orph. p. 741. Quintus könnte geschrieben haben
ὤμοι ἐγώ, τί νυ τόσσον ἀπηχθόμεθ' ἀθανάτοισιν.
Was den Dionysius Hal. anbetrifft, so erinnere ich an eine frühere Bemerkung S. 38 Anm. Auf keinen Fall können solche Autoritäten maassgebend sein für Euripides.

2) In einer Inschrift bei Ross Demen von Attika Nr. 186 p. 102 steht: Μεταρίστη Μενεκλέους Φλυῆθεν. Die daselbst von mir vorgeschlagene Aenderung Μεγαρίστη wird bestätigt durch die Abschrift von Rangabé Antiq. Hell. Bd. II p. 883.

Möglichkeit der Erklärung), so bekommen wir den Sinn: "denn wenn du etwas thätest, so ist es schrecklich; und diese Dinge fürchte ich." Eine so absurde Redeweise kann dem Euripides nicht zugetraut werden. Vielleicht nimmt Kirchhoff ein allerdings mit der jetzigen Interpunction unverträgliches Hyperbaton an, so dass man die Worte verbinden soll: "εἰ γὰρ δράσαις τι ὧν φόβος μ' ἔχει, δεινόν". Auch damit wäre nichts gewonnen; denn von der Tautologie des Vordersatzes und Nachsatzes ganz abgesehen, wie kann Creon so unverständig sein, die Concession μἰμν' ἐφ' ἡμέραν μίαν damit zu begründen, dass er die Befürchtung ausspricht Medea werde Unheil anrichten? Wie kann Creon überhaupt zu den Worten λέλεκται μῦθος ἀψευδὴς ὅδε noch etwas auf diese Angelegenheit bezügliches hinzusetzen wollen? Offenbar ist οὐ γάρ τι δράσαις ein grober, aber nicht im mindesten auffallender grammatischer Schnitzer des Autors, statt οὐ γὰρ ἂν δράσαις τι. Uebrigens kannte Didymus, wie wir aus den Scholien wissen, nach V. 356 noch einen Vers, der zu den beiden von mir ausgeschiedenen vortrefflich passt, den Vers

στιγῇ δόμους εἰσβᾶσ', ἵν' ἔστρωται λέχος,

den wir schon oben S. 108 an ungehöriger Stelle fanden. Diejenigen welche alles für echt halten was in den Handschriften steht, werden hoffentlich den von Didymus beseitigten Vers recht bald wieder zu Ehren bringen: sicherlich waren die Handschriften des Didymus bei weitem älter und bei weitem besser als die unsrigen.

Medea triumphirt über die Thorheit des Creon, der, obwohl er die Macht hatte ihre Plane zu durchschneiden, sich nachgiebig gezeigt:

τήνδ' ἀφῆκεν ἡμέραν
μεῖναί μ', ἐν ᾗ τρεῖς τῶν ἐμῶν ἐχθρῶν νεκροὺς ϑήσω.

Statt des sinnlosen ἀφῆκεν ist nothwendig ἐφῆκεν zu schreiben, wie ich in der ersten Ausgabe vorschlug. Wenn nach ἐφιέναι "gestatten" meistens der Dativ der Person steht, so ist doch der Accus. cum inf. sicherlich hier eben so zulässig als bei ἔξεστιν.

τοιγὰρ με πολλαῖς μακαρίαν ἀν' Ἑλλάδα
ἔϑηκας ἀντὶ τῶνδε· ϑαυμαστὸν δέ σε
ἔχω πόσιν καὶ πιστὸν ἡ τάλαιν' ἐγώ.

Die Begriffe ϑαυμαστόν und πιστόν sind sehr heterogener Art, und πιστόν ist in diesem Zusammenhang unpassend. Von der Treulosigkeit des Iason hat Medea vorher V. 489 ff. gesprochen; hier sucht sie zu zeigen dass das schimmernde Glück, welches Iason ihr bot, zum schmachvollen Elend umschlug. "Was hilft es mir einen gepriesenen Mann zum Gatten zu haben, wenn ich hinausgestossen werde, von Freunden verlassen, allein mit meinen Kindern?" Dies ist der Gedanke den sie 512 ff. ausspricht. Danach muss man statt πιστόν einen dem ϑαυμαστόν verwandten Begriff erwarten, durch den der Ruhm oder die hohe Stellung des Iason bezeichnet wird. Nun bietet Alexander bei Walz Rhet. vol. 8 p. 451 ἔχω πόσιν καὶ σεμνόν. Danach halte ich das vollkommen sinngemässe σεπτόν für das ursprüngliche. Es ist leicht zu sehen, wie daraus einerseits πιστόν, andrerseits σεμνόν werden konnte. Ueber die Verwechslung von σεμνός und σεπτός vgl. Rhes. 973. In den unmittelbar

folgenden Worten V. 512 wird mit Elmsley ἡ φεύξεμαί γε γαῖαν ἐκβεβλημένη statt εἰ φεύξεμαί γε zu schreiben sein.

ἐγὼ δ', ἐπειδὴ καὶ λίαν πυργοῖς χάριν,
Κύπριν νομίζω τῆς ἐμῆς ναυκληρίας
σώτειραν εἶναι θεῶν τε κἀνθρώπων μόνην.

Iason behauptet in diesen Versen, nicht der Medea, die sich seine Retterin nannte, sei er zu Dank verpflichtet, sondern einzig und allein der Cypris. Zu den Worten ἐπειδὴ καὶ λίαν πυργοῖς χάριν, die jetzt ganz unbestimmt und darum unverständlich sind, vermisst man das Pronomen σήν. Denn Iason will sagen: "da du deine Verdienste um mich so überschwenglich hoch anschlägst". Vermuthlich ist das hier nicht angemessene ἐπειδή "da nunmehr" in ἐπεὶ σήν zu ändern. Bei weitem auffallender ist es dass an den folgenden Versen niemand Anstoss genommen hat. Iason kann wohl die Cypris als seine Retterin betrachten; aber wie soll die Göttin eine Retterin seiner ναυκληρία sein? Einerseits wird mit der ναυκληρία nur ein Theil der Gefahren bezeichnet, welche Iason zu bestehen hatte, andrerseits wird durch die Gunst der Cypris nicht die ναυκληρία, sondern der ναύκληρος selbst gerettet. Um es kürzer zu sagen, die Cypris war dem Iason nicht die Retterin seiner Lenkung, sondern die Lenkerin seiner Rettung. Die Stelle wird hiernach so zu schreiben sein:

ἐγὼ δ', ἐπεὶ σὴν καὶ λίαν πυργοῖς χάριν,
Κύπριν νομίζω τῆς ἐμῆς σωτηρίας
ναύκληρον εἶναι θεῶν τε κἀνθρώπων μόνην.

Die Aenderung σωτηρίας ναύκληρον statt ναυκληρίας σώτειραν ist durch den Sinn mit so gebieterischer Nothwendigkeit gefordert, dass etwaige palaeographische Bedenken schweigen müssen[1]). Hinsichtlich der metaphorischen Anwendung von ναύκληρος vgl. Aesch. Suppl. 177: πιστῷ γέροντι τῷδε ναυκλήρῳ πατρί, und das sinnverwandte σῇ κυβερνῶμαι χερί Soph. Ai. 35.

ἐμοί τε λύει τοῖσι μέλλουσιν τέκνοις
τὰ ζῶντ' ὀνῆσαι.

Durch die künftigen Kinder will Iason die lebenden fördern. Es liegt auf der Hand dass den lebenden nur die todten entgegengesetzt werden können, nicht aber die künftigen. Vermuthlich ist zu lesen τά γ' ὄντ' ὀνῆσαι, wie z. B. τά τ' ὄντα καὶ μέλλοντα gern verbunden wird. Unrichtig hat Lachmann im Babrius Fab. 14, 4 geschrieben: μᾶλλον ᾗρούμην, εἰ

1) Uebrigens wird es an ähnlichen Entstellungen nicht fehlen. Eine mit verschiedenen Conjecturen und abenteuerlichen Erklärungen behelligte Stelle des Soph. Oed. Col. 1231 lautet nach der Ueberlieferung:

τίς πλάγχθη πολύμοχθος ἐ-
ξω, τίς οὐ καμάτων ἔνι;

Dass statt πλάγχθη ein Substantivum nothwendig ist, hat Dobree richtig gesehen; ich habe vermuthet τίς μόχθος πολύπλαγκτος ἔξω.

νεκρὸν εἵλκες, τοῦ δ' ἔτ' ὄντος οὐχ ἥπτου. Die handschriftliche Lesart τοῦ δὲ ζῶντος οὐχ ἥπτου ist tadellos; über die Kürze vor dem Zeta vgl. Fab. 31,23. 53,4. 61,10. 95,29. 107,15.

καλῶς γ' ἂν οὖν τῷδ' ὑπηρέτεις λόγῳ,
εἰ σοι γάμον κατεῖπον, ἥτις οὐδὲ νῦν
τολμᾷς μεθεῖναι καρδίας μέγαν χόλον.

Im ersten Verse habe ich nach codex C diejenige Lesart gegeben, welche aus dem Schwanken unserer Handschriften sich als die ursprüngliche erweist. Die fehlende Silbe hat man auf dreifache Weise zu gewinnen gesucht; entweder schrieb man οὖν σὺ τῷδ' ὑπηρέτεις oder οὖν μοι τῷδ' ὑπηρέτεις oder οὖν τῷδ' ἐξυπηρέτεις. Statt diesen einfachen Thatbestand klar darzulegen und aus diesem einfachen Thatbestande die nicht eben schwierige Emendation des Verses herzuleiten, giebt Kirchhoff in mehr als zwei Zeilen die handschriftlichen Lesarten und schliesst mit der Bemerkung "*unde quid fuerit archetypi incertum videri potest*". Natürlich hat man weder μοι noch σὺ nach οὖν einzuschalten, ebenso wenig ist ὑπηρέτεις in ἐξυπηρέτεις zu verwandeln; vielmehr liegt der Fehler in dem οὖν. Medea sagte vorher:

χρῆν σ', εἴπερ ἦσθα μὴ κακός, πείσαντά με
γαμεῖν γάμον τόνδ', ἀλλὰ μὴ σιγῇ φίλων.

Darauf folgt die ironische Entgegnung des Iason: "das würde mir wohl viel geholfen haben, dir von meiner Vermählung zu erzählen, da du nicht einmal jetzt dich zu mässigen weisst." Es ist offenbar zu lesen

καλῶς γ' ἄν, οἶμαι, τῷδ' ὑπηρέτεις λόγῳ,

wie οἶμαι häufig dem ironischen Ausdrucke dient. Vgl. Heracl. 968, wo auf die Frage der Alcmena, καὶ ταῦτα δόξασ' Ὕλλος ἐξηνέσχετο; die Antwort des Boten erfolgt: χρῆν αὐτόν, οἶμαι, τῆδ' ἀπιστῆσαι χθονί. Aesch. Prom. 972 ed. Herm., wo Mercurius den Prometheus anredet: κρεῖσσον γάρ, οἶμαι, τῇδε λατρεύειν πέτρᾳ ἢ πατρὶ φῦναι Ζηνὶ πιστὸν ἄγγελον.

Auf die zuletzt angeführten Worte des Iason entgegnet Medea V. 591 f.:

οὐ τοῦτό σ' εἶχεν, ἀλλὰ βάρβαρον λέχος
πρὸς γῆρας οὐκ εὔδοξον ἐξέβαινέ σοι.

Dass Kirchhoffs Vermuthung οὐ τοῦτό σ' ἔσχ' ἄν, auch ganz abgesehen vom Sinne der Stelle, unzulässig ist, wurde bereits oben S. 22 bemerkt. Zur Hinzufügung eines ἄν ist hier überhaupt kein Grund vorhanden; dagegen ist das Verbum ἔχειν zu unbestimmt, um den Sinn der Entgegnung klar zu machen. Medea meint, "nicht dies war es was dich abhielt, deinen Plan mir mitzutheilen". Somit wird zu lesen sein οὐ τοῦτό σ' εἶργεν. Ueber die Verwechslung beider Verba vgl. Eur. El. 23: ταύτην (τὴν Ἠλέκτραν) ἐπειδὴ θαλερὸς εἶχ' ἥβης χρόνος — εἶχεν ἐν δόμοις Αἴγισθος οὐδ' ἥρμοζε νυμφίῳ τινί. Das matte εἶχεν ἐν δόμοις, er hatte sie im Hause, bezeichnet durchaus nicht das worauf es ankommt, Aegisthus hielt die Electra in der Enge des Hauses, er hemmte ihre freie Bewegung; dies könnte durch κλήσα

εἶχεν oder κρύψας εἶχεν bezeichnet sein, nicht aber durch das einfache εἶχεν. Natürlich schrieb Euripides εἶργεν ἐν δόμοις.

655 σὲ γὰρ οὐ πόλις, οὐ φίλων τις
ὤκτειρεν παθοῦσαν
δεινότατα παθέων.

Das Metrum des zweiten Verses, ὤκτειρε παθοῦσαν oder ὤκτειρεν παθοῦσαν, streitet mit den entsprechenden strophischen Worten δυσπέρατον αἰῶν'. Musgrave hat darum ὤκτισεν παθοῦσαν vorgeschlagen: ich dachte an οἰκτερεῖ.

Medea beschwört den Aegeus sich ihrer anzunehmen; darauf fährt sie fort:

οὕτως ἔρως σοι πρὸς θεῶν τελεσφόρος
715 γένοιτο παίδων, καὐτὸς ὄλβιος θάνοις.

Wie unpassend hier θάνοις ist, bedarf kaum des Nachweises. Medea kann dem Aegeus neben den Vaterfreuden nur ein glückliches Leben wünschen, nicht aber einen glücklichen Tod. Darum habe ich ὄλβιος ζάλοις verbessert. So findet sich πόλιν δ' ἁλοῦσαν und πόλιν θανοῦσαν verwechselt bei Eur. Tro. 484. Mit dem Ausdruck ὄλβιον ζάλλειν vgl. τίμιος γεραίρεται Eur. Suppl. 553. Endlich über die Optativform ζάλοιμι s. Hermann zu Aesch. Suppl. 663. Weniger ansprechend scheint mir Schneidewins Vermuthung καὐτὸς ὄλβιος σθένοις.

Weiter sagt Medea:

716 εὕρημα δ' οὐκ οἶσθ' οἷον εὕρηκας τόδε·
παύσω δέ σ' ὄντ' ἄπαιδα καὶ παίδων γονάς
σπεῖραί σε χήσω· τοιάδ' οἶδα φάρμακα.

Nach V. 716 hat Kirchhoff mit gewohnter Freigebigkeit eine Lücke angesetzt, ohne anzugeben was in dieser Lücke gestanden haben soll. Sicherlich hängen V. 717 f. mit 716 auf das engste zusammen: "du weisst nicht", sagt Medea, "wie glücklich du es getroffen hast, da ich im Stande bin deinen sehnlichsten Wunsch in Erfüllung gehen zu lassen". Somit wird das εὕρημα, von welchem Medea 716 redet, in den folgenden Versen näher bezeichnet; statt des δέ würde vielleicht ein γάρ oder das Fehlen jeder Partikel angemessener sein. Ist dies der Fall, so bietet sich die einfache Emendation, παύσω γάρ ὄντ' ἄπαιδα καὶ παίδων γονὰς σπεῖραί σε χήσω, oder παύσω σε φύντ' ἄπαιδα[1]). Indess leiden V. 717 f. an einer solchen Breite des Ausdrucks, dass ich eher glauben möchte die jetzige Lesart beruhe auf einer ungeschickten Erweiterung; vielleicht ist 717 ganz zu tilgen.

729 ἐκ τῆσδε δ' αὐτὴ γῆς ἀπαλλάσσου πόδα.

1) Wie leicht ὄντα und φύντα verwechselt werden, liegt auf der Hand. Vgl. Soph. Trach. 1062: γυνὴ δὲ χῆλυς οὖσα κοὐκ ἀνδρὸς φύσιν. Es war nicht in οὖσα κοὐκ in κοὐκ ἔχουσ' zu ändern, sondern lediglich φῦσα statt οὖσα zu schreiben. Eur. fr. 945 bei Orion Flor. Eurip. 13 p. 265, 25 ed. Meinek.: ἡπίως τὴν τῶν τέκνων οἴσουσι Κύπριν, ὄντες οὐ σκαιοὶ φύσιν. Statt ὄντες bietet die Handschrift ὄυντες. Es ist zu lesen φύντες οὐ σκαιοὶ φύσιν.

Dass ἀπαλλάσσου πόδα eine höchst auffallende Redeweise ist, hat Elmsley gefühlt, der nicht ganz passend an Hec. 812 erinnert: οἶμοι τάλαινα, ποῖ μ' ὑπεξάγεις πόδα; Eher könnte man sich auf El. 94 berufen: καὶ τειχέων μὲν ἐντὸς οὐ βαίνω πόδα, womit zu vergleichen βαίνουσιν ἐξ οἴκων πόδα El. 1173. ἐπ' ἀλλοδαπὴν οἶμον ἔβαινε πόδα Pancrates bei Ath. XI p. 478 B, wie ähnliche Pleonasmen bei den Composita von βαίνω (Lobeck zu Soph. Ai. p. 87). Lässt sich damit das ἀπαλλάσσου πόδα entschuldigen, so erscheint doch der ganze Vers als höchst unnütz, wenn man die vorhergehenden Worte des Aegeus liest:

ἐκ τῆσδε μὲν γῆς οὔ σ' ἄγειν βουλήσομαι,
αὐτὴ δ' ἑάνπερ εἰς ἐμοὺς ἔλθῃς δόμους,
μενεῖς ἄσυλος κοὔ σε μὴ μεθῶ τινι.

Daher möchte ich V. 729 als unecht ausscheiden. Oder sollen wir glauben, Euripides habe ἐκ τῆσδε μὲν γῆς und ἐκ τῆσδε δ' αὐτὴ γῆς so dicht hinter einander wiederholt?

πέποιθα· Πελίου δ' ἐχθρός ἐστί μοι δόμος
Κρέων τε. τούτοις δ' ὁρκίοισι μὲν ζυγείς,
ἄγουσιν οὐ μεθεῖ' ἂν ἐκ γαίας ἐμέ·
λόγοις δὲ συμβὰς καὶ θεῶν ἐνώμοτος
φίλος γένοι' ἂν κἀπικηρυκεύματα
οὐκ ἂν πίθοιο· τἀμὰ μὲν γὰρ ἀσθενῆ,
τοῖς δ' ὄλβος ἔστι καὶ δόμος τυραννικός.

Statt μεθεῖ' ἄν V. 736 bieten unsere Handschriften μεθῆσ' ἄν oder μεθεῖς ἄν. Im folgenden Verse ist ἐνώμοτος die allein verbürgte Lesart, und Kirchhoff hätte nicht ἀνώμοτος in den Text setzen sollen, da diese Conjectur den Schwierigkeiten keineswegs abhilft. V. 738 ist κἀπικηρυκεύματα durch das Zeugniss der Scholien gesichert (Δίδυμος δὲ φησὶ λείπειν τὴν διά, ἵν' ᾖ "διὰ τὰ ἐπικηρυκεύματα"), während in unsere Handschriften die Correctur κἀπικηρυκεύμασι oder κἀπὶ κηρυκεύμασι sich eingeschlichen hat. In den Worten καὶ θεῶν ἐνώμοτος muss ein Gegensatz liegen zu dem früheren ὁρκίοισι ζυγείς 735; es wird also μὴ θεῶν ἐνώμοτος zu schreiben sein mit G. Hermann. Das folgende φίλος γένοι' ἄν ist unbestimmt, da man einen Dativ wie τοῖς ἐμοῖς ἐχθροῖς aus dem Zusammenhang nicht entnehmen kann. Badham schlug vor φαῦλος γένοι' ἄν (Philol. X p. 338). Leichter und angemessener dürfte sein φηλὸς γένοι' ἄν[1]). Die folgenden Worte κἀπικηρυκεύματα οὐκ ἂν πίθοιο sind ganz unverständlich. Kirchhoff entscheidet sich wiederum für das bequeme Mittel nach κἀπικηρυκεύματα eine Lücke anzunehmen, deren Inhalt zu errathen natürlich dem Scharfsinn des geneigten Lesers überlassen bleibt. Mit Benutzung von Wyttenbachs Vermuthung τάχ' ἂν statt οὐκ ἂν schreibe ich: κἀπικηρυκεύματα τάχ' ἂν πίθοι σε. Mit ἐπικη-

1) Das Wort φηλός, das bei Arcadius p. 53, 3 in οὐλός verschrieben ist, gebraucht Menander Com. IV p. 77: δύ' οἰκίας (vielleicht δύο σκιὰς) φηλῶν γερόντων. Das damit zusammenhängende Verbum φηλόω findet sich bei Aeschylus und Euripides.

ρυκεύματα, Heroldssendungen, können nur die Versuche gemeint sein, welche, wie Medea fürchtet, ihre Feinde machen werden, den Aegeus für sich zu gewinnen.

741 πολλὴν ἔλεξας, ὦ γύναι, προμηθίαν.

Die Lesart mehrerer Handschriften von verschiedenen Familien (*CBC*) ἔλεξας ἐν λόγοις προμηθίαν, ist zu auffallend, um für eine Erfindung gelten zu können; vielmehr haben wir in ὦ γύναι einen Verbesserungsversuch, durch den das tautologische ἔλεξας ἐν λόγοις beseitigt werden sollte. Man suchte den Fehler an falscher Stelle; er liegt in ἔλεξας: denn sicherlich kann ἔλεξας προμηθίαν nicht bedeuten, was der Zusammenhang fordert, "du verfährst überaus vorsichtig". Demnach vermuthe ich πολλὴν ἔσχηκας ἐν λόγοις προμηθίαν. Vgl. unten 915: πολλὴν ἔσχηκε σὺν θεοῖς προμηθίαν. Die Genesis des Fehlers war also folgende: aus ἔσχηκας ἐν λόγοις wurde zunächst durch ein unwillkürliches Versehen ἔλεξας ἐν λόγοις, und daraus in Folge einer willkürlichen Aenderung ἔλεξας ὦ γύναι[1]).

748 τί χρῆμα δράσειν ἢ τί μὴ δράσειν; λέγε.

Mit dieser Frage unterbricht Aegeus die Medea, welche 746—751 in zusammenhängender Rede den Eid, den Aegeus leisten soll, ihm mittheilt. Die Frage des Aegeus ist unzeitig, weil er den Inhalt des Eides bereits kennt und mit den Worten ἐξηγοῦ θεούς so eben die Medea aufgefordert hat den Eid in bestimmte Worte zu fassen. Dazu kommt dass genau dieselben Worte τί χρῆμα δράσειν κτέ. auch Iph. Taur. 738 sich finden. Endlich ist auch dies zu beachten, dass nach Ausscheidung von V. 748 Medeas Rede dem Umfang nach mit der letzten Rede des Aegeus in Uebereinstimmung kommt. Allerdings ist in der zweiten Hälfte des Gespräches von Aegeus und Medea (V. 709 ff.) die Symmetrie öfters gestört; allein zum Theil wenigstens scheinen diese Störungen auf Fehlern unseres Textes zu beruhen. So muss es auffallen dass Aegeus nach V. 755 schweigt, dass er das Lebewohl, welches Medea ihm sagt, unerwidert lässt, und dass wir sein Abtreten von der Bühne nur aus den Reden anderer entnehmen. Dringender ist der Verdacht einer Interpolation bei einer früheren Stelle, wo es nach einer längeren Rede des Aegeus heisst:

731 ΜΗ. ἔσται τάδ'· ἀλλὰ πίστις εἰ γένοιτό μοι
τούτων, ἔχοιμ' ἂν πάντα πρὸς σέθεν καλῶς.
ΑΙ. μῶν οὐ πέποιθας; ἢ τί σοι τὸ δυσχερές;
ΜΗ. πέποιθα· Πελίου δ' ἐχθρός ἐστί μοι δόμος κτέ.

Der zweite dieser Verse ist in der Form höchst auffallend; das τούτων ist ungeschickt gestellt, und ἔχοιμ' ἂν πάντα πρὸς σέθεν καλῶς ist eine schwerlich zu rechtfertigende Redeweise[2]). Es scheint mir unzweifelhaft dass der Vers von einem Verbesserer herrührt, der zu πίστις εἰ γένοιτό μοι den Nachsatz hinzufügen zu müssen glaubte.

1) Mehrere Belege für diese öfters wiederkehrende Gattung von Verderbnissen werde ich bei der Besprechung von Tro. 940—42 anführen.

2) Man sagt entweder πάντα ἔχω oder πάντα μοι καλῶς ἔχει. Ueber die erste Ausdrucksweise vgl. τὰ μὲν παρ' ἡμῶν πάντ' ἔχεις Phoen. 953. τοῦτο πάντ' ἔχω μα-

Medea theilt dem Chore ihren Plan in Bezug auf Iason mit:

μολόντι δ' αὐτῷ μαλθακοὺς λέξω λόγους,
ὡς καὶ δοκεῖ μοι ταῦτα καὶ καλῶς ἔχει,
γάμους τυράννων, οὓς προδοὺς ἡμᾶς ἔχει,
καὶ ξύμφορ' εἶναι καὶ καλῶς ἐγνωσμένα·
παῖδας δὲ μεῖναι τοὺς ἐμοὺς αἰτήσομαι,
οὐχ ὡς λιποῦσα πολεμίας ἐπὶ χθονὸς
ἐχθροῖσι παῖδας τοὺς ἐμοὺς καθυβρίσαι,
ἀλλ' ὡς δόλοισι παῖδα βασιλέως κτάνω.

Nach V. 777 hat Kirchhoff eine Lücke angesetzt und in den Anmerkungen sagt er: "*excidit versus propter similem duorum versuum exitum* ἔχει—ἔχει." Billiger Weise fragt man zunächst, was für ein Gedanke nach V. 777 vermisst werde und welche Worte in der vermeintlichen Lücke etwa stehen müssten, um den Anstoss zu beseitigen, der in den jetzigen Worten liegt. Auf diese Frage weiss ich nicht zu antworten. Ebenso wenig begreife ich, wie durch die Wiederkehr des ἔχει in V. 777 und 778 der Ausfall eines Verses veranlasst werden konnte, der zwischen diesen beiden Versen stand — man müsste denn annehmen, was Kirchhoff selbst weder sagt noch glaublich finden wird, der ausgefallene Vers habe sich ebenfalls auf ἔχει geendigt. Natürlich konnte das Auge eines Abschreibers sehr leicht von dem ersten ἔχει zum zweiten ἔχει abirren; dann aber könnten wir ἔχει nur einmal in unserem Texte lesen, wie dies wirklich der Fall ist in einer Florentiner Handschrift, die V. 778 fortlässt. Vermuthlich sind V. 778 f. das Fabrikat eines Späteren, der die Worte ὡς καὶ δοκεῖ μοι ταῦτα καὶ καλῶς ἔχει näher zu erläutern versuchte. So urtheilte bereits Porson. Oder sollen wir dem Euripides eine so ungeschickte Amphibolie aufbürden, wie sie in den Worten γάμους τυράννων οὓς προδοὺς ἡμᾶς ἔχει enthalten ist? Dass οὓς sich auf γάμους und nicht auf τυράννων bezieht, dass von προδοὺς der Accusativ ἡμᾶς und nicht οὕς abhängt, dass endlich nicht προδοὺς ἔχει verbunden werden darf — dies alles sind Dinge, die errathen werden müssen. Ausserdem sind die Neutra ξύμφορα und ἐγνωσμένα hier nach dem voraufgehenden γάμους ganz ungrammatisch; es müsste nothwendig ξυμφόρους und ἐγνωσμένους heissen[1]). V. 782 ist ohne Zweifel, wie schon Brunck gesehen hat, aus einer

ζῶν Orest. 749. πάντ' ἔχεις ὅσων σε δεῖ Ion 1018. πάντ' ἔχεις Iphig. Aul. 885. Rhes. 605 u. ä. Andrerseits finden wir πάντα γὰρ καλῶς ἔχει Med. 756. ὥστε μοι (σοι) καλῶς ἔχειν Hipp. 50. Iphig. T. 604. καλῶς ἔχει μοι Eur. fr. 702 (denn so ist statt καλῶς ἔχοιμι zu lesen, wie auch Med. 307 und 723 unsere Handschriften zwischen ἔχει μοι und ἔχοιμι getheilt sind) u. s. w. Grammatisch richtig wäre auch πάντα ἔχω καλά, wie Eur. Hel. 285 sagt: πάντ' ἔχουσα δυστυχῆ. Dagegen scheint πάντα καλῶς ἔχω oder etwas entsprechendes sich nirgends zu finden. Wollte jemand in dem obigen Verse der Medea schreiben, ἔχοι μ' ἄν (d. h. ἔχοι μοι ἄν) πάντα πρὸς σέθεν καλῶς, so würde zwar der Ausdruck gefälliger werden, aber dafür eine metrische Licenz sich ergeben, die der Tragoedie fremd ist: ich meine die Elision des μοι, die sich zwar bei Homer, Archilochus fr. 21 p. 541 und Theocr. 4, 58 findet, aber aus Soph. Ai. 191 und Phil. 782 für die Tragoedie noch nicht erwiesen ist, da überhaupt kein Diphthong von einem Tragiker elidirt wird, ausser OI in οἶμοι.

1) Vgl. die Bemerkung über Orest. 391 oben S. 38. In einem Bruchstück aus Eur. Antiopa (fr. 205) bietet Ioh. Damasc. p. 697, 7 ed. Gaisf.: ἐγὼ τὰ πράγματα κρεῖσσον νομίζω τῶν λόγων ἀεί ποτε. Mit Recht verlangte Jacobs κρείσσω, ohne zu wissen dass diese Vermuthung bestätigt wird durch Clem. Alex. Strom. I p. 341

späteren Stelle entlehnt (1060 f.: ὅπως ἐχθροῖς ἐγὼ παῖδας παρήσω τοὺς ἐμοὺς καὶυβρίσαι). Tilgt man diesen Vers, so vermisst man V. 781 einen von ὡς abhängigen Conjunctiv. Kirchhoff macht den Vorschlag

οὐχ ὡς λιποῦσα πολεμίας ἔπι προδῶ

Dies müsste, auch wenn es die beste handschriftliche Autorität für sich hätte, als fehlerhaft verworfen werden; denn kein Tragiker konnte in einem Trimeter die kurze Endsilbe in ἔπι vor ΠΡ verlängern. Hierüber handelt ausführlich Erfurdt zu Soph. Ai. 1109 p. 625—632. War Kirchhoff durch dessen Erörterung von der Unzulässigkeit seiner Vermuthung nicht überzeugt, so konnte er sich wenigstens die Mühe sparen, Med. 246 πρὸς ἥλικα τραπείς, Rhes. 871 ποῖ δὲ τράπωμαι, Bacch. 515 οὗτι χρεών aus seinem Texte zu tilgen, und brauchte Hel. 1640 der Porsonschen Emendation ἐμ' ὡς πρὸ δεσποτῶν mit keiner Silbe zu gedenken. In den Chorpartieen gestatten sich die Tragiker die im Trimeter gemiedenen Verlängerungen der Endsilben; vgl. γένος ὠλέσατε πρέμνοθεν οὕτως Aesch. Sept. 1056, τοῖον ἐπὶ κνέφας ἀνδρὶ μύσος πεπόταται Eum. 379, ὑπὸ πλάκα Σουνίου Soph. Ai. 1220, καὶ τὸ πρὶν ἐπαρκέσει Ant. 612, εἴδομεν ἀ Ὑροεῖς El. 853, χαίτη τ' οὔτις ἐπὶ προθύροις Eur. Alc. 101, ἀπὸ χροὸς ἐνδυτῶν Tro. 257, παρὰ Ὑρόνον Heracl. 753 und fr. 623. In der obigen Stelle der Medea ist vermuthlich mit Burges zu lesen:

οὐχ ὡς λίπω σφε πολεμίας ἐπὶ χθονός,
ἀλλ' ὡς δόλοισι παῖδα βασιλέως κτάνω.

In dem glänzenden Loblied auf das von den Göttern reich gesegnete Athen (V. 824 ff.) finden sich Schwierigkeiten, die mit den vorhandenen Hilfsmitteln sich kaum beseitigen lassen. Mit Sicherheit jedoch glaube ich eine Stelle heilen zu können. Es heisst gleich im Anfange:

Ἐρεχθεΐδαι τὸ παλαιὸν ὄλβιοι
καὶ θεῶν παῖδες μακάρων, ἱερᾶς
χώρας ἀπορθήτου τ' ἀποφερβόμενοι
κλεινοτάταν σοφίαν, ἀεὶ διὰ λαμπροτάτου κτέ.

Wie wir von "geistiger Nahrung" reden, wie Cicero sagt "*haec studia alunt adolescentiam*", so ist die Metapher φέρβεσθαι σοφίαν im Griechischen durchaus nicht undenkbar: vgl. σοφίας καρπὸν δρέπειν Pind. fr. 193. Aehnlich ist wenigstens das Pindarische κρέσσονα μὲν ἀλικίας νόον φέρβεται Pyth. 5, 117; häufiger finden sich Ausdrücke wie der des Palladas Anth. Pal. 10, 52: Μουσῶν καὶ Χαρίτων τρόφιμος[1]). Vermuthlich gehört auch hierher Soph.

1) In gleicher Weise sagt Aristophanes bei Gellius N. A. XV, 20, 8 vom Euripides:

ὁ δ' Ἀναξαγόρου τρόφιμος χαιοῦ στρυφνὸς μὲν ἔμοιγε προσειπεῖν
καὶ μισόγελως καὶ τωθάζειν οὐδὲ παρ' οἶνον μεμαθηκώς,
ἀλλ' ὅ τι γράψαι, τοῦτ' ἂν μέλιτος καὶ Σειρήνων ἡτετεύχει.

Dem Aristophanes gehören nämlich diese drei Verse und nicht, wie man auf die Autorität des Gellius hin bisher allgemein geglaubt hat, dem Alexander Aetolus. Für Aristophanes spricht zunächst das Zeugniss der Vita Eur. V. 63: σκυθρωπὸς δὲ καὶ σύννους καὶ αὐστηρὸς ἐφαίνετο καὶ μισόγελως καὶ μισογύνης, καθὰ καὶ Ἀριστοφάνης αὐτὸν αἰτιᾶται· "στρυφνὸς μὲν ἔμοιγε προσειπεῖν Εὐριπίδης". Was Gellius XV, 20 über Euripides erzählt, stammt aus derselben Quelle, welche unserer Vita Eur. zu Grunde liegt, steht aber an Werth der Griechischen

fr. 865 bei Stob. Flor. 117, 4: οὐκ ἔστι γῆρας τῶν σοφῶν, ἐν οἷς ὁ νοῦς θεία ξύνεστιν ἡμέρᾳ τεθραμμένος[1]). Aber vollkommen unmöglich scheint mir die Verbindung χώρας ἀποφέρβεσθαι σοφίαν. Nach Schoenes Erklärung deutet das Bild an, "dass auf diesem Boden die Weisheit gleichsam ein natürliches Gewächs ist". Mit andern Worten, die Weisheit wächst wild in Attika, und Attikas Bewohner grasen sie ab wie die Thiere des Feldes ihr Futterkraut. Dies ungefähr wäre die Anschauung die dem jetzigen Ausdruck zu Grunde liegt, und ich denke, weder das Aristophanische ἔνθεν ὥσπερεὶ μέλιττα Φρύνιχος ἀμβροσίων μελέων ἀπεβόσκετο καρπόν Av. 750, noch irgend eine andere Metapher darf uns überreden dem Euripides zuzutrauen, dass er die Athener mit grasfressenden Vierfüsslern verglichen habe. Die Worte κλεινοτάταν σοφίαν sind ohne Zweifel als interpolirt zu streichen, und statt des nachfolgenden ἀεὶ ist wahrscheinlich καὶ zu schreiben: denn κλεινοτάταν σοφίαν ist eben nur veranlasst durch den Lesefehler ΚΛΕΙ statt ΚΑΕΙ. Die Euripideischen Worte aber ἱερᾶς χώρας ἀπορθήτου τ' ἀποφερβόμενοι bezeichnen nichts anderes als ἱερὰν καὶ ἀπόρθητον χώραν νεμόμενοι. Für die Tilgung der Worte κλεινοτάταν σοφίαν spricht auch das Metrum der Antistrophe, wo Kirchhoff wiederum unrichtiger Weise eine Lücke angesetzt hat. Allerdings ist die Antistrophe sehr übel zugerichtet; sicherlich aber müssen die ersten Verse so abgetheilt werden:

τοῦ καλλινάου τ' ἀπὸ Κηφισοῦ ῥοαῖς
τὰν Κύπριν κλήζουσιν ἀφυσσαμέναν

Biographie um vieles nach. Wenn also Gellius hier zufällig das vollständige Fragment bietet, so folgt daraus keineswegs dass auch seine Angabe über den Autor des Fragmentes die glaubwürdigere sei; vielmehr müssen wir, wenn nicht zwingende Gründe dagegen sprechen, der zuverlässigeren Vita folgen. Dass das Fragment alt ist, wird wahrscheinlich durch eine andere Stelle der Vita V. 84: μειρακίου δέ τινος ἀπαιθευτοτέρου στόμα δυσῳδὲς ἔχειν ὑπὸ φθόνου αὐτὸν εἰπόντος, "εὐφήμει" ἔφη· "μέλιτος καὶ Σειρήνων γλυκύτερον στόμα", wo die Worte μέλιτος καὶ Σειρήνων der obigen Dichterstelle entlehnt sind. Ferner lehrt das Metrum, dass wir es nicht mit einem Alexandriner, sondern mit einem alten Komiker zu thun haben. Somit erledigt sich die Annahme von Meineke Anal. Alex. p. 247: "*apertum esse opinor Alexandrum, quod nec ante eum nec postea quisquam fecisse videtur, anapaesticis tetrametris ita usum esse, ut totum et integrum carmen ex iis componeret.*" Endlich ist auch die Sprachform des Aristophanes durchaus würdig mit Ausnahme des einzigen ἐτετεύχει, das ich als verderbt bezeichne nicht weil die Form unattisch, sondern weil das Wort vollkommen sinnlos ist. "Aus Honig Lieder bereiten" lässt man sich noch gefallen; aber "aus Sirenen" Lieder zu bereiten ist eine Unmöglichkeit. Der Sinn fordert einen Begriff wie ᾁδώδει: vielleicht μέλιτος καὶ Σειρήνων ἐπεπνεύκει? In jedem Falle sind die drei Tetrameter unter die Aristophanischen Fragmente aufzunehmen; ebenso ist ἐπραξένει nachzutragen aus Anecd. Paris. vol. 4 p. 114, 12, und das Wortspiel ταμίας — Λαμίας aus Plut. Mor. p. 853 B.

1) Der zweite Vers ist in einer sinnlosen Weise entstellt, und es ist fast unglaublich dass Ellendt, der doch etwas Griechisch verstand, das alberne θεία ἡμέρᾳ erklären wollte "*aetate a diis concessa*" (Lex. Soph. I p. 770). Vielleicht kommt mein Emendationsversuch dem Richtigen nahe: ἐν οἷς ὁ νοῦς ἑᾷα ξύνεστιν, εὐμαρῶς τεθραμμένος. Uebrigens vermuthe ich, das Fragment gehört nicht dem Sophocles, sondern dem Euripides. Ueber die Verwechslung von ΘΕΙΟC und ΟCΙΟC vgl. Corp. Inscr. 8667, 5 vol. 4 p. 312:

ΕΥΧΑΙC ΘΕΟΔΟΤΟΥ ΤΟΥ ΟCΙΟΥ ΕΠΙCΚΟΠΟΥ

wo nicht mit Kirchhoff εὐχαῖς Θεοδοσίου τοῦ ἐπισκόπου zu verbessern ist, sondern εὐχαῖς Θεοδότου τοῦ ὁσίου ἐπισκόπου. Im zweiten Verse derselben Inschrift durfte die Ueberlieferung

ΒΑΕΠΕΙΝ ΔΕΔΩΚΕΝ ΩΡΡΕCΤΕΚΑΙΝΕΟΝ

nicht in βλέπειν δέδωκεν ἀρραγές τε καὶ νέον geändert werden; vielmehr war zu lesen

βλέπειν δέδωκε νεωρές τε καὶ νέον.

Dass an der Verbindung νεωρές καὶ νέον kein Anstoss zu nehmen ist, lehrt νεοττὸς καὶ νέα bei Epicrates Com. 3 p. 366, womit zu vergl. Lobeck zu Soph. Ai. p. 137 f. Paral. p. 61.

χώραν καταπνεῦσαι μετρίας ἀνέμων αὔρας·
ἀεὶ δ' ἐπιβαλλομέναν κτέ.

Wenn man αὔρας ausscheidet, wie dies Kirchhoff nach Hermanns Vorgange thut, so stimmt die Antistrophe hinsichtlich des Metrum mit der von mir verlangten Gestalt der Strophe überein.

μή, πρὸς γονάτων σε πάντως
πάντες ἱκετεύομεν,
853 τέκνα μὴ φονεύσῃς.

Im mittleren Verse fordert das Metrum statt πάντες einen Spondeus. Wahrscheinlicher als die in geringeren Handschriften vorgenommene Umstellung (πάντες πάντως statt πάντως πάντες) ist meine Verbesserung πάντως πάντη σ' ἱκετεύομεν. Ueber πάντως πάντη und ähnliche Verbindungen handelt ausführlich Lobeck Paral. p. 56 f. 540, zu dessen Sammlung ich hinzufüge πάντη πάντως Aristot. Eth. Nic. 1, 11 p. 1101 a 19. Epictet fr. 96. Clem. Alex. Strom. VII p. 835. Hesych. vol. 2 p. 885. πάντῃ καὶ πάντως Iulian Orat. V p. 179 C. Porph. Epist. ad Marc. c. 11. πάντῃ τε καὶ πάντως Cyrillus c. Iulian. p. 247 D. 250 E. 264 B. 274 B. 281 C. 286 A. 329 A. 339 B. πάντῃ πάντοθεν Clem. Alex. Strom. VII p. 851. ἐν πᾶσι πάντως Clem. Alex. Strom. VII p. 864. πάντως πάντα Christ. pat. 985. Ueber die Wiederholung des Pronomen σε vgl. oben S. 98.

856 πόθεν θράσος ἢ φρενὸς ἦ
χειρὶ τέκνων σέθεν
καρδίᾳ τε λήψει,
δεινὰν προσάγουσα τόλμαν;

Der Chor redet in diesen und den sich anschliessenden Worten von dem Kindermorde, mit dem Medea nach V. 791 ff. umgeht; er meint die Hand der Medea müsse vor einer so gräuelvollen That zurückbeben. So leicht dieser Sinn errathen wird, so schwierig ist es mit den Worten selbst fertig zu werden. Unter den ebenso unglücklichen als zahlreichen Versuchen die Stelle zu emendiren, verdienen nur wenige eine Erwähnung. Elmsley wollte schreiben: πόθεν θράσος ἢ φρενὸς ἦ χειρί, τέκνοις σέθεν, καρδίαν τε λήψει, δεινὰν προσάγουσα τόλμαν; Hier soll τέκνοις σέθεν mit δεινὰν προσάγουσα τόλμαν verbunden werden; das Hyperbaton würde weniger hart sein, wenn nicht die Dative χειρί und τέκνοις neben einander ständen, wenn es also etwa hiesse: πόθεν θράσος ἢ χεῖρα, τέκνοις σέθεν, καρδίαν τε λήψει, δεινὰν κτέ. Einfacher und angemessener ist mein Vorschlag, statt τέκνων den Vocativ τέκνον zu setzen. Ebenso wird τέκνον in schmeichelnder Anrede gebraucht bei Eur. Suppl. 282. Hipp. 615, wie ὦ παῖ Heracl. 381, vgl. Aristoph. Byz. p. 152. 157. Ueber die Verbindung der verschiedenen Casus φρενός und χειρὶ καρδίᾳ τε genügt es auf Lobeck zu Soph. Ai. p. 332 zu verweisen. Anders behandelt die angeführten Verse C. Badham Philol. X p. 338; er verlangt

πόθεν θράσος ἢ φρένας ἢ χέρα νῷ σέθεν
καρδίᾳ τε λήψει δεινὰν προσάγουσα τόλμαν;

und in der Strophe V. 846 ff.:

πῶς οὖν ἱερῶν ποταμῶν πόλις ἢ φίλων
πέμπτιμός σε χώρα τὰν παιδολέτειραν ἕξει;

Allerdings ist diese Aenderung der Strophe (πόλις statt ἢ πόλις) leicht und ansprechend; aber ich zweifle ob damit alle Schwierigkeiten gelöst sind.

Erfreut über die scheinbare Sinnesänderung sagt Iason zur Medea:

912 ἔγνως δὲ τὴν νικῶσαν ἀλλὰ τῷ χρόνῳ
βουλήν· γυναικὸς ἔργα ταῦτα σώφρονος.

Der Sinn des ersten Verses kann nur sein: "du erkanntest zwar spät aber endlich doch meine Uebermacht". Soll eine derartige Erkenntniss als Merkmal der σώφρων γυνή bezeichnet werden können? und gesetzt dass dies möglich wäre, kann diese Erkenntniss ein ἔργον genannt werden? Es liegt auf der Hand dass der zweite Vers völlig unpassend ist; er verdankt ohne Zweifel seine Existenz lediglich der Unkenntniss des elliptischen ἡ νικῶσα (sc. γνώμη), worüber zu vgl. Xenoph. Anab. VI, 1, 18: τὸν δ' ἔμπροσθεν χρόνον ἐκ τῆς νικώσης ἔπραττον πάντα οἱ στρατηγοί. VI, 2, 12: τούτους δὲ ἐψηφίσαντο ἐκ τῆς νικώσης ὅ τι δοκοίη τοῦτο ποιεῖν. Eumathius 1, 4 p. 524, 10 ed. Didot.: οὐκ οἶδ' ᾧ τὴν νικῶσαν ἀποχαρίσῃ. Anon. bei Walz Rhet. vol. 1 p. 602, 15: ὅσον κἀκεῖνα — τὴν νικῶσαν φέρει καὶ πάσαις ψήφοις κρατεῖ. Vollständig Herodot 7, 175: ἡ νικῶσα δὲ γνώμη ἐγένετο τὴν ἐν Θερμοπύλῃσι ἐσβολὴν φυλάξαι.

Medea beharrt trotz der Einrede des Iason auf dem Entschlusse ihrer Nebenbuhlerin Geschenke überbringen zu lassen; durch Geschenke gewinnt man, meint sie, selbst die Götter

965 χρυσὸς δὲ κρείσσων μυρίων λόγων βροτοῖς.
κείνης ὁ δαίμων, κεῖνα νῦν αὔξει θεός·
νέα τυραννεῖ· τῶν δ' ἐμῶν παίδων φυγάς
ψυχῆς ἂν ἀλλαξαίμεθ', οὐ χρυσοῦ μόνον.

Wenn Medea sagt κείνης ὁ δαίμων "jene (Glauca) ist vom Schicksal begünstigt," so kann sie darauf nicht folgen lassen κεῖνα νῦν αὔξει θεός. Statt κεῖνα müsste es nothwendig τὰ ἐκείνης heissen; statt νῦν αὔξει würde passender ein Perfectum stehen; überhaupt aber würden die Worte κεῖνα νῦν αὔξει θεός besser fehlen, da sie lediglich den Inhalt des bündigen Ausdrucks κείνης ὁ δαίμων in einer plumpen und ungeschickten Weise wiederholen. Ganz ungehörig für den Zusammenhang sind die folgenden Worte νέα τυραννεῖ. Weder liegt in dem jüngst übernommenen Regiment eine besondere Gunst der Götter, noch verlangen die neuen Herrscher mehr Geschenke als die alten. Sicherlich sind die Worte κεῖνα — τυραννεῖ interpolirt. Statt des etwas ungewöhnlichen κείνης ὁ δαίμων machte sich ein Leser (vielleicht auch ein Schauspieler) die Variante νέα τυραννεῖ, und später wurde diese Variante für den Text benutzt, indem ein Corrector die Hephthemimeris κεῖνα νῦν αὔξει θεός zur Ausfüllung der vermeintlichen Lücke hinzufügte. Vgl. oben S. 45 f.

Zu V. 976: νῦν ἐλπίδες οὐκέτι μοι παίδων ζωᾶς, erwähnt Kirchhoff dass Porson ζέας vermuthet habe. Warum ging er also, um nur eine Stelle anzuführen, Hec. 1108 an dem überlieferten ταλαίνης ἐξαπαλλάξαι ζωῆς mit Stillschweigen vorüber, obgleich hier eben derselbe Gelehrte aus ganz demselben Grunde das ganz entsprechende ζόης vermuthet hatte? Vielleicht hält Kirchhoff die Verkürzung der ersten Silbe von ζωή nur im Trimeter, nicht aber in den Chorpartieen für zulässig.

Den Schluss der ersten Strophe hat Kirchhoff in folgender Weise abgetheilt:

980 ξανθᾷ δ' ἀμφὶ κόμᾳ θήσει τὸν Ἅιδα κόσμον αὐτὰ χερσῖν λαβοῦσα.

Entsprechend in der Antistrophe:

987 καὶ μοῖραν θανάτου δύστανος· ἄταν δ' οὐχ ὑπερφεύξεται . . . . . .

Diese Versabtheilung, die dem Charakter des Metrum in der auffallendsten Weise widerstrebt, ist ebenso verfehlt als das Ansetzen einer Lücke am Schlusse der Antistrophe. Es war vielmehr zu schreiben:

ξανθᾷ δ' ἀμφὶ κόμᾳ θήσει τὸν Ἅιδα
κόσμον αὐτὰ χερσῖν.
Antistr. καὶ μοῖραν θανάτου δύστανος· ἄταν δ'
οὐχ ὑπερφεύξεται.

Das Wort λαβοῦσα ist vollkommen entbehrlich; der Satz ἄταν δ' οὐχ ὑπερφεύξεται lässt nicht das mindeste vermissen; jedes hinzutretende Wort würde ein reiner Pleonasmus sein. Wie dürfen wir also dem Euripides zutrauen, dass er am Schluss der Strophe wie der Antistrophe ein dreisilbiges Wort ungehöriger Weise, entweder um sich selbst zu verspotten oder aus Gedankenlosigkeit, angehängt habe? Uebrigens dürfte zu schreiben sein Ἄιδαν δ' οὐχ ὑπερφεύξεται. Es soll nämlich ausgedrückt werden, Glauca werde dem Tode nicht entrinnen. Mit ἄτη verbinden die Griechen immer oder doch fast immer einen Begriff, der für unsere Stelle nicht passt: vgl. Lehrs Popul. Aufs. p. 223 ff. Für die vorgeschlagene Aenderung spricht auch das in der Strophe correspondirende Ἅιδα.

1012 τί δὴ κατηφεῖς ὄμμα καὶ δακρυρροεῖς;

Die Handschriften bieten fast ohne Ausnahme τί δὲ κατηφεῖς. Wenn Kirchhoff τί δαὶ κατηφεῖς drucken lässt, so hat dies weder hier eine ausreichende diplomatische Autorität, noch scheint es sich überhaupt mit dem tragischen Sprachgebrauche zu vertragen. Letzteres mag Kirchhoff selbst gewusst haben, als er Iphig. Aul. 1444 vorschlug: τί δ'; οὖ (statt τί δὲ) τὸ θνήσκειν οὐ τάφος νομίζεται;

1056 μὴ δῆτα, θυμέ, μή ποτ' ἐργάσῃ τάδε.

Medea schaudert zurück vor der Mordthat, die sie zu vollziehen im Begriff steht. Dass in dieser Situation ποτέ höchst unpassend sei, muss jeder fühlen. Es kommt dazu dass die zweite Classe der Handschriften μὴ σύγ' ἐργάσῃ τάδε bietet. Hiernach ist es unzweifelhaft dass in der ursprünglichen Handschrift ein unvollständiger Trimeter überliefert war, μὴ δῆτα, θυμέ,μὴ ἐργάσῃ τάδε, den die Verbesserer auf doppelte Weise ergänzten, ohne natürlich bei ihren Ergänzungen nach palaeographischer Wahrscheinlichkeit zu fragen. Vermuthlich ist zu lesen:

μὴ δῆτα, θυμὲ θυμέ, μὴ ἐργάσῃ τάδε.

Vgl. Archil. fr. 68 p. 550: θυμὲ θύμ', ἀμηχάνοισι κήδεσιν κυκώμενε.

1067 ἀλλ' εἶμι γὰρ δὴ τλημονεστάτην ὁδόν,
καὶ τοὐσδε πέμψω τλημονεστέραν ἔτι,
παῖδας προσειπεῖν βούλομαι.

Ueber V. 1068 sagt Pierson Verisim. p. 59 f.: *unde versiculus pedem intulerit, dici non potest; verum delendum esse, mihi nullum est dubium.* Nachdem Elmsley erklärt hatte er finde keinen Grund zur Verdächtigung des Verses, haben die nachfolgenden Herausgeber des Euripides es für das bequemste gehalten Piersons Urtheil auf sich beruhen zu lassen. Und doch urtheilte Pierson ganz richtig. Zunächst ist es abgeschmackt, die Kinder zuerst 1068 mit τοὐσδε und im folgenden Verse mit παῖδας zu bezeichnen. Sodann stört der Vers den Zusammenhang: die τλημονεστάτη ὁδός von 1067 wird mit den Worten παῖδας προσειπεῖν βούλομαι 1069 näher angegeben; die Einschaltung von 1068 giebt einen fremdartigen Gedanken und zerreisst das Zusammengehörige. Endlich passt der Inhalt von V. 1068 durchaus nicht zur vorliegenden Situation: es wäre ein alberner Egoismus, wenn Medea das Loos ihrer Kinder, die sie morden will, für beklagenswerther hielt als ihr eigenes. Der Ursprung des abgeschmackten Verses lässt sich leicht errathen: die Lesart schwankte in V. 1067 zwischen τλημονεστάτην und τλημονεστέραν, wie Comparativ und Superlativ unendlich oft mit einander verwechselt werden; statt die unrichtige Lesart τλημονεστέραν einfach zu verwerfen, benutzte man sie als Material zu einem neuen Trimeter.

1076 χωρεῖτε χωρεῖτ' · οὐκέτ' εἰμὶ προσβλέπειν
οἷα τε πρὸς ὑμᾶς, ἀλλὰ νικῶμαι κακοῖς.

So die besseren Handschriften. Den metrischen Fehler des zweiten Verses würde man in der einfachsten Weise beseitigen können, wenn sich nachweisen liesse dass Euripides von οἷος das Femininum οἷα mit kurzer Endsilbe gebraucht hätte. Aus späteren Dichtern ist diese Verkürzung nachweisbar: vgl. οἷα δίκη Anth. Pal. 8, 89. ποῖα δίκη Anth. Pal. 8, 85. 221. Aus der älteren Zeit gehört vielleicht hierher ein Epigramm des Plato Anth. Plan. 160:

Πραξιτέλης οὐκ εἶδεν ἃ μὴ Ξέμις · ἀλλ' ὁ σίδηρος
ἔξεσεν οἷαν Ἄρης ἤθελε τὴν Παφίην.

Allerdings hat man diese Stelle angefochten und entweder ἔξεσεν οἳ' ἂν Ἄρης oder ἔξεσ'

*

Ἄρης οἷαν geschrieben; indess ist keine dieser Conjecturen überzeugend. Man könnte für die Femininalform οἵα sich auf ähnliche Verkürzungen berufen, die bei Dichtern vereinzelt vorkommen[1]). Zunächst jedoch kommt in Betracht dass die zweite Classe der Handschriften οἵα τ' ἐς ὑμᾶς bietet. Möglich dass diese Lesart, wie Kirchhoff voraussetzt, nichts ist als eine Correctur; dann werden wir aber einräumen müssen dass diese Correctur palaeographische Wahrscheinlichkeit hat, da εἰς und πρός unendlich oft von den Abschreibern verwechselt werden, vgl. Cobet V. L. p. 272 f. N. L. p. 347 f. Sodann aber ist die Verbindung προσβλέπειν πρός τινα wohl noch seltener als das Lateinische *adspicere ad aliquem*. Hiernach wird weder οἵά τε πρὸς ὑμᾶς geschrieben werden dürfen, noch mit Kirchhoff οἷα πρὸς ὑμᾶς. Letztere Aenderung wird auch durch den Sinn widerlegt; denn οὐχ οἷα εἰμὶ προσβλέπειν würde bedeuten "es ist nicht meine Art, ich neige nicht dazu euch anzublicken". Vgl. Harpocr. p. 136, 1: οἷος εἶ καὶ οἷός τε εἶ. τὸ μὲν χωρὶς τοῦ τέ σημαίνει τὸ βούλει καὶ προήρησαι, τὸ δὲ σὺν τῷ τέ τὸ δύνασαι. Wenn also im Christ. pat. 875 und 1611 οἷα πρὸς sich findet, so beruht dies auf der Verkehrtheit des Autors, der sich zwölfsilbige Verse zu schaffen suchte, ohne nach dem Sinne zu fragen. Auch προσβλέπειν εἴς τινα ist mir nicht bekannt, und somit weiss ich keinen anderen Rath als zu schreiben: οὐ γάρ εἰμι προσβλέπειν οἷα τ' ἔσ' ὑμᾶς. Die jetzige Lesart lässt sich hieraus ungezwungen erklären, wenn man den Schreibfehler voraussetzt, οὐκέτι γάρ εἰμι προσβλέπειν οἷα τε ὑμᾶς, der dann zur Folge hatte dass man γάρ tilgte und nach οἷα τε eine Praeposition (πρὸς oder ἐς) einschob.

οἷσι δὲ τέκνων ἔστιν ἐν οἴκοις
γλυκερὸν βλάστημ', ὁρῶ μελέτῃ
κατατρυχομένους τὸν ἅπαντα χρόνον.

Das unmetrische ὁρῶ des zweiten Verses corrigiren die geringeren Handschriften in ἐσορῶ, und Kirchhoff ist nicht abgeneigt dies zu billigen, fügt jedoch hinzu "*vide an fuerit* γλυκερῶν βλαστήμαΣ' ὁρῶ". So kann Euripides nicht geschrieben haben, weil er in strengen Anapaesten eine Caesur nach der Thesis des dritten Fusses sich niemals gestattet[2]). Auch

1) Vgl. Κύνεια μάχα Pind. Ol. 11, 15. θείλαια Anth. Pal. 9, 32 nebst der Bemerkung von Dindorf zu Eur. Rhes. 762, der sich für Ἑκτόρεια χείρ auf Πελυδεύκεια χείρ Etym. M. p. 461, 45 und Διομήδεια Aristoph. Eccles. 1029 beruft. Mehreres hierüber bei Buttmann Griech. Sprachl. I p. 239. Nicht gehören hierher die Femininalformen δάπτρια und εὐρυόδεια: denn δάπτριος und εὐρυόδειος sind nichts als Erfindungen moderner Lexikographen, während δάπτρια von δάπτης, εὐρυόδεια von εὐρύοδος abzuleiten ist. Selbst στεῖρα und πέπειρα dürfen streng genommen nicht angeführt werden. Das Masculinum πέπειρος ist eine spätere Bildung aus der Zeit des beginnenden Verfalles der Graecität, während ursprünglich πέπων und πέπειρα sich entsprach wie πίων und πίειρα, Νέων und Νέαιρα. Noch schlechter verbürgt ist die Form στεῖρος: denn bei Euripides Andr. 711 ist zu lesen ἢ στερρὸς οὖσα μόσχος οὐκ ἀνέξεται τίκτοντας ἄλλους, nach den Handschriften Aab.

2) Die einzige Ausnahme von diesem Gesetze, Iphig. Aul. 395:

τὴν Τυνδαρέου τε Κλυταιμνήστραν,

ist durch den Eigennamen entschuldigt. Die Verse Bacch. 1373:

καὶ σὰς ἐδάκρυσα κασιγνήτας,

und 1381: ἄγετ' ὦ πομποί με, κασιγνήτας

haben mit Euripides überhaupt nichts gemein; der Schluss der Bacchen (1372—1392) ist ein so elendes, albernes Machwerk, dass man sich wundern muss, wie er so lange geduldet und sogar nachdem ich ihn verworfen, von Kirchhoff stillschweigend in Schutz genom-

ἐσορῶ halte ich für unwahrscheinlich, da sich eine viel einfachere Emendation darbietet, die durch Hinzufügung eines einzigen Punktes gewonnen wird: statt ΒΛΑΣΤΗΜΑΟΡΩ ist zu lesen ΒΛΑΣΤΗΜΑΘΡΩ, d. h. βλάστημ' ἀθρῶ. Ueber die Verwechslung von ὁρᾶν und ἀθρεῖν vgl. Alc. 1105: πρῶτα δ' εἰ χρεὼν ἄθρει, wo die zweite Classe der Handschriften ὅρα bietet. Ferner Ion 194: ὁρῶ· καὶ πέλας ἄλλος αὐτοῦ. Vergleicht man damit den strophischen Vers (184), οὐκ ἐν ταῖς ζαθέαις Ἀθάναις, so kann es kaum einem Zweifel unterliegen dass ὁρῶ in ἀθρῶ zu ändern ist. Wären unsere Hilfsmittel für die Alcestis dieselben wie für den Ion, so würden wir in der oben angeführten Stelle die Lesart der ältesten Ausgaben, πρῶτα δ' εἰ χρεὼν ὅρα, in allen Texten finden, ohne von dem ἄθρει eine Ahnung zu haben.

1132 ἔχω τι κἀγὼ τοῖς γε σοῖς ἐναντίον
λόγοισιν εἰπεῖν.

Das γε ist hier vollkommen pleonastisch: denn ein Widerspruch muss immer gegen jemand gerichtet sein, und Medea kann nur demjenigen widersprechen der so eben zu ihr gesprochen hat. Es ist τοῖσι σοῖς zu verbessern mit der Handschrift C, die öfters in der Medea allein das richtige bietet, wie V. 246. 588. 1292.

1188 πέπλοι δὲ λεπτοί, σῶν τέκνων δωρήματα,
λεπτὴν ἑδαπτον σάρκα τῆς δυσδαίμονος.

Ob der Fehler dieser Stelle im ersten oder zweiten Verse liegt, möchte sich mit völliger Gewissheit kaum entscheiden lassen. Nur dies scheint mir unzweifelhaft, dass die selbst von Kirchhoff aufgenommene Conjectur des Musurus, λευκὴν ἑδαπτον σάρκα, der Ueberlieferung mit Unrecht vorgezogen wird. Das entzündete und zerrissene Fleisch kann sehr wohl zart, aber nicht füglich weiss genannt werden. Mit λεπτὴν σάρκα vgl. λεπτῷ χρωτί Eur. fr. 898 und λέπτον χρῶν Sappho fr. 2, 9.

1193 πῦρ δ', ἐπεὶ κόμην
ἔσεισε, μᾶλλον δὶς τόσως τ' ἐλάμπετο.

Epische Dichter gebrauchen nicht selten das Medium λάμπεσθαι: in der Tragoedie ist dies Medium, mit Ausnahme der vorliegenden Stelle, nirgends zu finden. Hier würde offenbar ein Begriff angemessener sein, der das Aufflammen des Feuers bezeichnet; vielleicht ἐθάλπετο.

πατὴρ δ' ὁ τλήμων συμφορᾶς ἀγνωσίᾳ
1205 ἄφνω προσελθὼν δῶμα προσπίτνει νεκρῷ.

men werden konnte. Einsichtiger urtheilten Rossbach und Westphal Metrik III p. 97. Fehlerhaft überliefert ist Eur. fr. 889 bei Ath. XIII p. 561 A:

καὶ προσομιλεῖν οὗτος ὁ δαίμων
πάντων ἥδιστος ἔφυ θνητοῖς.

Vermuthlich sind hier die Worte πάντων und θνητοῖς als interpolirt auszuscheiden, obgleich man auch durch eine Umstellung, πάντων θνητοῖς ἥδιστος ἔφυ, den metrischen Fehler heben könnte.

Statt προσελθὼν δῶμα habe ich παρελθὼν δῶμα vorgeschlagen; besser wäre es gewesen, diese unzweifelhaft richtige, von Kirchhoff ignorirte Emendation in den Text zu setzen. Der Unterschied ist einfach: προσελθεῖν δῶμα heisst "zum Hause hinzutreten", wogegen "eintreten in das Haus" durch παρελθεῖν δῶμα ausgedrückt wird. Ueber προσελθεῖν vgl. Aesch. Eum. 242: χέρσον καὶ θάλασσαν ἐκπερῶν — πρόσειμι δῶμα καὶ βρέτας τὸ σόν, θεά. Eur. Med. 68: πεσσοὺς προσελθών. Alc. 171: πάντας δὲ βωμοὺς — προσῆλθε. Cycl. 40: Ἀλθαίας δόμους προσῆτ' ἀοιδαῖς βαρβίτων σαυλούμενοι. fr. 775, 5: πῶς οὖν πρόσειμι δῶμα θερμὸν Ἡλίου; Dagegen findet sich παρῆλθε νυμφικοὺς δόμους Med. 1138. παρέλθω δόμους Med. 1275. παρελθόντες δόμους σίτων μέλεσθε Hipp. 108; und wer noch zweifeln sollte was diese Ausdrücke bedeuten, vergleiche damit ἔσω παρελθὼν Aesch. Cho. 849. εἶσω παρέλθετε Soph. El. 1337. παρῆλθ' ἔσω θυρῶνος Oed. R. 1241. παρῆλθε δωμάτων εἴσω Trach. 900. ἔσω πάρειμι Eur. Hel. 451. δόμων μὴ πάρῃ εἰς μυχόν Ion 229 u. ähnliches. Ueberhaupt werden πρός, παρά, πρό und περί von den Abschreibern sehr häufig mit einander vertauscht; hier lag ein Irrthum um so näher, da προσπίτνει in demselben Verse und προσαυδῶν V. 1207 nachfolgt.

Medea sieht sich gezwungen aus dem Lande zu fliehen; ihre Kinder hält sie für unrettbar verloren, und um zu verhüten dass sie den Händen ihrer Feinde erliegen, eilt sie selbst ihnen den Tod zu geben:

1242 ἀλλ' εἶ' ὁπλίζου, καρδία. τί μέλλομεν
τὰ δεινὰ κἀναγκαῖα μὴ πράσσειν κακά;
ἄγ' ὦ τάλαινα χεὶρ ἐμή, λαβὲ ξίφος κτέ.

Um den mittleren Vers mit den Gesetzen der Grammatik in Einklang zu bringen, hat Elmsley μὴ οὐ πράσσειν vorgeschlagen. So leicht auch diese Aenderung ist, so halte ich doch das Heilmittel für verschwendet bei einem Verse, der um seines Inhaltes willen verworfen werden muss. Die Verbindung τὰ δεινὰ κἀναγκαῖα κακά, das schreckliche und nothwendige Uebel, ist fast unerträglich, und κακά ist schon an sich hier unpassend. Wir werden also zu schreiben haben:

ἀλλ' εἶ' ὁπλίζου, καρδία· τί μέλλομεν;
ἄγ' ὦ τάλαινα χεὶρ ἐμή, λαβὲ ξίφος κτέ.

Hier ist τί μέλλομεν im Sinne von τί μέλλεις zu nehmen, wie bei Soph. Oed. C. 1627: ὦ οὗτος οὗτος, Οἰδίπους, τί μέλλομεν; χώρει, πάλαι δὴ τἀπὸ σοῦ βραδύνεται. Eur. El. 757: σφαγὴν αὐτεῖς τήνδε μοι· τί μέλλομεν; Entsprechend wird τί πράττομεν (statt τί πράττεις) gebraucht bei Hermippus Com. 2 p. 402, πῶς ἔχομεν (statt πῶς ἔχεις) bei Lysippus Com. 2 p. 744 und ἴδμεν (statt ἆρ' οἶσθα) bei Hom. Od. Δ, 138. 632.

Der Chor ruft den Helios an, die Kinder gegen die Gewaltthat der unnatürlichen Mutter zu schützen:

1255 σᾶς γὰρ ἀπὸ χρυσέας γενᾶς
ἔβλαστεν· θεοῦ δ' αἵματι πίτνειν
φόβος ὑπ' ἀνέρων.

Wenn Medea sich an ihren eigenen Kindern vergreift, so kann der Chor nicht sagen dass die Menschen (ἀνέρες) sich an dem Blut eines Gottes (θεοῦ αἵματι) vergreifen: Medea vergreift sich vielmehr an ihrem eigenen Fleisch und Blut. Ausserdem ist der Dativ αἵματι unpassend, der bezeichnen würde dass dem Götterblute die Furcht inwohne durch Menschen zu fallen. Endlich stimmt das antistrophische Metrum nicht vollständig mit den ausgehobenen Worten zusammen. Medea wird angeredet:

1263 δειλαία, τί σοι φρενῶν βαρὺς
χόλος προσπίτνει καὶ δυσμενὴς
φόνος ἀμείβεται;

Hier ist δυσμενὴς ein nichtssagendes Epitheton; es versteht sich von selbst dass der Mord keine Bezeugung der Freundschaft oder Liebe ist; was der Dichter schrieb, liess sich aus V. 1383 entnehmen, γῇ δὲ τῇδε Σισύφου σεμνὴν ἑορτὴν καὶ τέλη προσάψομεν τὸ λοιπὸν ἀντὶ τοῦδε δυσσεβοῦς φόνου[1]). Und was soll φόνος ἀμείβεται bedeuten? Matthiae erklärt *caedes caede permutatur*, wovon nichts im Texte steht, Klotz nach dem Vorgange eines alten Scholiasten, φόνος διαδέχεται τὸν χόλον, womit der unpassende Sinn gegeben wäre dass der φόνος dann einträte wenn der χόλος sich gelegt hätte. Kirchhoff begnügt sich V. 1255 σᾶς γὰρ κἀπὸ zu vermuthen und 1257 als *vix sanus* zu bezeichnen. Was den zweiten Punct betrifft, so hätte ich eine Motivirung des Verdachtes gewünscht: der Vorschlag κἀπὸ scheint mir unter allen Umständen unstatthaft; sollte vielleicht σᾶς γὰρ κἀπὸ χρυσέας γονᾶς so viel sein als καὶ γὰρ σᾶς ἀπὸ χρυσέας γονᾶς? Um das Metrum von 1255 und 1265 auszugleichen, werden wir ἀπὸ und φρενῶν tilgen müssen: ersteres ist eine Erklärung, letzteres ein durch ἀπὸ bedingter, zu Gunsten des Metrum gemachter Zusatz; hätte Euripides φρένες gebrauchen wollen, so würde er statt σοὶ φρενῶν doch ohne Zweifel σοῦ φρεσὶν geschrieben haben. Statt θεοῦ δ' αἵματι (wofür geringere Handschriften αἷμα bieten) vermuthe ich θεῶν δ' αἰδῶ, wo θεῶν bereits Musurus hergestellt hat. Der Chor fürchtet hiernach, die Unthat der Medea werde die Scheu vor den göttlichen Gesetzen untergraben. Endlich ist 1267 wahrscheinlich zu lesen φόνος ἀμέργεται, zu ver-

1) Ueber die Verwechselung von δυσμενής und δυσσεβής vgl. Soph. fr. 877:

ὀρθῶς δ' Ὀδυσσεύς εἰμ' ἐπώνυμος κακοῖς·
πολλοὶ γὰρ ὠδύσαντο δυσμενεῖς ἐμοί.

So habe ich statt δυσσεβεῖς verbessert, und M. Schmidt, K. Keil, Th. Bergk tragen kein Bedenken diese Emendation zu billigen. Kayser macht dagegen geltend: "ein δυσμενής ist noch kein κακός, mit welchem Praedicat die Feinde des Odysseus hier versehen werden" (N. Jahrb. f. Philol. u. Paed. LXXIII, 4 p. 232). Wer so wenig Sprachkenntniss und so wenig Urtheil besitzt dass er das Neutrum κακοῖς für ein Masculinum ansieht, sollte in eigenem Interesse mit seiner Weisheit — d. h. mit seiner Tinte — etwas zurückhaltender sein. Ueber Eur. fr. 589 lässt sich Kayser (p. 233 d. angef. St.) also vernehmen: "für die Conjectur Θύσαν Διονύσου κόραν (statt οὐ σὰν Διονύσου κομᾶν Strabo X 470) wird sich N. schwerlich vieler Zustimmung zu erfreuen haben". An der Zustimmung vieler kann mir offenbar nur wenig liegen, und gar nichts liegt mir an Kaysers Zustimmung; ein anderer Recensent aber bezeichnete gerade dies Θύσαν Διονύσου κόραν als eine "ganz vortreffliche Emendation" (Zeitschr. f. d. Gymnasialw. IX p. 933), und ebenso weiss ich dass ich der Zustimmung eines Meineke "mich zu erfreuen habe". Sehr überflüssig ist nach Kayser (p. 231) bei Eur. fr. 112 (Stob. Flor. 74, 17) meine Aenderung φρενοῦντας statt φρουροῦντας: "φρενοῦντας wäre als *ineptum*, wenn es auch die Handschriften darböten, zu verwerfen". Auch dieser Aeusserung gegenüber glaube ich mich damit trösten zu können dass Meineke das als *ineptum* bezeichnete φρενοῦντας in den Text des Stobaeus aufgenommen hat.

gleichen mit φόνος χραίνεται, φόνος κείρεται und ähnlichen praegnanten Ausdrücken: die Metapher ist entlehnt von den Blumen, die man knickt, wie in ähnlicher Weise Aeschylus Sept. 718 sagt αὐτάδελφον αἷμα δρέψασθαι. Die ganze Stelle wird nach den bisherigen Erörterungen so zu schreiben sein:

σᾶς γὰρ χρυσέας γονᾶς — δειλαία, τί σοι βαρὺς
ἔβλαστεν· θεῶν δ' αἰδῶ πίτνειν — χόλος προσπίτνει καὶ δυσσεβὴς
φόβος ὑπ' ἀνέρων. — φόνος ἀμέργεται;

Nachdem der Chor auf das grauenvolle Beginnen der Medea hingewiesen hat, vernimmt man von drinnen den Wehruf der Kinder, die nach der gewöhnlichen Annahme hinter der Bühne ein Zwiegespräch führen:

1271 ΠΑΙΣ Α. οἴμοι, τί δράσω; ποῖ φύγω μητρὸς χέρας;
ΠΑΙΣ Β. οὐκ οἶδ', ἀδελφὲ φίλτατ'· ὀλλύμεσθα γάρ.

Den zweiten dieser Verse glaube ich mit vollstem Rechte getilgt zu haben. Diejenigen welche das Ausscheiden von Versen für ein Piaculum und jeden verworfenen Vers für einen schweren Verlust halten, werden, wenn sie einfach ihrem Gefühle folgen, wenigstens einräumen dass die Worte οὐκ οἶδ', ἀδελφὲ φίλτατε recht nüchtern klingen und dass das γάρ so unpassend ist wie nur möglich. Auch werden sie nicht in Abrede stellen dass die Frage in V. 1271 keineswegs eine Antwort fordere. Der für die Unechtheit des zweiten Verses entscheidende Grund aber liegt darin dass das Zwiegespräch der Knaben eine Individualisirung voraussetzt, wie sie nach dem constanten Gebrauche der Griechischen Tragoedie im vorliegenden Falle undenkbar ist. Die beiden Knaben haben nur eine Rolle im Drama, und darum ist ein Zwiegespräch zwischen ihnen eine vollständige Unmöglichkeit. Ganz denselben Fall haben wir bei den Dioscuren, die am Schlusse der Helena und in der unechten Partie der Electra aus einem Munde reden; und nicht anders ist es beim Auftreten der Kinder in den Supplices 1123 ff. Hieraus geht zugleich hervor dass es ein ungesunder Einfall war die folgende Rede der Knaben, Med. 1277 u. 78:

ναί, πρὸς θεῶν, ἀρήξατ'· ἐν δέοντι γάρ·
ὡς ἐγγὺς ἤδη γ' ἐσμὲν ἀρκύων ξίφους,

in die Form der Stichomythie bringen zu wollen (s. Klotz p. XV).

Ueber V. 1273—92 bemerkt Kirchhoff: "v. 1262 *sqq. strophicos esse mihi non persuasi.*" Darauf lässt sich nur entgegnen dass niemand gezwungen werden kann zu sehen was er nicht sehen will. Der Thatbestand ist folgender. Wenn man V. 1280 ὦν in ὃν ändert, V. 1290 δῆτ' statt δήποτ' schreibt und V. 1292 δὴ mit Codex C auslässt, so stimmen V. 1273—81 und 1282—92 vollständig mit einander überein; nur für zwei iambische Trimeter der Antistrophe (1284 f.) findet sich in der Strophe nichts entsprechendes. Die angeführten Aenderungen sind von der Art, dass sie nicht im mindesten als gewaltsam erscheinen können: auch wer von der strophischen Responsion sich nicht zu überzeugen vermag, wird 1290 zu Gunsten der Dochmien δῆτ' schreiben müssen, und nicht minder wird er 1292 δὴ tilgen müssen, theils weil die zwölf Silben, ὅσα δὴ βροτοῖς ἔρεξας ἤδη κακά,

völlig unrhythmisch sind, theils weil δὴ ἤδη eine unmögliche Verbindung zu sein scheint; somit bleibt nur das dritte übrig, wo τέκνων ὦν in τέκνων ὀν verwandelt wird; es ist klar dass die Abschreiber gerade durch das voraufgehende τέκνων bestimmt wurden den Pluralis des Relativpronomen zu setzen. Was endlich V. 1284 f. betrifft,

Ἰνὼ μανεῖσαν ἐκ θεῶν, ὅτ' ἡ Διὸς
δάμαρ νιν ἐξέπεμψε δωμάτων ἄλῃ,

so sind diese vermuthlich ein späteres Einschiebsel; wenigstens können sie unbeschadet des Sinnes fehlen. Tilgt man sie, so bekommt man folgendes Strophenpaar:

ἀκούεις βοὰν ἀκούεις τέκνων; | μίαν δὴ κλύω μίαν τῶν πάρος
ἰὼ τλᾶμον, ὦ κακοτυχὲς γύναι. | γυναῖκ' ἐν φίλοις χέρα βαλεῖν τέκνοις.
παρέλθω δόμους; ἀρῆξαι φόνον | πίτνει δ' ἁ τάλαιν' ἐς ἅλμαν φόνῳ
δόκει μοι τέκνοις. | τέκνων δυσσεβεῖ,
ναί, πρὸς θεῶν, ἀρήξατ'· ἐν δέοντι γάρ· | ἀκτῆς ὑπερτείνασα ποντίας πόδα,
ὡς ἐγγὺς ἤδη γ' ἐσμὲν ἀρκύων ξίφους. | δυοῖν τε παίδοιν συνθανοῦσ' ἀπόλλυται.
τάλαιν', ὡς ἄρ' ἦσθα πέτρος ἢ σίδα- | τί δῆτ' οὖν γένοιτ' ἂν ἔτι δεινόν; ὦ
ρος, ἅτις τέκνων ὃν ἔτεκες | γυναικῶν λέχος πολύπονον,
ἄροτον αὐτόχειρι μοίρᾳ κτενεῖς. | ὅσα βροτοῖς ἐρεξας ἤδη κακά.

Dies Strophenpaar rechtfertigt, denke ich, seine Existenz durch sich selbst; Kirchhoffs Zweifel ist um so auffallender, da nur wenige Chorgesänge bei Euripides in so reiner und ungetrübter Gestalt auf uns gekommen sind.

1333 τὸν σὸν ἀλάστορ' εἰς ἔμ' ἔσκηψαν θεοί.

Dem Metrum würde τὸν σὸν μιάστορ' genügen, eine Aenderung die nicht so gewaltsam ist als sie aussieht: ΜΙΑΣΤΟΡΑ konnte sehr leicht ΑΛΙΑΣΤΟΡΑ gelesen und dies in ΑΛΑΣΤΟΡΑ verwandelt werden. Doch das Pronomen σὸν streitet gegen den Zusammenhang; Iason konnte nur sagen, nicht deinen Rachedaemon, sondern dich als einen Rachedaemon haben die Götter mir gesendet. Darum habe ich früher τὸν ἐὸν ἀλάστορ' geschrieben, d. h. τὸν ἑαυτῶν ἀλάστορα. Indess lässt sich die Form ἐός, abgesehen von der zweifelhaften Stelle in Eur. El. 1206, aus Euripides nicht nachweisen, und selbst bei Aesch. fr. 340, 1 scheint sie bedenklich zu sein. Lieber also möchte ich Kirchhoffs Vermuthung τεῖόν σ' ἀλάστορ' beitreten; jedoch fragt sich ob nicht τοιόνδ' ἀλάστορ' vorzuziehen ist, vgl. τοιάδ' οἶδα φάρμακα Med. 718, τοιόνδ' ἐμπέφυκέ σοι θράσος 1345 u. ä.

Medea wird, wie sie sagt, nach Athen gehen und bei Aegeus wohnen; zum Iason gewendet fährt sie darauf fort:

1386 σὺ δ', ὥσπερ εἰκός, κατθανεῖ κακὸς κακῶς,
Ἀργοῦς κάρα σὸν λειψάνῳ πεπληγμένος,
πικρὰς τελευτὰς τῶν ἐμῶν γάμων ἰδών.

Die Weissagung über den Tod des Iason ist an dieser Stelle höchst befremdlich, da Medea weiter unten V. 1396 ihm das Elend eines kinderlosen Alters in Aussicht stellt, indem

sie sagt: οὔπω θρηνεῖς· μένε καὶ γῆρας. Auch sieht man nicht, inwiefern die hier bezeichnete Todesart als eine schmachvolle (κατθανεῖ κακῶς) gelten kann; ebenso wenig, wie sie ein Resultat der Vermählung mit der Medea ist, da ein Unglück wie das hier erwähnte doch lediglich vom Zufall abhängt. Endlich ist es überhaupt ein Räthsel, wie Iason, der die Argonautenfahrt längst hinter sich hat, von einem Ueberbleibsel der Argo getödtet werden kann. Die Scholien bemerken: ἱστορεῖται Ἰάσων τέλει τοιούτῳ χρήσασθαι. κοιμώμενον γὰρ αὐτὸν ὑπὸ τὴν Ἀργὼ κατασαπεῖσαν ὑπὸ πολλοῦ χρόνου, μέρος τι ταύτης ἐκπεσὸν (wohl ἐμπεσὸν) κατὰ τῆς κεφαλῆς ἔκρουσεν. — ἄλλως. οἱ μὲν λέγουσι κατὰ Μηδείας χόλον ἢ κέλευσιν ὑπὸ τῆ πρύμνη τῆς Ἀργοῦς καταδραθέντα τὸν Ἰάσονα τελευτῆσαι ἐμπεσόντος αὐτῷ ξύλου· Νεόφρων δὲ ξενικώτατον· ἀγχόνῃ γὰρ τελευτῆσαι. Damit vergleiche man das Argument zur Medea: Στάφυλος δὲ φησὶ τὸν Ἰάσονα τρόπον τινὰ ὑπὸ τῆς Μηδείας ἀναιρεθῆναι· ἐγκελεύσασθαι γὰρ αὐτὴν ὑπὸ τῇ πρύμνῃ τῆς Ἀργοῦς κατακοιμηθῆναι μελλούσης τῆς νεὼς διαλύεσθαι ὑπὸ τοῦ χρόνου· ἐπιπεσούσης γοῦν τῆς πρύμνης τῷ Ἰάσονι τελευτῆσαι αὐτόν. Diese Erzählung scheint vorauszusetzen dass der Tod des Iason noch vor Vollendung der Seefahrt erfolgte. In jedem Falle kann von jener Aufforderung der Medea, die den Tod des Iason herbeiführte, nach der Situation, wie sie am Schlusse des Euripideischen Drama erscheint, nicht die Rede sein. Ueber das Schicksal der Argo ist aus Euripides nichts zu ersehen; nach Apollodor 1, 9, 7 u. 8 war sie seit mehr als zehn Jahren dem Poseidon geweiht, bevor Iason die Treulosigkeit gegen die Medea übte. Nach den angegebenen Gründen kann ich nicht umhin die obigen Verse für höchst verdächtig zu halten.

An Citaten ist bei Kirchhoff folgendes nachzutragen.

V. 1 Thomas Mag. p. 127, 8. Herod. Epim. p. 270, vgl. Schol. Ar. Ran. 1380.

V. 4 τμηθεῖσα· κοπεῖσα Hesychius vol. 2 p. 1396. Ueber ἐρετμῶσαι χέρας vgl. die von Meineke Philol. XII p. 609 behandelte Glosse des Hesychius.

V. 19 Hesychius bei Schow p. 595: ὅσσαι σύμμ.ι βασιλεύει, wo mit M. Schmidt zu lesen ist: ὃς αἰσυμνᾶ· βασιλεύει.

V. 20 f. Schol. Eur. Med. 97.

V. 46 Gramm. Ambros. bei H. Keil Anal. gramm. p. 5.

V. 48 Cyrillus c. Iulian. VII p. 227 B.

V. 49 Alexis Com. 3 p. 466.

V. 122 f. Eust. Il. p. 55, 29.

V. 189 f. Eust. Il. p. 160, 13.

V. 248 Antipater bei Stobaeus Flor. 67, 25 vol. 3 p. 13, 2 ed. Meinek.

V. 266 f. Eumathius IX p. 583, 20 ed. Didot.

V. 279 Schol. Soph. Ai. 1043 p. 351, 24 ed. Dind.

V. 286 vgl. Greg. Naz. vol. 2 p. 187 A. Nicetas Eugen. 7, 251.

V. 334 Zonaras Annal. 10, 20.

V. 404 Eust. Il. p. 107, 26.

V. 407 vgl. Aristoph. Nub. 662.

V. 411 f. Eumathius III p. 538, 32 ed. Didot.

V. 413 Theodorus Metoch. p. 578. Schol. Lucian. ed. Iacobitz. p. 68. Firmus Epist. 5 in Murator. Anecd. p. 285.

V. 425 Eust. Il. p. 10, 28.

V. 458 vgl. ἀχρήμων· πένης Hesych.

V. 466 f. Herodianus περὶ ἀκυρολ. in Boisson. Anecd. vol. 3 p. 268.

V. 517 vgl. Choricius Gaz. p. 29 ed. Boiss.

V. 578 Etym. Gud. p. 231, 33.

V. 679 Schol. Eur. Hipp. 11.

V. 711 Schol. Hephaest. p. 62.

V. 741 Eust. Il. p. 436, 43.

V. 753 Suidas v. ἄ ἄ.

V. 764 Eust. Il. p. 189 f.

V. 893 Eust. Il. p. 217, 3.

V. 911 Tzetzes Epist. p. 1.

V. 951 Suidas v. πείθω.

V. 1005 vgl. Menandri monost. 280.

V. 1055 Etym. M. p. 675, 17.

V. 1111 Schol. Eur. Med. 379.

V. 1125 Eust. Il. p. 250, 25.

V. 1187 Eust. Il. p. 61, 42.

V. 1189 πεύκινον δάκρυ Hesych. vol. 2 p. 950.

V. 1266 ναὶ πρὸς θεῶν· ναὶ ἐν θεῷ Hesych. 2 p. 651.

V. 1306 Heliod. 1, 8. vgl. Aristoph. Nub. 1397.

V. 1335 vgl. Phrynichus Bekk. p. 21, 22.

Die Verbindung οὐ νῦν πρῶτον ἀλλὰ πολλάκις findet sich in der Medea zweimal, V. 294 und 443 ed. Kirchh., sonst noch Hel. 957. Aus der Medea haben spätere Schriftsteller, wie Heliodor 3, 6 p. 274, 46 ed. Didot. und Phalaris Epist. 142, diese Formel entlehnt. Ganz ähnlich sagt übrigens Soph. Phil. 966: οὐ νῦν πρῶτον ἀλλὰ καὶ πάλαι, und Plat. Criton p. 46 B: ἐγὼ οὐ νῦν πρῶτον ἀλλὰ καὶ ἀεὶ τοιοῦτος. So nämlich, οὐ νῦν πρῶτον, ist bei Plato statt der Vulgate οὐ μόνον νῦν zu lesen nach der Herme des Socrates im Corpus Inscr. 6115 vol. 3 p. 843.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 13.

ÜBER

DEN SEITLICHEN HERMAPHRODITISMUS

EINES

22-JÄHRIGEN MENSCHEN.

VON

Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.**

(Mit 2 Tafeln.)

Der Akademie vorgelegt am 24. Juni 1859.

ST. PETERSBURG, 1859.

Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:

in St. Petersburg	in Riga	in Leipzig
Eggers et Comp.,	Samuel Schmidt,	Leopold Voss.

Preis: 50 Kop. = 17 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

C. Vesselofski, beständiger Secretär.

Im September 1859.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

ÜBER

DEN SEITLICHEN HERMAPHRODITISMUS

EINES 22-JÄHRIGEN MENSCHEN.

Von

Dr. med. et chir. **Wenzel Gruber.**

Seitliche Zwitterbildung (*Hermaphroditismus lateralis*), d. i. Vorkommen eines Hodens mit *Vas deferens* und Samenblase auf der einen Seite, eines Eierstockes mit Trompete und Uterus auf der anderen Seite, gehört beim Menschen zu den Seltenheiten.

Bis 1857 hat man 6 bis 7 Fälle hierher gerechnet, nämlich: die Fälle, welche Sue, Varole, Rudolphi, Berthold, Follin und H. Meyer zergliedert haben, und den Fall, welchen Laumonnier beobachtete. Mit Sicherheit sind hierher die Fälle von Rudolphi, Berthold und H. Meyer zu zählen. Bei Follin's Fall ist es am zweifelhaftesten, ob er hierher gehöre. Von Laumonnier's Fall kenne ich keine Beschreibung. Aber in allen Fällen waren sowohl die männlichen als auch die weiblichen Geschlechtstheile mehr oder weniger defect.

Diesen bekannten Fällen kann ich einen neuen mit Sicherheit als seitlichen Zwitter erkannten Fall anreihen, der Gegenstand vorliegender Abhandlung ist.

A. Bekannte Fälle seitlicher Zwitterbildung.

Zur besseren Uebersicht und der Vergleichung halber werde ich die über die bekannten Fälle veröffentlichten Befunde, im Nachstehenden in Kürze zusammengestellt, der Beschreibung des neuen Falles vorausschicken.

1) *Sue's* 10 — 14jähriger seitlicher Hermaphrodit. Zergliedert unter Verdier's Augen 1746[1]).

Befund: Derselbe wurde wegen des anscheinend gehörig gebildeten *Penis* nebst *Scrotum* für männlich gehalten. Der *Uterus* hatte die gewöhnliche Lage. Die *Vagina* mün-

[1]) Gautier. Observ. sur l'hist. nat. etc. ann. 1752. Tom. I. Part 2 p. 71. Tab. C. — bei Rudolphi p. 64 und Berthold p. 110. — Morand. «De Hermaphroditis» Paris 1849. — cit. in Todd's Cyclopaedia of anat. and physiol. Vol. II. London 1849. p. 698.

dete mit einer kleinen Oeffnung vor dem *Scrotum*, woselbst auch eine besondere Harnröhrenmündung sich befand. An der rechten Seite war eine *Tuba Fallopiana* mit *Fimbrien* an ihrem äusseren Ende, dann ein *Ovarium* und *Ligamentum rotundum* zugegen. An der linken Seite, statt dieser drei, war ein Kanal, welcher in einen in der Unterleibshöhle gelagerten Hoden überging, vorhanden. Der Hode hatte über sich den Nebenhoden und schickte zwei als *Vasa deferentia* gedeutete Röhren ab, die im genannten Kanale, nahe an seiner *Insertion* am *Uterus*, sich verloren.

2) *Varole's* 18jähriger seitlicher *Hermaphrodit.* (Schmiedebursche, Namens Dupin, 1754 im Hotel-Dieu in Paris gestorben.) Zergliedert 1754 [1]).

Befund: Die Brüste waren von der Grösse derer eines Mädchens desselben Alters. Ein Geschlechtsglied, das aus zwei *Corpora cavernosa* bestand und mit einer gespaltenen aber undurchbohrten Glans bedeckt war, war zugegen. Die *Urethra* war bis zur Harnblase beinahe *isolirt*, kein Theil des *Penis*, ihre Oeffnung befand sich an dessen unterer Fläche und $^1/_2$'' von seinem Ende. Ein kleines Loch und eine 1''' tiefe Spalte war zwischen *Urethra* und *Glans* sichtbar. Ein kurzes mit der *Raphe* vereinigtes *Praeputium* hielt das Glied abwärts gebogen und machte die *Erection* unmöglich. Das *Scrotum* bestand aus zwei deutlichen, durch das Glied und die *Urethra* gespaltenen Säcken, von welchen der rechte den Hoden uud seine Anhänge, der linke Fett und Bindegewebe beherbergte. Das *Vas deferens* führte in eine einfache, mehr rechts als links gelegene *Vesica seminalis*, in welche es sich an der Mitte ihres äusseren Randes einsenkte. Von der *Vesica seminalis* gingen zwei Kanäle ab, wovon der eine mit der *Urethra*, der andere $1^1/_2$'' lange mit dem *Uterus* communicirte. Der *Uterus* war klein, *oval*, ein wenig abgeplattet, hatte keinen Hals, aber er wies linkerseits ein *Ligamentum latum* auf, zwischen dessen Blättern eine *Tuba Fallopiana* mit Fimbrien am äussern Ende, ein *Ovarium* und ein im Bindegewehe des linken *Scrotal*-Sackes sich verlierendes *Ligamentum rotundum* vorkam. Die *Vagina* fehlte.

3) *Rudolphi's* drei Monate alter seitlicher *Hermaphrodit.* Zergliedert 1825 [2]).

Befund: Rudolphi fand ein unten gespaltenes Glied, einen rechten völlig ausgebildeten Hoden in der entsprechenden Scrotalhälfte, dessen Nebenhode in ein *Vas deferens* von gewöhnlicher Bildung überging. Der *Uterus*, die *Vagina* und ein ovaler, platter, harter als *Rudiment* der *Prostata* und der *Vesicae seminales* gedeuteter, später von Berthold als *Uterus*-Hals *diagnosticirter* Körper zwischen beiden, in dessen Wand ersterer und das blind geschlossene *Vas deferens* endiget, letztere beginnt. Der genannte Körper enthält eine ringsum, der *Uterus* eine unten an diesem, die *Vagina* eine oben am Körper und eine unten

[1]) Ph. Pinel. — Mém. de la soc. méd. d'emulation IV. ann. pour l'an VIII. de la Republ. Paris an IX. im Artikel: «II. Vices de conformation qui offrent l'apparence des deux sexes dans le même individu, ou qui semblent caractériser l'état d'hermaphrodite». Not. p. 342—343.

[2]) D. K. A. Rudolphi. Beschreibung einer seltenen menschl. Zwitterbildung. — Abhandlungen d. königl. Acad. d. Wiss. z. Berlin a. d. J. 1825. Berl. 1828 p. 63. Tab. I. — III.

am andern Ende geschlossene Höhle. Während der *Uterus* rechterseits oben stumpf endiget, zeigt er linkerseits ein *Ligamentum latum*, welches die *Tuba Fallopiana*, das *Ovarium* mit dem *Ligamentum ovarii* und das in den Schamberg dringende *Lig. rotundum* enthält. Die *Urethra* führt in die gutgebildete Harnblase. Das *Rectum* und der After waren natürlich beschaffen.

4) *Berthold's* seitlicher *Hermaphrodit* (neugeborenes Kind). Zergliedert 1834[1]).

Befund: Die Genitalien zeigten äusserlich einen gemischten Character. Die *Labia majora* waren verhältnissmässig dicker und wulstiger. Die *Labia minora* fehlten. Die *Labia majora* hatten vorn die *Glans* mit dem *Praeputium* zwischen sich, endigten hinten in einen gemeinschaftlichen Wulst am *Perinaeum*. Die *Glans* sizt auf einem kurzen, aus zwei *Corpora cavernosa* bestehenden Gliede auf, hatte ein *Frenulum*, ist undurchbohrt und glich mehr der einer *Clitoris* als eines *Penis*. Vom After erstreckte sich eine wohl ausgebildete Naht durch das *Perinaeum* über den Wulst der *Labia majora* herüber zur *Urogenital*-Oeffnung. Die *Urogenital*-Oeffnung war eine schmale von der *Glans* fast gänzlich bedeckte Oeffnung.

Der *Uterus* lag zwischen dem Mastdarme und der Harnblase etwas gegen die linke Seite hin gewandt, war an seiner linken Hälfte stark entwickelt und bildete rechts einen scharfen Rand. Sein Körper war 10‴ lang, an seiner inneren Fläche glatt ohne Runzeln. Sein Hals war 11‴ lang, oben 2‴ dick, unten bis zu 4‴ Dicke angeschwollen, die innere Fläche mit deutlichen *Plicae palmatae* versehen, in den Körper und die *Vagina* gehörig geöffnet. Der Muttermund hatte eine hintere kaum bemerkbare, und eine vordere 1‴ tief in die *Vagina* hineinragende Lippe. Die *Vagina* war 10‴ lang, 3‴ weit, ihre innere Fläche mit beiden *Columnae rugarum* versehen, am Ausgange von einem *Hymen annularis* begrenzt. Sie mündete nicht direkt nach aussen, sondern in einen 5‴ langen *Aditus urogenitalis*. Die vom rechten Rande ausgehende als *Ligamentum latum* gedeutete *Peritoneal*-Falte setzte sich in das den *Annulus inguinalis internus* umgebende *Peritoneum* fort und bildete mit ihm den *Processus vaginalis*. Allein dasselbe enthielt weder eine *Tuba Fallopiana*, noch ein *Ovarium*, noch ein *Lig. rotundum*. Alle diese Theile nebst dem Rosenmüller'schen Organe waren jedoch vollständig entwickelt in dem wohlgebildeten *Ligamentum latum* der linken Seite vorhanden.

Der *Processus vaginalis peritonei* erstreckte sich bis in das rechte *Labium*. Am Grunde dieses *Processus* im *Labium* lag ein sehr entwickelter Hode und Nebenhode, die mit einem gehörig entwickelten Samenstrange versehen waren. Das Ende des *Vas deferens* stiess an die rechte Seite der Wand der Anschwellung des *Uterus*-Halses, verschmolz damit, lief in dieser Wand nach unten, setzte sich in der Wand der *Vagina* weiter fort und öffnete sich rechts unter dem *Hymen* in den *Sinus urogenitalis*. Die Mündung der *Urethra* befand sich

[1]) Arn. Adolph Berthold. Seitliche Zwitterbildung (*Hermaphroditismus lateralis*) beim Menschen. — Abhandlung. d. königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. II. Göttingen 1845 p. 104. Tab. I. —*II.*

daselbst vorn unter dem *Hymen*, $^1/_2$‴ von der Mündung des *Vas deferens* entfernt. Die *Urethra* begab sich von da zur Harnblase. Die *Prostata* und *Vesicae seminales* fehlten.

5) *Follin's* 50jähriger seitlicher *Hermaphrodit*, (im Leben zuerst für ein weibliches Individuum gehalten und Angélique Courtois genannt; später von A. Dubois für einen *Hypospadiaeus* erklärt), 1848 in Paris gestorben und zergliedert [1]).

Befund: Das äussere Aussehen war das eines Mannes von grosser Statur. Das Individuum hatte etwas Bart und Brüste, die etwas mehr als beim Manne entwickelt waren.

Die *Glans penis* war undurchbohrt mit ihrer Krone vom Geschlechtsgliede deutlich gesondert, $1^1/_2$ Cent. lang und von einem *Praeputium* umgeben. Eine Art Rinne befand sich an der unteren Seite der *Glans*. Dieselbe endigte $2^1/_2$ Cent. hinter der Wurzel des *Penis* in das 2 Mm. weite *Orificium urethrae*. Eine Furche erstreckte sich von diesem *Orificium* bis zum *Anus*. Das *Scrotum* bestand aus zwei ovalen, *labien*-ähnlichen Vorsprüngen, von welchen der linke im oberen Theile einen Hoden enthielt. Ein dem *Mons Veneris* einer Frau analoger Vorsprung war zugegen. Der *Penis* bestand aus zwei *Corpora cavernosa* und war 5 — 6 Cent. lang.

Die Harnblase war gross. Ein wenig nach vorn vom Harnblasenhalse wurde an der unteren Wand der *Urethra* das sehr kleine runde *Orificium vaginae* wahrgenommen. Der *Uterus* hatte eine regelmässige dreieckige Gestalt. Die Höhle seines Körpers war 3 Cent. lang, hatte drei Winkel und zeigte eine glatte sammetartige Fläche. Die oberen zwei Winkel waren gegen die *Tubae* gerichtet, der dritte untere communicirte mit der Höhle des Halses. Die Höhle des Halses war von der des Körpers durch eine deutliche Verengerung geschieden und ging ohne Grenze in den Kanal der *Vagina* über. Sie war unregelmässig oval, an der Halsanschwellung $1^1/_2$ Cent. breit und an ihren Wänden mit den *Palmae plicatae* besetzt. Die *Vagina* war 6 Cent. lang und so weit, als ein Finger mittlerer Grösse dick ist, besass keine *Columnae rugarum*, war jedoch von einer Anzahl kleiner Drüsenöffnungen durchbohrt und öffnete sich vor dem Blasenhalse an der unteren Wand der *Urethra*. Das *Rectum* war normal. Der After sass 6 Cent. hinter dem *Orificium urethrae*.

Der *Uterus* hatte jederseits ein *Ligamentum*. Das rechte davon war ein wirkliches *Ligamentum latum* mit drei Flügeln, das das *Ligamentum uteri rotundum*, die *Tuba* und das Rosenmüller'sche Organ, allein kein *Ovarium* enthielt. Im vorderen Flügel befand sich das *Ligamentum rotundum*, im mittleren das *Ligamentum ovarii*, im hinteren die *Tuba*. Zwischen dem mittleren und hinteren Flügel lag das Rosenmüller'sche Organ. Das *Ligamentum rotundum* endigte im *Canalis inguinalis* an einem nussgrossen serösen Sacke, war 12 Cent. lang. Die *Tuba* hatte an ihrem Ende einige *Fimbriae*, war nur an dem äusseren Dreiviertel ihrer Länge durchgängig, öffnete sich nicht in den *Uterus*. Ihre Länge betrug 12 Cent.

---

[1]) Follin. Observ. d'un cas remarquable d'hermaphroditisme etc. — Gaz. des hospit. 24. ann. No. 140. | 4. décemb. 1851 p. 561 — 563. Fig. 1 — 5.

Das linke war ein Strang, der vom linken Winkel des *Uterus* ausging, durch den *Canalis inguinalis* verlief und unter dem *Annulus inguinalis externus* an einem Sacke mit verdickten Wänden endigte, der etwas über und auswärts vom *Labium dextrum* lag. Der Strang bestand aus der *Tuba* und dem *Ligamentum rotundum*. Der Sack war in viele Abtheilungen, die unter einander communicirten, geschieden, 4 Cent. weit, in den *Canalis inguinalis* nicht verlängert, an seiner inneren Fläche glatt. Derselbe enthielt eine Masse, die theils *Tuba*, theils Hode war. Die *Tuba* war an ihrem Ende regelmässig gefranzt und daselbst im Centrum von einem Loche durchbohrt. Dieselbe war doppelt so lang als die der andern Seite und bis in den *Uterus* durchgängig. Der Hode war eiförmig, in der einen Richtung 2 Cent. lang, in der andern $1\frac{1}{2}$ Cent. breit. Derselbe hatte zur Hülle eine seröse und darunter eine fibröse Haut, wovon die erstere den grössten Theil seines Umfanges, die letztere diesen vollständig umgab. Seine Ernährungsgefässe durchbohrten an einer Stelle die Hülle und traten in's *Parenchym*. Er bestand aus *Canaliculi seminiferi*, die sehr häufig blind endigten und einen geringeren Durchmesser als die des Hodens gewöhnlicher Männer hatten. Die *Canaliculi* sollen ein *Epithelium* in Gestalt runder Körperchen und mehr oder weniger abgerundete, verschieden grosse, gelbe Körner enthalten haben.

Follin vermisste ausser dem *Ovarium*, die *Prostata*, die *Glandulae Cowperi*, die *Vesicae seminales*, die *Labia minora* und die *Rima pudendi*. Des Nebenhodens, des *Vas deferens* und des *Corpus cavernosum urethrae* wird ebenfalls keine Erwähnung gethan.

In diesem Falle war das wesentlichste Organ der männlichen Geschlechtstheile, d. i. der Hode, allerdings nur verkümmert zugegen, allein er wurde doch an der linken Seite vorgefunden. Das wesentlichste Organ der weiblichen Geschlechtstheile, d. i. das *Ovarium*, fehlte, aber es war doch der verkümmerte Ueberrest der Blindschläuche und des Sammelganges des weiblichen Wolff'schen Körpers, d. i. das Rosenmüller'sche Organ der rechten Seite, vorhanden. Beide *Tubae* hatten an ihrem äusseren Ende *Fimbriae* und ein *Ostium abdominale*, aber auch der Weber'sche Apparat kann mit *Tubae*, welche ein offenes mit *Fimbrien* besetztes Ende aufweisen, auftreten, wie K. Langer's Fall[1]) lehrt. Auch endigte die bis in den *Uterus* durchgängige linke *Tuba*, wie das Ende des Weber'schen Apparates, an der männlichen Geschlechtsdrüse. Es dürfte somit Follin's Fall nicht ohne allen Zweifel zu den seitlichen Zwittern gerechnet werden.

6) ***H. Meyer's*** seitlicher ***Hermaphrodit*** (neugeborenes Kind). Beschrieben 1857[2]).

Befund: Aeussere Genitalien vom Anschen eines *Hypospadiaden* höheren Grades. Statt des *Scrotal*-Sackes zwei *labien*-ähnliche Bildungen, wovon die linke grösser, schlaffer, gerunzelter war. Zwischen der vordern Hälfte derselben befand sich ein rudimentärer

[1]) Uterus masculinus eines 63jährigen Mannes. Mit 2 Tafeln. — Zeitschrift der k. k. Gesellsch. der Aerzte in Wien. Jahrg. XI. p. 422.

[2]) H. Meyer. Ein Fall von *Hermaphroditismus lateralis*. — Arch. f. path. Anat., Physiol. und klinische Medicin von Virchow. Band XI. H. 5. Berlin, 1857. p. 420. Taf. III., Fig. 1 — 3.

Penis. Das *Praeputium* war stark gerunzelt. Die *Glans* zeigte eine Spalte, die in einen kurzen Blindkanal führte. Unter dieser Spalte begann eine von zwei vorspringenden Leisten eingefasste Rinne, welche an ihrem vorderen der Spalte zugewendeten Ende geschlossen, an ihrem hinteren Ende dagegen in die enge, an dem vorderen Ende der *Raphe* gelegene Oeffnung überging.

Diese Oeffnung führte in den von einer kleinen *Prostata* umgebenen Theil der Harnröhre, welcher einen *Colliculus seminalis* aufwies. Der *Colliculus seminalis* war von den Ausmündungen der Absonderungsgänge der *Prostata* umgeben und hatte auf seiner Höhe zwei Oeffnungen. Die linkseitige, punktförmige rundliche Oeffnung führte nach ihrer Vergrösserung zu einer 3 Mm. langen Spalte in die *Vagina*.

Zwischen dem wegen der Dicke der Wandungen und stark ausgeprägter *Palmae plicatae*, die sich als starke Längsfalten in den *Uterus*-Körper fortsetzte, als *Uterus*, und dem wegen der Dünne der Wandungen und des Vorkommens der *Columnae rugarum* als *Vagina* charakterisirten Theile eines Kanals befand sich eine stark vorspringende nach unten gerichtete und als *Orificium uteri externum* gedeutete Querfalte. An die oberen Winkel des *Uterus* war jederseits eine *Tuba Fallopiana* angeheftet. Unter der *Tuba* auf der rechten Seite lag ein *Ovarium* an einem *Ligamentum ovarii*, zwischen der *Tuba* und dem *Ovarium* das rechte Rosenmüller'sche Organ, unter dem äusseren Ende der *Tuba* auf der linken Seite ein Hode und zwischen ihr und einer festen dem Hoden angehörigen Masse das linke Rosenmüller'sche Organ. Der Hode lag in einem weiten *Processus vaginalis*, der im linken *Labium* eingesenkt war. Vom Hoden ging ein als *Vas deferens* gedeuteter Strang, der sich bis zum oberen linken Winkel des *Uterus* verfolgen liess, aber nur in der Nähe des Hodens als wirklicher Kanal sich erwies. In die dem Hoden angehörige, feste, neben der Austrittsstelle des *Vas deferens* befindliche Masse liessen sich Stränge verfolgen, in welchen Hodengefässe zu erkennen waren. Zu dieser Masse begaben sich auch die Gänge des Rosenmüller'schen Organs. Jederseits war ein *Ligamentum uteri rotundum* zugegen, wovon jedoch das linke vom oberen Winkel des *Uterus* in den *Processus vaginalis* ging. Aus dem *Processus vaginalis* ging ein als *Gubernaculum Hunteri* gedeuteter Strang zum Hoden, in dem er sich zwischen dem rudimentären *Vas deferens* und der oben genannten vom Hoden abgetrennten festen Masse ansetzte. Die *Tuba Fallopiana* der linken Seite und das Rosenmüller'sche Organ beider Seiten besassen End-*Hydatiden* [1]).

B. Neuer Fall seitlicher Zwitterbildung.

Im April 1859 starb in St. Petersburg ein für einen *Hypospadiaeus* gehaltenes Individuum an Afterprodukten (*Carcinoma medullare*) im Unterleibe. Der behandelnde

[1]) Hierher soll auch noch ein *Hermaphrodit* gehören, den Laumonnier zu Rouen beobachtete und in Wachs nachbilden liess. Das getrocknete Originalpräparat so wie das Wachspräparat werden in Rouen aufbewahrt. — Ohne irgend eine Beschreibung citirt in L. F. v. Froriep's neuen Notizen a. d. Gebiete d. Natur- u. Heilkunde. Bd. 28 No. 2. p. 10. u. Miscellen. —

Arzt, Dr. Sadler, Oberarzt im Hospitale des Kaiserl. Hofstalles, schritt behufs der Ausmittelung des Characters einer Geschwulst im Unterleibe, die im Leben des Individuums durch's Gesicht und Gefühl unterschieden werden konnte, zur Section der Leiche. Da derselbe aber auf Geschlechtsorgane gemischten Characters stiess, so stand er von der Fortsetzung der Section ab. Dr. Sadler liess die *Exenteration* der Eingeweide vornehmen und sandte diese mir zur weiteren Untersuchung. Die von mir angestellten Untersuchungen erwiesen das verstorbene Individum als seitlichen Zwitter.

I. Krankengeschichte.

(Mir mitgetheilt von Dr. Sadler.)

Gregor Brkost, 22 Jahre alt, Sohn eines Kutschers beim Kaiserl. Hofstalle, war in derselben Verwaltung seit Jahren bei der Abtheilung für Verfertigung der Sättel und Zelte angestellt. Als Knabe soll er heftige Masern überstanden haben und seitdem taub gewesen sein. Dieses Gebrechen konnte aber wohl schon früher existirt haben, da er sich, den vollkommenen Taubstummen gleich, lieber durch Zeichen als Worte verständigte.

Er hatte sich schon vor einiger Zeit *ambulatorisch* gezeigt, ein Mittel gegen Würmer verlangend, was ihm auch, bei Mangel anderweitiger Klagen, verabreicht wurde und Erleichterung verschafft haben sollte.

Am 3. April 1859 kam er wieder als Ambulant zu Dr. Sadler, versichernd abermals an Würmern zu leiden. Dr. Sadler behielt ihn, der besseren Beobachtung halber, diesmal im Hofhospitale zurück.

Bei seinem fast taubstummen Wesen war ihn auszufragen theils beschwerlich, theils nur zu geringem Verständnisse führend; sein Gesichtsausdruck war wenig geistig entwickelt, er war hager, Puls- und Herzschlag normal. Im Unterleibe aber fühlte Dr. Sadler eine für seine Jugend und bisheriges Wohlsein auffallend grosse, zirkelrunde, nach oben wohl flache, aber nicht ebene Geschwulst, deren Durchmesser auf 6″ geschätzt und als dem *Mesenterium* angehörig diagnosticirt wurde. Dieselbe reichte etwas über den Nabel hinauf und endigte gegen die Schambeinfuge. Der Kranke wollte von ihrem früheren Vorhandensein, so wie von einer Beschwerde durch dieselbe durchaus nichts wissen, obgleich die schon lange bestehenden, von ihm auf Würmer gedeuteten Erscheinungen, doch wohl wahrscheinlicher ihren Ursprung in derselben hatten. Das Individuum hatte gewöhnlich guten Appetit. Die Leber war bedeutend vergrössert, fühlte sich aber nicht prall an. Vor der Aufnahme in das Hospital betrieb er noch seine Geschäfte, und die ersten Tage nach seiner Aufnahme ging er noch herum. Ehe Dr. Sadler von irgend einem Heilverfahren irgend einen Erfolg erwarten durfte, entstand ganz auffallend rasch eine mit der aussergewöhnlichsten Kräfteabnahme vor sich gehende *Ascites*, welche dem Kranken ein ganz *anaemisches* Aussehen verschaffte. Das Fieber war im Verhältniss zu dem raschen *Collapsus* unbedeutend. Die Beschwerden vom Drucke im Unterleibe waren über die von Angst und Beklem-

mung nicht hervorstechend. Das Bewusstsein des Kranken blieb ungetrübt. Am 17. Tage nach der Aufnahme in's Hospital verschied der Kranke.

II. Anatomischer Befund.

Den Resultaten meiner Untersuchungen schicke ich einige von Dr. Sadler angestellte Untersuchungen voraus.

Dr. Sadler sah Spuren eines Bartes und wenig entwickelte Brüste. Bei der Eröffnung der Bauchhöhle flossen 23 Pfd. eines haemorrhagischen *Exsudates* aus derselben. Einen Hoden traf er nur in der rechten Hodensackhälfte an, nicht in der linken. Die Körperlänge betrug 5′ 3″ Par. M. (1 Mèt. 7 Décim.), wovon 2′ 9″ (8 Décim. 9 Cent. 1 Mm.) auf die Entfernung vom Scheitel bis zu den *Trochanteren*, 2′ 6″ (8 Décim. 1 Cent.) auf die Entfernung von diesen bis zu den Fersen kamen. Die Breite des Körpers im Bereiche der Schulterregion betrug 1′ $3^1/_2$″ (4 Décim. 1 Cent. $8^1/_2$ Mm.), die Entfernung von einem *Trochanter* zum andern $11^7/_8$″ (2 Décim. 2 Cent.), die von einer *Crista oss. ilei* zur anderen $10^3/_4$″ (2 Décim. 9 Cent.), die von einer *Spina ilei ant. sup.* zur andern $8^3/_4$″ (2 Décim. 3 Cent. $6^1/_4$ Mm). Die Entfernung der Spitze des *Os coccygis* vom *Promontorium* $4^1/_2$″ (12 Cent. $1^1/_2$ Mm.), und der Abstand der *Tuberositates ossis ischii* $3^1/_4$″ (8 Cent. $7^3/_4$ Mm.). Die *Conjugata* war $4^3/_4$″ (12 Cent. $8^1/_4$ Mm.), die rechte *Obliqua* $4^7/_8$″ (13 Cent. $1^5/_8$ Mm.), die linke *Obliqua* $4^3/_4$″ (12 Cent. $8^1/_4$ Mm.) lang. Der Querdurchmesser des Beckeneinganges betrug $5^1/_4$″ (14 Cent. $1^3/_4$ Mm.).

Aus diesen von Dr. Sadler angestellten Beckenmessungen, falls sie genau sind, würde hervorgehen, dass das Becken des *Hermaphroditen* ein weibliches sei. Die meisten Durchmesser haben ja eine Grösse, die mit der Grösse der für das weibliche Becken aufgestellten Durchmesser übereinstimmt. Allerdings ist der Abstand der *Tuberositates oss. ischii* kleiner, als der beim Weibe, allein doch grösser als der beim Manne. Aber ich finde an dem mir überbrachten Beckenstücke (vorderen Wand) die Höhe der *Symphysis ossium pubis* gleich 1″ 11‴ (5 Cent. 2 Mm.) und die Entfernung des äusseren Umfanges des einen *Tuberculum pubis* von dem des andern *Tuberculum pubis* gleich 2″ (5 Cent. 4 Mm.), also eine Höhe und Breite der vorderen Wand, die einem männlichen Becken zukommen. Rein weiblich konnte somit das Becken nicht beschaffen sein.

Von den mir zur Untersuchung am 22. April 1859 eingesandten Eingeweiden waren die meisten, so wie die Afterproducte noch intact. Die Harnblase war zerstückelt, der *Uterus* und die *Vagina* waren schon aufgeschnitten und von dem übrigen Harn- und Geschlechtsapparat hinter der *Symphysis ossium pubis* abgeschnitten, auch war der Hode vom *Ligamentum uteri latum dextrum* grösstentheils getrennt. Aber es war doch noch möglich, wenn auch schwierig, die meisten Stellen des aufgehobenen Zusammenhanges aufzufinden. Lieb war es mir, die äusseren *Genitalien* noch in Verbindung mit der ausgesägten vorderen Beckenwand und die Gebilde der *Regio ano-perinaealis* möglichst unberührt erhalten zu haben.

Die Resultate meiner Zergliederung und Untersuchungen aber sind im Folgenden enthalten:

Das Herz und die grossen Gefässe sind normal.

Messungen, die ich über den Kehlkopf im Ganzen, so wie über die einzelnen Knorpel desselben anstellte, ergaben nachstehende Resultate:

Kehlkopf im Ganzen.

Höhe: vorn	zwischen der *Excisura* des oberen Randes der *Cartilago thyreoidea* und dem unteren Rande des Bogens der *Cartilago cricoidea*	3 Cent.	$1\frac{1}{2}$ — $3\frac{3}{4}$ Mm.	= 1″ 2 — 3‴
	zwischen der Spitze der aufgeklappten *Epiglottis* und dem unteren Rande des Bogens der *Cartilago cricoidea*	6 Cent.	$5\frac{1}{4}$ — $7\frac{1}{2}$ Mm.	= 2″ 5 — 6‴
seitlich	in der Mitte	3 Cent.	$8\frac{1}{4}$ Mm.	= 1″ 5‴
	zwischen der Spitze des oberen Hornes der *Cartilago thyreoida* und dem Ende des unteren Randes der Platte der *Cartilago cricoidea*	4 Cent.	$9\frac{1}{2}$ Mm.	= 1″ 10‴
hinten	zwischen der Spitze der *Cartilago Santoriniana* und dem unteren Rande der Platte der *Cartilago cricoidea*	4 Cent.		= 1″ 6‴
Breite	(grösste): an den *Bases* der oberen Hörner der *Cartilago thyreoidea*	4 Cent.	5 — $7\frac{1}{4}$ Mm.	= 1″ 8 — 9‴
Dicke:	von dem oberen Ende des Winkels der *Cartilago thyreoidea* zum oberen Rande der Platte der *Cartilago cricoidea*	4 Cent.		= 1″ 6″
	von der Mitte des Winkels der *Cartilago thyreoidea* zum oberen Rande der Platte der *Cartilago cricoidea*	3 Cent.	$2\frac{5}{8}$ — $3\frac{3}{4}$ Mm.	= 1″ $2\frac{1}{2}$ — 3‴

Einzelne Knorpel.

Cartilago thyreoidea.

Entfernung des Ausschnittes vom unteren Rande	1 Cent.	$6\frac{1}{2}$ Mm. =	$7\frac{1}{3}$‴
« des oberen Randes vom Fortsatze des unteren Randes	— 3 Cent.	=	13‴
Länge des oberen Hornes	1 Cent. 5 — 6 Mm.	= $6\frac{1}{2}$ — 7‴	
« des unteren Hornes		7 Mm. =	3‴
Breite jeder Platte	3 Cent.	6 Mm. =	16‴
Tiefe des Ausschnittes		7 Mm. =	3‴

Abstand der Enden der oberen Hörner	4 Cent.	3 Mm. =	1″ 5‴
« der Enden der unteren Hörner	2 Cent.	5—7 Mm. =	11—12‴
« unter den Bases der oberen Hörner	+ 4 Cent.	=	1″ 6‴
Höhe jeder Platte am hinteren Rande (ohne Rechnung der Hörner)	2 Cent.	=	9‴

Cartilago cricoidea.

Höhe der Platte in der Mitte	2 Cent.	1½ Mm. =	9½‴
« « « daneben an der höchsten Stelle	2 Cent.	3 Mm. =	10⅓‴
« des Bogens in der Mittellinie		6 Mm. =	2¾‴
Durchmesser des Knorpels von einer Seite zur andern	2 Cent.	7 Mm. =	1″
« von vorn nach hinten	2 Cent.	5 Mm. =	11‴

Cartilago arytaenoidea.

Höhe am äusseren Rande	1 Cent.	6—8 Mm. =	7—8‴
« « inneren Rande		12½—13¾ Mm. =	5½—6‴
Entfernung zwischen dem äusseren und vorderen Winkel	1 Cent.	3½ Mm. =	6‴
Breite der hinteren Fläche in der Mitte		6½ Mm. =	2¾‴
Breite der inneren Fläche an der Basis		8 Mm. =	3½‴

Ligamenta vocalia.

Länge	1 Cent.	5—6 Mm. =	6½—7‴

Rima glottidis.

Länge	2 Cent.	3—5 Mm. =	10—11‴

Vergleicht man die Resultate dieser Messungen mit jenen aus Messungen der Kehlköpfe normal gebauter männlicher und weiblicher Individuen, so ergiebt sich, dass der Kehlkopf des *Hermaphroditen* ein männlicher sei.

Die *Trachea* ist 9½ Cent. = 3″ 6‴ lang, 2 Cent. = 9‴ breit und 1 Cent. 8 Mm. dick. Sie enthält 15 — 17 Knorpelringe. Der rechte *Bronchus* ist 2 Cent. 4 Mm. = 10½‴ lang und enthält 4 — 6 Knorpelringe. Der linke *Bronchus* ist 4 Cent. 3 Mm. = 1″ 7‴ lang und enthält 8 — 9 Knorpelringe. Die *Bronchial*-Drüsen sind mit erweichter *medullar-carcinomatöser* Masse infiltrirt.

Die Lungen zeigen einige pathologisch-anatomische Veränderungen. Es sind nämlich in den Spitzen der oberen Lappen verödete *Tuberkel*-Massen und einige in Verkreidung begriffene *Tuberkel* zugegen. In der Mitte des äusseren Unfanges des rechten unteren Lappens unmittelbar unter der *Pleura*, sitzt ein erweichter, haselnussgrosser *Tumor*, darunter in der Nähe des äusseren Randes der Basis ein fester stecknadelkopfgrosser

Knoten. Beide zeigen unter dem Microscope Elemente, die dem *Carcinoma medullare* eigenthümlich sind.

Die Schilddrüse hatte $5\frac{1}{2}$ Cent. hohe und 2 Cent. dicke Lappen. Der *Isthmus* war in querer Richtung 18 Mm. lang, in vertikaler Richtung 1 Cent. breit und 3 Mm. dick. Dieselbe wiegt 1 Unc. Ihrer Grösse und ihrem Gewichte nach ist sie eine männliche.

Die Schleimhaut des ganzen Speisekanales zeigt, mit Ausnahme zweier Geschwürsnarben im *Colon ascendens*, keine pathologischen Veränderungen. Der Darmkanal ist 6 Mèt. 6 Cent. $1\frac{1}{2}$ Mm. = 18′ $8\frac{1}{2}$″ lang, wovon 4 Mèt. 5 Décim. 6 Cent. 3 Mm. = 14′ 1″ auf den Dünndarm, 1 Mèt. 4 Décim. 9 Cent. $8\frac{1}{2}$ Mm. = 4′ $7\frac{1}{2}$″ auf den Dickdarm kommen. Die Leber ist vergrössert. Ihre Länge misst 37 Cent., ihre Breite 27 Cent. und ihre grösste Dicke 12 Cent. Ihr Gewicht beträgt 8 Pfd. 1 Unc. 2 Drch. und 1 Scrup. Die obere und untere Fläche zeigen viele runde, flache, gelbliche, rothpunktirte Erhöhungen, welche eine Grösse von 2 Mm. bis 8 Cent. haben. Denselben entsprechen Massen eines knollenartigen, ganz erweichten Afterproduktes, das den grössten Theil der Lebersubstanz occupirt. Beim Durchschnitte fliesst eine röthliche, schmierige, fadenziehende, dicke Flüssigkeit ab. Sämmtliche *Venen* sind mit *Thromben*, die keine Krebszellen enthalten und der *Venen*-Wandung fest anhängen, angefüllt. Unter dem Mikroskope erweiset sich das Afterprodukt als *Carcinoma medullare* mit denselben Elementen, die in den *Tumoren* der Lunge vorkamen. Die Milz und das *Pancreas* zeigen nichts Abweichendes. Hinter dem Kopfe des *Pancreas*, darüber hinter dem *Pylorus*-Theile des Magens in der *Bursa omentalis minor*, und das *Ligamentum hepatico-duodenale* sammt seinem Inhalte bedeckend, liegt eine runde, 20 Cent. im Umfange haltende Portion von *Carcinoma medullare*. Dasselbe hat eine gelblich weisse Farbe, ist mässig erweicht und giebt beim Durchschnitte eine rahmartige, fadenziehende Flüssigkeit. Noch eine andere Portion gelappten *Carcinoma medullare* grösserer Consistenz ist um die *Aort. abdom.* und *Vena cava inferior* etc. herum, von der Theilung der ersteren in die *Aort. iliacae* bis zum Zwerchfelle aufwärts und bis zu den Nieren und Nebennieren auswärts gelagert. Dasselbe erstreckt sich auch durch den *Hiatus aorticus* des Zwerchfelles hinter der *Aorta thoracica* in den unteren Theil des hinteren Mittelfellraumes der Brusthöhle. Kleinere Massen von *Carcinoma medullare*, die um die *Vasa spermatica interna* der linken Seite gelagert sind, setzten diese Portion mit dem entarteten *Ovarium* in Verbindung. Die *Mesenterial*-Drüsen sind mit *medullar-carcinomatösen* Massen infiltrirt, erweicht. Die Nieren, Nebennieren und Harngänge sind normal. Dasselbe kann wohl auch von der Harnblase gesagt werden, wie ich aus den mir zugekommenen Stücken ersehe. Die Oeffnungen der Harngänge in derselben stehen 2 Cent. von einander ab. Sie schien mehr nach rechts und in der Concavität der Krümmung, die *Uterus* und *Vagina* bilden, gelagert zu haben, weil an dem einen mit dem *Uterus* und der *Vagina* in Verbindung gelassenen Stücke derselben, das theilweise ihrem Körper, theilweise ihrem Grunde angehört, die linke Harngangöffnung vor, und zur rechten Seite des Ueber-

ganges des *Uterus* in die *Vagina* sich befindet. Die *Urethra* wird bei den Genitalien abgehandelt werden.

Nach Mittheilung des Befundes dieser Organe und der Afterprodukte schreite ich zur Anatomie der das Individuum als seitlichen Hermaphroditen characterisirenden Theile.

Mons Veneris.

Der Schamberg ist sehr reich an langen Haaren und mit vielem Fette ausgepolstert.

Scrotum. (Tab. I. c. c.)

Die *Scrotal*-Hälften stellen zwei grosse, schamlippenartige, fettarme Wülste dar, welche oben zwischen *Penis* und Schamberg durch eine schmale, wenig vorspringende Commissur zusammenhängen, hinten durch eine Ausbuchtung von einander geschieden sind, und 2 — $2^1/_2$ Cent. vor dem After endigen. Beide springen 4 Cent. hervor; die rechte ist 10 Cent. lang und 5 Cent. breit, die linke $9^1/_2$ Cent. lang und 4 Cent. breit, erstere also etwas grösser als letztere. Die Haut derselben ist grösstentheils sehr gerunzelt, dunkel gefärbt, mit wenigen aber langen Haaren besetzt. Nur an den hinteren drei Fünfteln ihrer inneren Seite ist die Haut glatt, lichter gefärbt, haarlos, aber dafür mit vielen Oeffnungen der *Glandulae sebaceae* versehen, welche gegen die Medianlinie von der *Glans penis* bis zum Eingange in den *Canalis uro-genitalis* und zur Seite des letzteren sich besonders anhäufen und ungewöhnlich grosse *Lumina* zeigen. Die *Tunica dartos* der rechten *Scrotal*-Hälfte bildet einen vollkommen abgeschlossenen Sack, der sich zu einer eiförmigen Blase von 9 Cent. Länge, 6 Cent. Breite und 5 Cent. Dicke aufblasen lässt. Die oberen zwei Fünftel der rechten Hodensack-Hälfte beherbergen einen gleichmässig 2 Cent. weiten und 5 — 6 Cent. langen cylinderförmigen, in seinen Wänden verdickten, und an seinem oberen Ende bei der Section quer abgeschnittenen Sack, den ich nur als Endstück des *Processus vaginalis* deuten kann. In der linken Hodensack-Hälfte ist ein *Processus vaginalis* nicht zugegen, wohl aber hängt an der mir überbrachten vorderen Beckenwand, und zwar zur Seite und unter dem Schambeinhöcker ein an einem Ende bei der Section ganz durchschnittenes Säckchen, das ich für das Endstück des offen gebliebenen und krankhaft erweiterten *Ligamentum Nuckii* ansehen möchte.

Penis. (Tab. I. b., Tab. II. Fig. 1. a.)

Aus den oberen zwei Fünfteln der Spalte zwischen den Hodensack-Hälften steht der starke *Penis* mit seinem 7 Cent. langen, nach abwärts gekrümmten Endstücke hervor. Dieses, die Haut mit eingerechnet, ist gegen 3 Cent. von einer Seite zur andern und 2 Cent. 2 Mm. dick. Die dem Ende der *Corpora cavernosa* aufsitzende *Glans* (Tab. I. *α.*) steht mit ihrer *Corona* über dieselbe oben 2 — 3 Mm., seitlich 6 Mm. vor. Dieselbe ist undurchbohrt, aber sie zeigt unter ihrer Spitze und an ihrer unteren Seite eine $1^1/_2$ Cent.

lange und $^1/_2$ Cent. tiefe Längsspalte (Tab. I. γ.), welche das *Rudiment* der nicht geschlossenen *Fossa Morgagniana* ist, und mit ihrem hinteren Ende in eine feine und seichte Rinne übergeht. Die *Glans* besitzt ein *Praeputium* (β.), als Fortsetzung der Haut des *Penis*. Dasselbe stellt eine Hautduplicatur von $1^1/_2$ Cent. Breite dar, die jederseits gegen den unteren Umfang der *Glans* allmählig schmäler wird und in eine von der *Glans* kommende andere Duplicatur eine kurze Strecke sich fortsetzt. Der *Penis* (Tab. II. Fig. 1. a.) erscheint als ein dreiseitig prismatischer ungewöhnlich nach abwärts gekrümmter Körper, der ohne seine Wurzeln 12 Cent. = $4^1/_2{}''$, mit diesen 17 Cent. = $6''\ 4^1/_2{}'''$ misst, somit mit 10 Cent. = $3^3/_4{}''$ seiner Länge versteckt liegt. Derselbe besteht aus zwei mit einander verschmolzenen *Corpora cavernosa penis* (β.) und dem *Corpus cavernosum urethrae* (γ.). Die *Corpora cavernosa penis* verhalten sich, einige Eigenthümlichkeiten ausgenommen, wie die jedes anderen *Penis*. Sie sind nämlich im schlaffen Zustande seitlich mehr comprimirt und haben statt einer unteren Fläche mit einer Rinne zur Aufnahme des *Corpus cavernosum urethrae*, einen nicht gerinnten concaven unteren Rand. Ihre verticale Dicke nimmt vom hinteren Ende des Körpers der *Corpora cavernosa* bis zu der von der *Glans* bedeckten Spitze allmählig ab; dort beträgt dieselbe 2 Cent. 3 Mm., hier 1 Cent. 4 Mm. Ihre transvertale Dicke bleibt sich von dem hinteren Ende des Körpers bis zur *Glans* fast gleich, aber sie nimmt von dem convexen Rücken bis zum unteren concaven Rande allmählig ab; dort beträgt sie 1 Cent. 3 — 6 Mm., hier 8 — 10 Mm. Das *Ligamentum suspensorium penis* (α.) ist sehr stark. Das *Corpus cavernosum urethrae* ist zur Hälfte ein einfacher, zur Hälfte ein doppelter, schwammiger Körper von 14 Cent. = $5''\ 3'''$ Länge, wovon auf die *Glans* (α'.) 2 Cent., auf jeden *Bulbus* (γ'.) 7 Cent. und auf das Zwischenstück (β'.) 5 Cent. kommen. Dasselbe ist undurchbohrt, nur die *Glans* zeigt statt der *Fossa navicularis* die beschriebene, unten offene Spalte. Die *Glans* sitzt auf der Spitze der *Corpora cavernosa* auf, und ist damit wie gewöhnlich vereinigt; die übrigen Theile hängen mit den *Corpora cavernosa* durch ein starkes, langes, vorn und hinten zugespitztes, in der Mitte bis 8 Mm. breites Band (δ.) zusammen. Die *Glans* hat eine der normaler Fälle ähnliche Gestalt. Längs dem Rücken ist sie 2 Cent. 3 Mm. lang, an ihrer Basis in vertikaler und transversaler Richtung $2^1/_2$ Cent. dick. Das Zwischenstück ist schmal walzenförmig, seitlich comprimirt, 5 — 6 Mm. in vertikaler Richtung und 4 Mm. in transversaler Richtung dick. Jeder *Bulbus* ist spindelförmig, 2 Cent. breit und 6 — 8 Mm. dick, liegt vorn zur Seite des *Orificium urogenitale*, hinten zur Seite des *Canalis urogenitalis*, zur Seite der *Prostata* und des Endes der *Vagina*. Sein innerer oberer Rand hängt mit dem der anderen Seite durch das Band zu den *Corpora cavernosa penis* zusammen; sein äusserer unterer Rand ist vorn durch das *Orificium urogenitale*, hinten durch eine bis auf den *Canalis urogenitalis* und die *Vagina* dringende tiefe Rinne geschieden. Unter dem Zwischenstücke liegt der vollkommen isolirte, gerinnte Hautwulst (ε.) zwischen *Glans* und *Orificium urogenitale*. Die Zwischenlinie zwischen den *Bulbi* entspricht dem *Orificium urogenitale*, der *Raphe* des *Scrotum* und der Medianlinie des *Perineum*.

Hinter und unter der *Glans penis* verläuft in der Medianlinie ein ½ Cent. vorspringender und ½ Cent. breiter, in zwei Hälften getheilter Wulst (Tab. I. d.; Tab. II. Fig. 1. c.), welcher durch sein straffes Angespanntsein den *Penis* abwärts gekrümmt erhält. Dieser entsteht jederseits zur Seite der hinteren Hälfte der genannten Spalte der *Glans* mit zwei Schenkeln. Der innere Schenkel geht von der *Glans*, der äussere Schenkel von dem Ende des *Praeputium* aus. Nachdem sich je zwei Schenkel zu je einer Seitenhälfte des Wulstes vereiniget haben, legen sie sich in einer Strecke von 1 Cent. zu dem gemeinschaftlichen Wulst und so an einander, dass sie nur eine feine Rinne (Tab. I. δ.), die wie mit einer glatten Schleimhaut austapezirt erscheint, zwischen sich lassen. Beide Hälften des Wulstes werden darauf breitere und dünne Falten, die unter einem spitzen Winkel und bis 6 Mm. Abstand von einander divergiren, das *Orificium urogenitale* umgeben, hinter demselben bogenförmig oder doch weniger spitzwinklig sich vereinigen und dann in der Medianlinie in die einfache *Raphe* sich fortsetzen. Dieser gerinnte Hautwulst ist das Rudiment des nicht geschlossenen und vom *Corpus cavernosum urethrae* nicht eingehüllten Schleimhautkanales der *Pars penis urethrae.*

Orificium urogenitale. (Tab. I. e.; Tab. II. Fig. 1. ε., Fig. 2. α.)

Das *Orificium urogenitale* ist eine klaffende, 2 Cent. lange, in der Mitte 6 Mm. breite Spalte, welche zu einer runden Oeffnung ausgespannt werden kann. Dieselbe beginnt 1 Cent. hinter der *Glans* aus der beschriebenen Rinne und endiget 3 Cent. 8 Mm. bis 4 Cent. vor den hinteren Enden der *Scrotal*-Hälften und 6 Cent. vor dem After. Es ist von der *Glans* nicht bedeckt. In dem vorderen Theile der Spalte sieht man feine in die obere Wand des *Canalis urogenitalis* sich fortsetzende Schleimhautfältchen.

Raphe. (Tab. I. f. f'.)

Die *Raphe scroti* (f.) ist 3 Cent. 8 Mm. — 4 Cent. lang. Der Anfangstheil ist in einer Strecke von 14 Mm. eine dünne 2½ Mm. vorspringende Hautplatte, später eine linienförmige Erhöhung. Dieselbe setzt sich in die *Raphe perinei* (f'.) fort, welche flacher und breiter ist und allmählig gegen den After verschwindet.

Anus. (Tab. I. g.)

Der After ist in seinem Umfange, mit Ausnahme der vorderen Seite, mit Büscheln langer Haare reichlich besetzt.

Muskeln der *Regio ano-perinealis.*

Der *Musculus levator ani* und *M. sphincter ani externus* sind sehr entwickelt. Letzterer überkreuzt sich nach vorn, und geht theilweise in eine faserige Masse über und schickt ein Bündel zur Haut des *Perineum.*

Die *Musculi ischio-cavernosi* (Tab. II. Fig. 1. g.) sind weniger entwickelt als die ge-

wöhnlicher männlicher Individuen von gleichem Alter. Ihr sehniger Theil ist ungewöhnlich vorherrschend.

Die *Musculi bulbo-cavernosi* (Tab. II. Fig. 1. h.). Es sind zwei, von einander völlig geschiedene Muskeln zugegen. Jeder entspringt mit der stärksten Portion von dem *Corpus cavernosum penis* vor der Insertion des *M. ischio-cavernosus*, mit der schwächeren, breiteren membranartigen Portion von dem *Bulbus corp. cavern. urethrae* der entsprechenden Seite und dem *Ligamentum triangulare urethrae*; verläuft nach rückwärts, bedeckt vorzugsweise den *Bulbus corp. cavern. urethrae* und endiget im *M. sphincter ani externus* unmittelbar und in der faserigen Masse am vorderen Ende des letzteren.

Die *Prostata*, die *Urethra* und die Endportion der *Vagina* werden von einem ringförmigen *Muskel, Compressor urethrae et cunni*, von 14 Mm. Breite, 1 — 2 Mm. Dicke umgeben. Derselbe hängt mit den *Ligamenta puboprostatica* durch seinen oberen Rand zusammen, entsteht sehnig jederseits vom aufsteigenden Aste des Sitzbeines und fliesst rückwärts mit dem *M. levator ani, sphincter ani externus* und den *Mm. bulbocavernosi* zusammen.

Wie es sich mit den *Musculi transversi perinei* verhielt, konnte wegen ihrer Verletzung nicht ausgemittelt werden.

Uterus. (Tab. III. Fig. 1. a.)

Der *Uterus* ist platt flaschenförmig, nicht nur nach seinen Flächen, sondern auch nach seinen Rändern gekrümmt. Seine vordere Fläche ist convexer, nicht die hintere, welche am Körper und besonders am Halse fast platt erscheint. Der abgerundete Grund ist wenig entwickelt. Die Grenze zwischen Körper (α.) und Hals (β.) ist undeutlich. Der Hals ist fast cylindrisch und zeigt eine nur sehr schwache, seinem unteren Ende näher liegende Anschwellung. Er nimmt im Ganzen vom Körper gegen sein unteres Ende an Dicke ab. Die Abnahme an Dicke geht besonders von der Anschwellung abwärts plötzlicher vor sich. Er ragt nicht in das Gewölbe der *Vagina* herab, hat somit keine *Portio vaginalis*. Die fehlenden *Labia uterina* sind gegen die *Vagina* durch einen ringförmigen Absatz substituirt, welcher der untere Rand einer glatten, 5 Mm. breiten, ringförmigen Stelle des unteren Endes der Höhle des Halses ist. Seine Länge beträgt ½ der *Uterus*-Länge, ist somit verhältnissmässig zum Grunde und Körper länger als der normaler Fälle. Die Höhle des Körpers erscheint als Dreieck mit nach innen gewölbten Rändern, ist also so wie bei den Jungfrauen, oder bei Frauen, die nicht geboren haben, beschaffen. Die Höhle des Halses nimmt gegen dessen unteres Ende an Weite ab. Das *Ostium uterinum externum* ist eine 4 Mm. breite Spalte und die engste Stelle der *Uterus*-Höhle, nicht das *Ostium uterinum internum*, welches nur undeutlich von der Körperhöhle geschieden und die weiteste Stelle des *Uterus*-Halses ist. Die Schleimhaut des Halses lässt ausgezeichnet entwickelte *Palmae plicatae* wahrnehmen, welche sich aber auch als drei, sehr starke, einfache, glatte, gegen ihr Ende breiter und flacher werdende Wülste durch die ganze Länge der Höhle des Körpers fortsetzen. Von den drei Wülsten liegt einer an

der vorderen, zwei an der hinteren Wand der Körperhöhle. Nur in dem oberen, linken Winkel der Körperhöhle ist eine ½ Mm. weite Oeffnung für die linke *Tuba Fallopiana* zu sehen.

Die Messungen des *Uterus* ergaben:

Länge:	überhaupt	8 Cent.	= 3″
«	des Körpers mit dem Grunde	4 Cent.	= 1″ 6‴
«	des Halses	4 Cent.	= 1″ 6‴
Breite:	zwischen den *Tubae*	4 Cent. 5 Mm.	= 1″ 8‴
«	am *Ostium uterinum internum*	2 Cent. 7 Mm.	= 1″
«	über der Halsanschwellung	2 Cent. 2 Mm.	= 10‴
«	an der Halsanschwellung	2 Cent. 4 Mm.	= —11‴
«	am unteren Halsende	1 Cent. 8 Mm.	= 8‴
Dicke:	am Grunde	1 Cent. 6 Mm.	= 7‴
«	am Körper	2 Cent. 4 Mm.	= —11‴
«	am *Ostium uterinum internum*	2 Cent.	= 9‴
«	über der Halsanschwellung	2 Cent. 2 Mm.	= 10‴
«	an der Halsanschwellung	2 Cent. 4 Mm.	= —11‴
«	am unteren Halsende	1 Cent. 1—2 Mm.	= 5-5½‴
Dicke der Wände:			
	am Grunde und Körper	1 Cent. 2 Mm.	= 5½‴
	am *Ostium uterinum internum* und darunter	9 Mm.	= 4‴
	an der Halsanschwellung	1 Cent. 1 Mm.	= 5‴
	am *Ostium uterinum externum*	bis 6 Mm.	= 2¾‴

Vagina. (Tab. II. Fig. 1. d. e.; Tab. III. b.)

Die *Vagina* ist ein von oben und vorn nach unten und hinten plattgedrückter Kanal, der sowohl nach den Flächen als Rändern gekrümmt verläuft, bis vor die *Symphysis ossium pubis* reicht, und daselbst hinter der Harnröhrenöffnung in den *Canalis urogenialis* mit einer Querspalte mündet. Ihr Beginnen am *Uterus*-Ende ist äusserlich fast nicht ausgesprochen, wohl aber innerlich. Von da bis zur *Prostata* ist sie so breit, wie das *Uterus*-Ende, wird unter der *Prostata* und abwärts vor derselben schmäler und ist an ihrem Ende am schmalsten. Ihre Wand, die an Dicke vom oberen Ende zum unteren allmählig abnimmt, ist dünner, als die des unteren *Uterus*-Endes. Was sie aber an Dicke der Wand verliert, gewinnt sie an Weite ihres Kanales. Die Schleimhaut zeigt an der unteren Hälfte ihrer Länge niedliche *Columnae rugarum* (*anterior* und *posterior*) (Tab. II. Fig. 2. β'. γ'.), die aber bei weitem nicht so entwickelt sind, wie die *Palmae plicatae* der Uterushöhle; an der oberen Hälfte, namentlich an der unteren hinteren Wand, zahlreiche Oeffnungen von Schleimdrüsen.

Die Messungen der *Vagina* ergaben:

Länge: überhaupt	8 Cent.	=	3″
« an dem Stücke bis zur *Prostata*	5 Cent. 5 Mm.	=	2″ $^3/_4$‴
« an dem Stücke unter der *Pars prostatica urethrae*	1 Cent. 5 Mm.	=	$6^3/_4$‴
« an dem Stücke vor der *Prostata*	1 Cent.	=	$4^1/_2$‴
Breite: an dem Stücke bis zur *Prostata*	1 Cent. 8 Mm.	bis 2 Cent. =	8 — 9‴
« an dem unter der *Urethra* gelagerten Stücke	1 Cent. 2 Mm.	=	$5^1/_2$‴
Dicke: an dem Stücke bis zur *Prostata*	6 — 7 Mm.	=	$3^1/_4$‴
« an dem Stücke unter der *Urethra*	3 — 4 Mm.	=	$1^2/_5$—2‴
Breite ihres abgeplatteten Kanales:			
an dem Stücke bis zur *Prostata*	1 Cent. 4 Mm.	=	$6^1/_3$‴
an dem Stücke unter der *Urethra*	9 Mm.	=	4‴
an seiner Mündung in den *Canalis urogenitalis*	8 Mm.	=	$3^3/_5$‴
Weite ihres cylinderförmig ausgedehnten Kanales:			
an dem Stücke bis zur *Prostata*	1 Cent. 6 Mm.	=	7‴
an dem Stücke unter der *Urethra*	1 Cent.	=	$4^1/_2$‴
an dem Stücke vor der *Prostata*	9 Mm.	=	4‴
an ihrer Mündung	8 Mm.	=	$3^3/_5$‴
Dicke ihrer Wände:			
am oberen Ende	3 Mm.	=	$1^2/_5$‴
an dem Stücke zwischen diesem und der *Prostata*	2 Mm.	=	1‴
an dem Stücke unter der *Urethra*	$1^1/_2$ Mm.	=	$^3/_4$‴

Ligamenta lata uteri. (Tab. III. Fig. c. c'.)

Das den *Uterus* überziehende *Peritoneum* bildet jederseits eine Duplicatur, die *Ligamenta lata.*

Das *Ligamentum latum uteri sinistrum* (c'.) enthält wie gewöhnlich zwischen seinen Blättern die *Tuba*, das *Ovarium* mit dem *Ligamentum ovarii*, das *Ligamentum rotundum* und das Rosenmüller'sche Organ (*Parovarium*). Sein oberer Theil, *Ala vespertilionis*, bildet mit dem entarteten *Ovarium* eine nach oben offene, lange, ziemlich weite und 2 — 3 Cent. tiefe Tasche.

Das *Ligamentum latum uteri dextrum* (c.) enthält von allem dem nichts. Aber 6 Cent. von seinem Abgange vom *Uterus* stülpt sich sein vorderes Blatt gleich unter seinem oberen Rande zu einem Kanal (ð.) von 1 Cent. Weite aus, von dem ich leider nur das Anfangsstück und das in der rechten Hodensackhälfte gelagerte Endstück unversehrt erhalten habe. Ich halte beide Stücke für Portionen des offen gebliebenen *Processus vaginalis peritonei.* An dem mir übersandten Präparate ist allerdings das die *Fossa iliaca dextra* auskleidende *Peritoneum* fast ganz von dem *Ligamentum latum* und zwar an der Stelle getrennt,

unter der die *Vasa spermatica interna etc.* des *Funiculus spermaticus* verlaufen. Passe ich aber die Schnittränder an einander, so kommt jener Strang, an dem der Hoden und Nebenhoden hängt, hinter das Anfangsstück des von der vorderen Platte des *Ligamentum latum sinistrum* ausgehenden Kanales zu liegen.

Tuba Fallopiana sinistra. (Tab. III. Fig. 1. d., Fig. 2. b.)

Die *Tuba Fallopiana sinistra* verhält sich normal. Sie beginnt mit einer ½ Mm. weiten inneren Mündung, *Ostium uterinum*, im oberen linken Winkel der Körperhöhle des *Uterus*, durchbohrt dessen Substanz, verläuft dann geschlängelt im oberen Rande des *Lig. lat.*, innen 1 Cent., aussen 2 Cent. über der Anheftung des *Ovarium* an dessen hintere Platte, und endiget mit einer 4 Mm. weiten äusseren Mündung, *Ostium abdominale* (Fig. 1. γ. Fig. 2. α.), in den Bauchfellsack. Sie ist durchaus durchgängig. Innen nach ihrem Austritte aus dem *Uterus* und besonders aussen neben dem *Ostium abdominale* ist sie bedeutend erweitert. Das *Ostium abdominale* ist mit vielen, strahlig auseinander fahrenden, bis 14 Mm. langen *Fimbriae* (Fig. 1. γ. Fig. 2. α.) umgeben, von diesen aber unbedeckt. Ihre Länge, ohne Rechnung des den *Uterus* durchbohrenden Stückes und bei nicht aufgelösten Windungen, beträgt 9½ — 10 Cent.

Medullarcarcinomatös entartetes *Ovarium sinistrum.* (Tab. III. Fig. 1. e.)

Das *Ovarium sinistrum* ist zu einem enormen *Carcinoma medullare* entartet. Obgleich ersteres im letzteren völlig untergegangen ist, so kann dennoch kein Zweifel obwalten, dass statt des *Carcinoma* früher ein *Ovarium* da war. Die Lage des *Carcinoma*, sein Verhalten zur *Tuba* und zum *Uterus*, seine Anheftung durch ein *Ligamentum* an den *Uterus* und die Art seiner Anheftung an die hintere Platte des *Lig. latum*, so wie die Verzweigung der *Vasa spermatica interna* sprechen für diese Behauptung.

Das entartete *Ovarium* hat die Gestalt eines eiförmigen Körpers, welcher in der *Excavatio peritonealis recto-uterina* hinter dem *Lig. latum uteri sinistrum*, hinter dem *Uterus* und hinter dem *Lig. lat. dextrum* in der Breite des *Uterus*, so wie über diese aufwärts hinaus quer gelagert ist. Dasselbe ist von vorn nach hinten comprimirt, zeigt eine vordere, platte, und eine hintere, convexe Fläche, ein abgerundetes äusseres, dickes und ein abgerundetes inneres schmäleres Ende, einen oberen und unteren convexen Rand. In querer Richtung misst es 20 Cent., in verticaler 15 Cent. und in der von vorn nach hinten 8 Cent. 5 Mm. Es wiegt 3 Pfd. 8 Unc. 1 Drchm. und 9 Gr. Oberflächlich fühlt es sich knorplig an und weiset an der convexen Fläche unter dem oberen Rande neben dem äusseren Ende eine beträchtliche Verknöcherung nach, im Innern ist es erweicht. Die microscopische Untersuchung weiset dasselbe aus Elementen bestehend nach, die das *Carcinoma medullare* characterisiren. Sein Umfang ist bis auf die Stelle seiner Anheftung an das *Lig. latum* völlig frei. Etwa von der Mitte der verticalen und von den äusseren ⅓ der transversalen Breite des *Lig. latum sinistrum* springt von dessen hinterer Platte eine schmale Duplicatur zum

Ovarium hinüber, um es einzuhüllen. Die Insertion dieser Bauchfellduplicatur an die vordere Fläche des *Ovarium* geht unter dem oberen Drittel der verticalen Höhe seiner kleineren, äusseren Hälfte vor sich. Die Stelle ist ein 9 Cent. langer, 12 Mm. breiter, nach oben concaver, bogenförmiger Streifen, durch den, namentlich im äusseren Theile, die Gefässe und Nerven des *Ovarium* treten; ist somit der *Hilus ovarii*. Vom inneren Ende dieser Stelle verläuft das 2 Cent. lange und von der hinteren Platte des *Lig. latum uteri* bedeckte *Ligamentum ovarii* (ɛ.) abwärts und vorwärts zur gewöhnlichen Stelle des *Uterus*. Es ist somit nur ein Streifen der vorderen Fläche der kleineren äusseren Hälfte des *Ovarium* an das *Lig. latum sinistrum* und den *Uterus* angeheftet, während der ganze übrige Umfang desselben in der *Excavatio peritonealis recto-uterina* und darüber hinaus frei liegt.

Die *Art. spermatica interna sinistra* entsteht von der vorderen Wand der *Aorta abdominalis* $1\frac{1}{2}$ Cent. unter der *Art. renalis sinistra*, 1 Cent. von der *Art. spermatica dextra* entfernt. Von ihren Zweigen im *Lig. latum* treten welche in das entartete *Ovarium* durch dessen *Hilus*. Aus demselben kommen zahlreiche und starke Zweige der *Vena spermatica interna sinistra*, die den *Plexus pampiniformis* bilden, der in einen Stamm übergeht, welcher in die *Vena renalis sinistra* mündet. Vom *Plexus nerv. spermaticus* konnten Zweige in dasselbe verfolgt werden. Die *Vasa spermatica interna* sammt dem *Plexus spermaticus* waren an ihrem unteren Stücke von kleineren Massen von *Carcinoma medullare* begleitet, an ihrem oberen Stücke in dasselbe ganz eingelagert.

Ligamentum uteri rotundum sinistrum. (Tab. III. Fig. 1. f.)

Das *Ligamentum uteri rotundum sinistrum* geht an der gewöhnlichen Stelle vom *Uterus* ab. Wie es endigte weiss ich nicht, da nur sein Anfangsstück unversehrt erhalten war, sein Endstück bereits abgeschnitten war.

Organon Rosenmülleri s. parovarium sinistrum. (Tab. III. Fig. 2. d.)

Dasselbe liegt etwa 2 Cent. medianwärts von dem äusseren Ende der *Tuba* zwischen den Platten des Fledermausflügels so, dass es seine Spitze gegen den *Hilus ovarii*, seine Basis gegen die *Tuba* kehrt. Seine geschlängelten und verknäuelten Blindkanäle strahlen wie gewöhnlich divergirend vom *Ovarium* gegen die *Tuba* aus. Ich konnte deren eine ganze Reihe isoliren. Durch ihre Aneinanderlagerung bilden sie einen dreieckigen oder rhomboidalen Körper, der von seiner Spitze am *Ovarium* zu seiner Basis unter der *Tuba* 2 Cent. 3 Mm. lang, an seiner Spitze 4 Mm., gegen seine Basis 1 Cent. 5 Mm. breit, und 1 — 2 Mm. dick ist.

Testis dexter, Epididymis, Vas deferens. (Tab. III. Fig. 1. g.)

Der rechte Hode ist sehr klein, seitlich beträchtlich comprimirt und von der mit einer *Tunica serosa* verwachsenen *Tunica albuginea* eingehüllt. Seine Gestalt ist breit nierenförmig. Sein Rücken ist nicht gerade, sondern nierenförmig ausgebuchtet. Seine

stumpfen Enden sind so breit, als seine Mitte; sie verlängern sich gegen den Rücken hornartig. Derselbe hat eine Länge von 2 Cent. 2 Mm., eine Breite von 1 Cent. 4 — 6 Mm., und eine Dicke von 8 Mm. Sein *Parenchym* erwies sich durch microscopische Untersuchung aus Samenkanälchen bestehend, deren *Lobuli* durch stärkere *Septula* als im normalen Hoden von einander getrennt sind. Die Samenkanälchen fand ich in ihren Durchmessern von $^1/_{50}$‴ bis $^1/_{12}$‴ variiren, sie waren somit kleiner als die des Hodens normaler Erwachsener. Sie sind blassgelb, mit einem Epithelium von rundlich polygonalen Zellen ausgekleidet, die gelbliche Fettkörnchen enthalten. Der Inhalt ist viel sparsamer als in normalen Hoden und besteht aus fein granulirten hellen Zellenkernen und nur hie und da aus Zellen.

Der Nebenhode (Tab. III. Fig. 1. h. h.) liegt nicht am Hoden, sein Schwanz ist nicht umgebogen. Mit dem Kopfe liegt er vor und über dem Hoden, mit dem übrigen Theile aber im Samenstrange. Der Kopf des Nebenhodens besteht aus 12 ungewöhnlich langen (bis 2 Cent. 5 Mm.) *Coni vasculosi*. Am Hoden sind sie zu einem Strange von etwa 3 Mm. zusammengedrängt, gegen den Nebenhoden strahlen sie fächerförmig so auseinander, dass die meisten neben einander und in einer dreieckigen Fläche, deren Basis am Nebenhoden 2 Cent. misst, ausgebreitet liegen. Der Nebenhode ist 11 Cent. lang, wovon auf den Kopf 2 Cent. kommen. Am Kopfe ist er 1 Cent., am Körper 5 — 6 Mm., am Schwanze stellenweis 3 — 6 Mm., unter dem Uebergange in das *Vas deferens* 2 Mm. breit. Am Kopfe ist er bis 3 Mm. dick.

Der Samenleiter (Tab. III. Fig. 1. i.) ist ein geschlängelter, $^1/_3$ — $^1/_2$ Mm. breiter Faden. Er konnte bestimmt nur in einer Länge von 1 Cent. 5 Mm. verfolgt werden, und zwar bis zur Stelle des Beginnes des *Processus vaginalis* nahe dem *Annulus inguinalis internus*, wo man das *Ligamentum latum dextrum* abschnitt. Ob er sich in demselben weiter erstreckt habe oder nicht, und wohin, weiss ich nicht. Nur in seinem Anfange schien er durchgängig zu sein.

Die *Art. spermatica interna dextra* entsprang von der *Aorta abdominalis* 2 Cent. 2 Mm. unter der *Art. renalis dextra* und konnte im Samenstrange bis in den Hoden verfolgt werden. Die *Vena spermatica interna dextra* kam aus dem Hoden, bildete den *Plexus pampiniformis* und mündete im Winkel der *Vena renalis dextra* in die *Vena cava inferior*. Beide legten einen Weg von 32 Cent. Länge zurück. Der *Plexus nerv. spermaticus* war auch nachweisbar.

Da der cylinderförmige, an seinem oberen Ende quer durchgeschnittene, als Endstück des *Processus vaginalis peritonei* gedeutete Sack, den ich in der rechten *Scrotal*-Hälfte vorfand, unverletzt ist, so kann der Hode von diesem Theile des *Processus* seinen serösen Ueberzug nicht erhalten haben. Er musste höher oben von diesem überkleidet werden. Die Entstehung der ausgeweiteten Verlängerung des *Processus vaginalis* abwärts von seiner Vereinigung mit dem Hoden, lässt sich durch ein wahrscheinlich gleichzeitig vorhanden gewesenes *Hydrocele*, also auf ähnliche Weise wie *Hydrocele* oder *Hernia processus vaginalis* bei *Monorchismus*, erklären. Der Hode mochte wohl nur vor dem *Annulus inguinalis externus*,

der Nebenhode im *Canalis inguinalis* gelagert gewesen sein. Ist es aber wahr, dass man aus der rechten *Scrotal*-Hälfte den Hoden herausgezogen habe, dann müsste der Hode und Nebenhode sammt seinem Ueberzuge von einem oberen Theile des *Processus vaginalis* in dessen unteres früher durch *Hydrocele abnorm* ausgeweitetes Stück hineingehangen haben, was auch möglich ist.

Urethra. (Tab. II. Fig. 2. 3. 4.)

Die *Urethra* ist ein $2\frac{1}{2}$ Cent. langer, und auf 6 — 8 Mm. Weite ausdehnbarer Kanal, der mit einer ovalen Querspalte (Fig. 2. β.) von 6 Mm. Breite in den *Canalis urogenitalis* über der Oeffnung der *Vagina* mündet. Sie liegt in gewöhnlicher Entfernung von der *Symphysis ossium pubis* auf dem Endtheile der *Vagina*. Ihr oberer hinterer Theil (Fig. 4. α.) ist in der Länge von 1 Cent. bis 1 Cent. 5 Mm. vorn und seitlich von der *Prostata* umgeben; ihr unterer vorderer Theil (Fig. 3. c., Fig. 4. β.) aber von einem ringförmigen Muskel unmittelbar bedeckt. Jener Theil entspricht der *Pars prostatica*, dieser der *Pars membranacea* der männlichen Harnröhre. Die untere hintere Wand der *Pars prostatica urethrae* kann von der oberen vorderen Wand der *Vagina* lospräparirt werden; die Wand der *Pars membranacea urethrae* aber scheint mit der oberen vorderen Wand des Endes der *Vagina* zu einer gemeinschaftlichen queren Scheidewand zwischen beiden verschmolzen zu sein, welche im *Canalis urogenitalis* zwischen der Ausmündung der *Urethra* und *Vagina* mit einem scharfen, halbmondförmig ausgeschnittenen Rande (Fig. 2.) endigt. Die Schleimhaut zeigt vier Längsfalten, besser Längswülste, welche von der Harnblase stammen und die ganze Länge der *Urethra* durchsetzen. Von diesen Falten oder Wülsten sitzt die eine an der oberen vorderen Wand, zwei seitlich und hinten (Fig. 4. β'. β'.) und die vierte in der Mitte der unteren hinteren Wand (Fig. 4. α'). In der *Pars prostatica* sind sie am stärksten, in der *Pars membranacea* werden sie allmälig schmäler und flacher. Der hintere Längswulst kann vielleicht als Andeutung des *Colliculus seminalis* betrachtet werden. Zwischen diesen Falten sind vier Längsfurchen zu sehen, wovon die beiden hinteren zwischen der hinteren und den seitlichen Falten die tiefsten sind. Bei der erweiterten *Urethra* verschwinden die vordere und seitlichen Falten, nicht aber die hintere. Die hintere Falte verliert sich an der Mündung der *Urethra* in den *Canalis urogenitalis*; die übrigen setzen sich in die Längsfalte der Schleimhaut des letzteren fort. Die Schleimhaut ist mit zahlreichen, meistens ganz kleinen, aber auch hie und da grösseren Löcherchen (Fig. 4. γ'γ'γ'γ'.) versehen. Diese stehen besonders in den genannten Furchen, namentlich in den hinteren, reihenweise hinter einander und sind theils Mündungen der Ausführungsgänge der *Prostata*-Drüsen, theils solche von Schleimdrüsen.

Prostata. (Tab. II. Fig. 1. d., Fig. 2. b., Fig. 3. c., Fig. 4. bb.; Tab. III. Fig. 1. m.)

Die *Prostata* stellt einen nicht vollständigen Ring dar, der an den hinteren $\frac{2}{9}$ seines Umkreises defect ist. Sie umgiebt vorn und seitlich den oberen hinteren Theil der *Urethra*,

sowie die Seitenränder der *Vagina*, auch schiebt sie sich eine Strecke zwischen die *Urethra* und *Vagina* hinein. Allein ihre Enden erreichen sich weder zwischen diesen, noch unter der *Vagina*, wo sie 12 Mm. von einander abstehen. Mit ihrem oberen 5 — 6 Mm. dicken Rande bildet sie vor dem Uebergange der Harnblase in die Harnröhre einen Absatz, nimmt nach abwärts und vorwärts allmälig an Dicke ab und endiget mit einem unteren vorderen zugeschärften Rande. Von einem Ende zum andern misst sie 4 Cent. 2 Mm., was $^7/_9$ des vollständigen Ringes ausmachen würde. Vorn in der Mitte ist sie von einem Rande zum andern 1 Cent., seitlich 1 Cent. 5 Mm. breit, so dass sie die hinteren oberen $^2/_5$ — $^3/_5$ der *Urethra* nach deren Länge umgiebt. Die Oeffnungen ihrer Ausführungsgänge (Tab. II. Fig. 4. γ' γ' γ' γ' γ'.) befinden sich reihenweise und vorzugsweise in den Furchen der unteren Wand der *Pars prostatica urethrae* zur Seite des mittleren als Spur des *Colliculus seminalis* gedeuteten Schleimhautwulstes, aber auch in den Furchen vor den seitlichen Schleimhautwülsten. Die microscopische Untersuchung wies Bestandtheile nach, die sich von denen der *Prostata* gewöhnlicher Fälle nicht unterschieden. Ihre traubenförmigen Drüsen waren sehr entwickelt. Sie ist wie gewöhnlich durch das *Lig. pubo-prostaticum medium* und die *Lig. pubo-prostatica lateralia* an den Schambogen befestigt.

Canalis urogenitalis. (Tab. I. e.; Tab. II. Fig. 1. b., Fig. 2. d.)

Der *Canalis urogenitalis* ist im schlaffen Zustande vorn von einer Seite zur andern, hinten von oben nach unten comprimirt. Im ausgedehnten Zustande stellt er aber ein an seinen beiden Enden trichterförmig erweitertes Rohr dar, das $^1/_2$ Cent. hinter der Hautöffnung am engsten ist. Die spaltförmige, 2 Cent. lange und bis 6 Mm. breite Hautöffnung (Tab. I. e.; Tab. II. Fig. 1. ε., Fig. 2. α.) kann einen Cylinder von 12 — 15 Mm., die engste Stelle einen von 7 — 8 Mm. und sein hinteres Ende einen von 10 — 12 Mm. Durchmesser fassen. Die Schleimhaut zeigt Längsfalten (Tab. II. Fig. 2. α'.), die besonders an der oberen Wand und an den Seitenwänden zahlreich sind und stark vorspringen. Sie setzen sich vorzugsweise in die Falten der *Urethra* fort. Seine Länge beträgt an der oberen Wand 3 Cent., an der unteren 2 Cent. Die Dicke seiner Wände misst $1^1/_2$ Mm. Derselbe liegt unter und zwischen der kleineren vorderen Hälfte der Länge der *Bulbi* des *Corpus cavernosum urethrae*. Derselbe entspricht dem von den *Bulbi* des *Corpus cavernosum urethrae* zwar bedeckten, aber davon doch nicht ganz eingehüllten Schleimhautkanale der *Pars bulbosa urethrae*.

Glandulae mammae.

Eine der mir überbrachten Milchdrüsen unterschied sich durch macroscopische und microscopische Untersuchung wohl nur durch ihre Kleinheit von der einer Jungfrau. Dieselbe hatte nämlich nur eine Breite von 9 Cent., eine Höhe von 7 Cent. und eine Dicke von 1 Cent. 2 Mm.

III. Vergleichung.

Bei einer Vergleichung unseres *Hermaphroditen* mit den anderen derartigen *Hermaphroditen* und mit anderen normal gebauten Individuen ergiebt sich Nachstehendes:

Unser *Hermaphrodit* erreichte nach Follin's Fall das höchste Lebensalter.

Statur, der Haarwuchs und Kehlkopf sind männlich; die Brüste sind weiblich; das Becken ist mehr weiblich, als männlich.

Die äusseren Geschlechtstheile sind die eines *Hypospadiaeus* complicirt mit Spaltung des *Scrotum*. Sie gleichen noch am meisten den Fällen von Follin und Meyer; unterscheiden sich aber sowohl von diesen als auch von allen bekannten seitlichen Zwittern dadurch, dass sie einen am meisten ausgesprochenen männlichen *Typus* an sich tragen. Namentlich ist das Geschlechtsglied ein ausgebildeter *Penis*, der nur wegen Versteckt sein seines grösseren Theiles zwischen dem *Mons Veneris* und den *Scrotal*-Hälften rudimentäres Auftreten vortäuscht. Gehörig isolirt erscheint er in einer Grösse, die der des *Penis* eines wohl gebildeten jungen Mannes nichts nachgiebt, während in den anderen Fällen seitlicher Zwitterbildung nur von einem Geschlechtsgliede von der Grösse einer *Clitoris* oder eines rudimentären *Penis* die Rede sein kann. Auch besteht derselbe ausser den beiden genügend entwickelten *Corpora cavernosa Penis* auch aus einem vollständigem *Corpus cavernosum urethrae*, welches von dem normaler Fälle vorzugsweise nur dadurch abweicht, dass es undurchbohrt und an seiner hinteren Hälfte in zwei *Bulbi* getheilt ist. Bei den anderen seitlichen Zwittern war das *Corpus cavernosum urethrae* nur auf dessen *Pars glandularis* reducirt. Dass die Spalte an der *Glans* und die von da zwischen zwei Leisten eines unter der *Pars penis* des *Corpus cavernosum urethrae* befindlichen Längswulstes in das *Orificium urogenitale* hinziehende Rinne den vorderen Theil der in einem früheren embryonalen Zustande gebliebenen männlichen *Urethra*, und zwar erstere die nicht geschlossene rudimentäre *Fossa navicularis*, letztere den nicht geschlossenen und der *Pars cavernosa propria* entsprechenden rudimentären Theil des Schleimhautkanales der männlichen *Urethra* darstellen, kann wohl nicht bezweifelt werden. Das *Orificium urogenitale* ist viel grösser als selbst das in dem Falle von Follin.

Der *Uterus* hat zwar eine von der des gewöhnlicher Fälle etwas verschiedene Gestalt; allein er gleicht an Grösse dem möglichst entwickelten *Uterus* einer Jungfrau, und übertrifft darin auch den des Falles von Follin. Er besteht wie die der anderen seitlichen Zwitter, die Fälle von Varole und Rudolphi ausgenommen, aus einem Körper und Halse. Das *Vaginal*-Ende des Halses hat aber die geringsten Durchmesser, ist nicht in die *Vagina* als *Portio vaginalis* eingeschoben und weiset keine *Labia* am Muttermunde, wie das im Falle von Berthold, auf. Seine Wände gehen zwar wie in Follin's Falle allmälig in die *Vagina* über, dennoch ist seine Höhle von dem Kanale der letzteren durch einen ringförmigen Absatz abgegrenzt, der den Eingang in das *Ostium uterinum externum* begrenzt,

welches die engste Stelle der ganzen *Uterus*-Höhle ist. An den Wänden der Höhle des Halses kommen, wie in den Fällen von Berthold, Follin und Meyer, *Palmae plicatae* vor, welche, wie in dem Falle von Meyer, an den Wänden der Körperhöhle sich fortsetzen.

Die *Vagina* ist um $^1/_7$ — $^1/_4$ kürzer und um $^1/_4$ — $^1/_2$ schmäler als die normaler Fälle. Dieselbe übertrifft Follin's Fall um $^1/_4$ ihrer Länge, ist somit wohl die grösste aller seitlicher Zwitter, die eine *Vagina* besassen. Ihre Schleimhaut zeigt *Columnae rugarum* wie in den Fällen von Berthold und Meyer. Sie mündet, wie in den Fällen von Berthold und Follin, in den *Canalis urogenitalis*. In Varole's Falle fehlte sie; in Rudolphi's Falle war sie ein abgeschlossener Kanal; in Sue's Falle öffnete sie sich nach aussen; in Meyer's Falle öffnete sie sich in die *Urethra* auf der Höhe des *Colliculus seminalis*; und in Berthold's Falle hatte sie an ihrem Ausgange ein *Hymen*.

Ligamenta lata uteri sind zwei zugegen, wie in den Fällen von Berthold und Meyer. Davon enthält das linke allein ein *Ovarium* mit dem *Ligamentum ovarii*, die *Tuba Fallopiana*, das *Ligamentum rotundum* und das Rosenmüllersche Organ, wie in den Fällen von Varole, Rudolphi und Berthold; nicht das rechte. Von dem rechten (seiner vorderen Platte) geht ein *Processus vaginalis peritonei* ab, welcher mit einem Hoden in Verbindung steht, wie es in Berthold's und Meyer's Fällen beobachtet wurde, aber bei letzterem Falle mit dem Unterschiede, dass vom linken *Ligamentum* dieser *Processus vaginalis* abgeschickt wurde. In Sue's Falle waren dieselben Organe ebenfalls einseitig zugegen, aber im rechten *Ligamentum latum*. Dasselbe wurde auch in Meyer's Falle wahrgenommen, aber es kam im linken *Ligamentum latum* noch eine zweite *Tuba Fallopiana* nebst einem zweiten Rosenmüller'schen Organe hinzu. In Follin's Falle waren im rechten *Ligamentum latum* auch die eben genannten Theile, aber ohne ein *Ovarium* vorhanden, im linken *Ligamentum latum* fand sich die *Tuba Fallopiana* allein ohne Rosenmüller'sches Organ.

Das *Ovarium* mit seinem *Ligamentum* ist einseitig und zwar links vorhanden, wie in den Fällen von Varole, Rudolphi und Berthold. In Sue's und Meyer's Fällen wurde es rechts vorgefunden. In Follin's Falle fehlte es beiderseitig, allein das *Ligamentum ovarii* war zugegen. Dasselbe war zu einem enormen *Carcinoma medullare*, von dem die carcinomatösen Ablagerungen an anderen Körperstellen ausgingen, entartet, was vom pathologischen Standpunkte aus betrachtet, merkwürdig ist.

Das Rosenmüller'che Organ (*Parovarium*) ist einseitig und links zugegen, wie in Berthold's Falle. In Follin's Falle wurde es rechts, in Meyer's Falle beiderseitig vorgefunden. Es weicht im Baue nicht von dem normaler Fälle ab.

Die *Tuba Fallopiana* kommt einseitig und links vor, wie in den Fällen von Varole, Rudolphi und Berthold. Rechts wurde sie in Varole's Falle, beiderseitig in Follin's und Meyer's Fällen gesehen. Dieselbe gleicht vollständig der normaler Fälle und mündet an gewöhnlicher Stelle in den *Uterus*. In Follin's Falle war die rechte in die *Uterus*-Höhle nicht durchgängig.

Das *Ligamentum rotundum* ist auch nur einseitig und links aufzufinden, wie in Va-

role's, Rudolphi's und Berthold's Fällen. Es mochte wie das normaler Fälle gebildet gewesen sein. Mit ihm schien sich das zu einem Kanale ausgedehnte *Ligamentum Nuckii* bis vor den *Annulus inguinalis externus* fortgesetzt zu haben, als was der seröse, aber abgeschlossene Sack am Ende des rechten *Ligamentum rotundum* in Follin's Falle vielleicht gedeutet werden könnte. In Sue's Falle wurde es rechts, in Follin's und Meyer's Fällen beiderseitig angetroffen.

Nur der rechte Hode ist nachweisbar, wie in den Fällen von Varole, Rudolphi und Berthold. In Sue's, Follin's und Meyer's Fällen war der linke zugegen. Derselbe liegt wie in den Fällen von Varole, Rudolphi, Berthold, Follin und Meyer ausserhalb der Bauchhöhle; und ist, wie in Berthold's und Meyer's Fällen mit dem *Processus vaginalis peritonei* im Zusammenhange. In Sue's Falle lag er in der Unterleibshöhle. In Follin's Falle befand er sich in einem serösen, geschlossenen Sacke (wohl = *Tunica vaginalis propria testis*). Er ist zwar klein, aber vollkommen gebildet und durch ausgezeichnet entwickelte *Coni vasculosi Halleri* mit einem Nebenhoden in Verbindung. Der Hode in Follin's Falle war verkümmert.

Der Nebenhode ist sehr entwickelt. Die Fälle von Sue, Varole, Rudolphi und Berthold hatten auch einen Nebenhoden. In den Fällen von Follin und Meyer fehlte derselbe.

Das *Vas deferens* konnte nur eine kurze Strecke verfolgt werden. Es mochte sich entweder zwischen den Platten des *Ligamentum latum* oder am *Uterus* verloren haben. In Follin's Falle wurde dasselbe ganz vermisst; in Rudolphi's Falle endigte es blind am *Uterus*-Halse; in Sue's Falle mündete es in den *Uterus*; in Varole's Falle öffnete es sich in eine *Vesica seminalis*, die durch einen Kanal mit dem *Uterus*, durch einen anderen mit der *Urethra* communicirte; nur in Berthold's Falle mündete es in den *Canalis urogenitalis*.

Die *Urethra* mündet vor oder über der Oeffnung der *Vagina* in den *Canalis urogenitalis*, wie in den Fällen von Berthold und Follin. Sie ist in ihrer hinteren Hälfte von einer *Prostata* bedeckt und besitzt an der Mitte ihrer unteren Seite eine starke Längsfalte mit Oeffnungen der Ausführungsgänge zur Seite, vielleicht die Andeutung eines *Colliculus seminalis*. In Meyer's Falle allein wurde ein *Colliculus seminalis* vorgefunden, der auf seiner Höhe zwei Oeffnungen zeigte, wovon eine in die *Vagina* führte, und zur Seite die Oeffnungen der Ausführungsgänge der *Prostata* hatte.

Die *Prostata* ist ziemlich gross, aber sie umgiebt nur vorn und seitlich, nicht unten und hinten, die *Urethra*. Ihre Enden bedecken die Seiten der *Vagina*. Nur noch in Meyer's Falle wurde eine *Prostata* beobachtet.

Der *Canalis urogenitalis* ist analog dem *Sinus urogenitalis* des Falles von Berthold und dem *Meatus urinarius* des Falles von Follin. Seine Schleimhautfalten setzen sich in die der *Urethra* fort. In Berthold's Falle mündete ausser der *Urethra* und der *Vagina* auch das rechte *Vas deferens* in denselben.

Die Milchdrüse ist kleiner als die einer Jungfrau von gleichem Alter. In Varole's

Falle waren die Brüste so gross wie die eines gleich alten Mädchens. In Follin's Falle waren sie etwas grösser als bei einem Manne.

Die *Glandulae Cowperi* fehlten wie in allen anderen Fällen.

Die *Vesicae seminales* fehlten wie in fünf anderen Fällen. In Varole's Falle aber war eine einfache vorgefunden worden.

IV. Diagnose.

In unserem *Hermaphroditen* waren von den männlichen Geschlechtstheilen zugegen: der rechte *Testis* mit der *Epididymis* und dem rudimentären *Vas deferens*; eine die *Urethra* grösstentheils umgebende, aber auch seitlich auf der *Vagina* lagernde *Prostata*; der *Canalis urogenitalis*, der sich vorn nicht zur *Urethra penis* geschlossen hat und die äusseren Geschlechtstheile mit Bildungshemmung, die *Hypospadiasis* complicirt mit Spaltung des *Scrotum* characterisirt. Von denselben fehlten: der linke *Testis* und seine Anhänge; die *Vesica seminalis*; der *Ductus ejaculatorius* und jede Spur einer Ausmündung des rudimentären *Vas deferens*.

Von den weiblichen Geschlechtstheilen waren zugegen: das linke *Ovarium* mit seinem *Ligamente*, die linke *Tuba Fallopiana*, das linke *Ligamentum uteri rotundum* und das linke Rosenmüller'sche Organ im linken *Ligamentum uteri lat.*; der *Uterus*, die *Vagina* und die Brüste. Von denselben fehlten: das rechte *Ovarium*, die rechte *Tuba Fallopiana* das rechte *Ligamentum uteri rotundum* und das rechte Rosenmüller'sche Organ im rechten *Ligamentum uteri latum*; die *Valvula vaginae* und die äusseren Geschlechtstheile.

Es waren somit Geschlechtstheile gemischten Characters zugegen. Weder die männlichen noch die weiblichen waren vollzählig; von den vorhandenen waren nur einige normal.

Die äusseren Geschlechtstheile waren missgebildete männliche, die inneren waren rechts männliche, links weibliche. Sie standen im *Canalis urogenitalis* mit einander in Verbindung.

Auf der männlichen Seite hat sich die Geschlechtsdrüse zum Hoden, auf der weiblichen zum *Ovarium* umgebildet. Auf der männlichen Seite hat sich der Wolff'sche Körper in die *Coni vasculosi* und mit dem oberen Theile des Wolff'schen Ausführungsganges in den Nebenhoden verwandelt. Der untere Theil des Wollff'schen Ausführungsganges entwickelte sich zum rudimentären *Vas deferens*, dem der grösste Theil seiner eigentlichen Portion mit der *Vesica seminalis* und dem *Ductus ejaculatorius* fehlt. Der Müller'sche Gang ging ganz verloren. Auf der weiblichen Seite ist der Wolff'sche Apparat bis auf das Rosenmüller'sche Organ oder den Nebeneierstock verschwunden. Der Müller'sche Gang hat sich zu seinen drei Abschnitten, d. i. zur *Tuba*, zum *Uterus* und zur *Vagina* metamorphosirt und gegliedert, welche von jenen normaler Fälle wenigstens im Wesentlichen nicht differiren.

Wenn man, wie R. Leuckart[1]) glaubt, daran denken könnte, den *Ductus ejaculatorius* der *Vagina*, das eigentliche *Vas deferens* dem *Uterus*, den *Canalis epididymitis* der *Tuba* zu parallelisiren; so würde in unserem Falle am männlichen Apparate ein der *Vagina* analoges Organ gänzlich fehlen, das dem *Uterus* analoge nur rudimentär vorkommen, d. i. die männliche Seite der weiblichen nachstehen.

Mit Rücksicht auf die Verschiedenartigkeit der Metamorphose der Geschlechtsdrüsen; der nur rechtseitigen Metamorphose des Wolff'schen Apparates und der nur linkseitigen Metamorphose des Müller'schen Fadens, ist unser Fall unter die wirklichen seitlichen *Hermaphroditen* zu zählen.

Aus dem Verhalten der äusseren Geschlechtstheile, des Kehlkopfs u. s. w., die männlich sind; aus dem Verhalten der inneren Geschlechtstheile, die auf der weiblichen Seite sehr entwickelt, auf der männlichen Seite theilweise unentwickelt vorkommen; aus dem Verhalten der Brüste, die weiblich sind; aus dem Verhalten des Beckens, das mehr weiblich als männlich ist; endlich aus dem Verhalten der *Urethra*, die weiblich wäre, wenn sie nicht an ihrer hinteren Hälfte oder an ihren hinteren zwei Fünfteln von einer *Prostata* umgeben sein würde, die, obgleich männlich, dennoch einen *Colliculus seminalis*, der wie in Meyer's Falle von der Ausmündung der *Vagina* (*Aditus vaginae*) oder dem Eingange in den Weber'schen Apparat durchbohrt wäre, nicht besitzt: geht hervor, dass in unserem seitlichen *Hermaphroditen* weder ein nur modificirter männlicher *Typus*, wie z. B. in Meyer's Falle, noch ein nur modificirter weiblicher *Typus*, wie z. B. in Berthold's Falle, sondern beide *Typi* ausgeprägt sind, die es unentschieden lassen, welcher von beiden der vorherrschende ist.

[1]) Das Weber'sche Organ und seine Metamorphosen. — Illustr. med. Ztg. Bd. I. H. 2. München 1852. p. 94. Note.

Erklärung der Abbildungen.

Tab. I.

a. Mons Veneris.
b. Penis.
c. c. Scrotalhälften.
d. Längswulst der Haut zwischen der Glans penis und dem Orificium urogenitale.
e. Orificium urogenitale.
f. Raphe scroti.
f'. Raphe perinei.
g. Anus.
α. Glans penis.
β. Praeputium.
γ. Spalte der Glans.
δ. Rinne des Längswulstes.

Tab. II.

Fig. 1.

A. Vordere Beckenwand und Symphysis ossium pubis.
a. Penis.
b. Canalis urogenitalis.
c. Längswulst zwischen der Glans penis und dem Canalis urogenitalis.
d. Prostata.
e. Vagina.
f. Harnblasenstück.
g. Musculus ischio-cavernosus.
h. h. Musculus bulbo-cavernosus.
α. Ligamentum suspensorium penis.
β. Corpora cavernosa penis.
γ. Corpus cavernosum urethrae.
δ. Ligamentum zwischen den Corpora cavernosa penis und dem Corpus cavernosum urethrae.
ε. Orificium urogenitale.
α'. Glans (Pars glandularis) } corp. cavern. urethrae.
β'. Pars penis } corp. cavern. urethrae.
γ'. Bulbus dexter (Pars bulbosa) } corp. cavern. urethrae.

Fig. 2.

a. Bulbus dexter corp. cavern. urethrae.
b. Prostata.
c. Harnblasenstück.
d. Canalis urogenitalis (seitlich aufgeschnitten).
e. Vagina (seitlich hinten aufgeschnitten).
α. Orificium urogenitale.
β. Orificium urethrae.
α'. Schleimhautlängsfalten des Canalis urogenitalis.
β'. Columna rugarum anterior vaginae.
γ'. Columna rugarum posterior vaginae (durchgeschnitten).

Fig. 3.

Urethra und Prostata.
(Vordere obere Seite.)

a. Harnblasenstück.
b. Prostata.
c. Pars membranacea urethrae.

Fig. 4.

Dieselben Theile.
(In der Mitte der oberen vorderen Seite aufgeschnitten.)

a. Urethra.
b. b. Prostata.
α. Pars prostatica urethrae.
β. Pars membranacea urethrae.
α'. Mittlerer Schleimhaut-Wulst der unteren Wand der Urethra (rudimentärer Colliculus seminalis?)
β'. β'. Seitliche Schleimhaut-Wülste.
γ'. γ'. γ'. γ'. Oeffnungen der Ausführungsgänge der Prostata und der Schleimdrüsen in den Furchen zwischen den Schleimhaut-Wülsten.

Tab. III.

Fig. 1.

Innere Geschlechtstheile.
(Ansicht von vorn.)

a. Uterus.
b. Vagina.
c. Ligamentum uteri latum dextrum.
d. Ligamentum uteri latum sinistrum.
d. Tuba Fallopiana sinistra.
e. Ovarium sinistrum (medullar-carcinomatös entartet).
f. Ligamentum uteri rotundum sinistrum.
g. Testis.
h. h. Epididymis.
i. Vas deferens.
k. Funiculus spermaticus.
l. Harnblasenstück.
m. Prostata.
α. Uterus-Körper.
β. Uterus-Hals.
γ. Ostium abdominale der Tuba Fallopiana sinistra mit den Fimbriae.
δ. Eingang in den rechten Processus vaginalis peritonei.

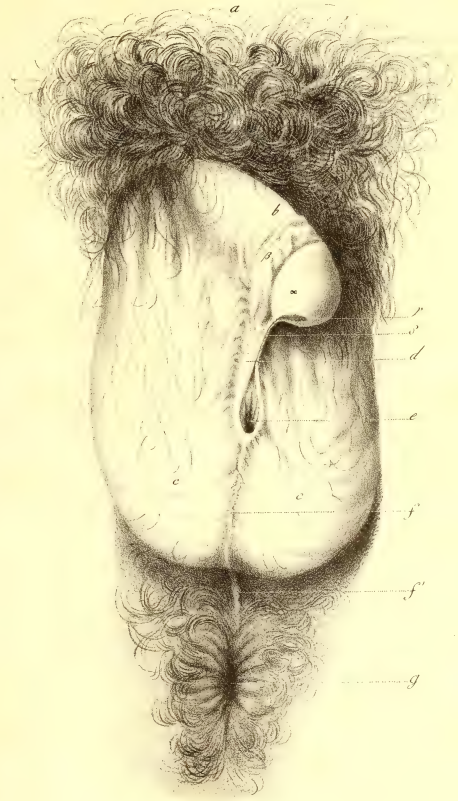
Fig. 2.

Theile im Ligamentum uteri latum sinistrum.
(Ansicht von hinten.)

a. Medullar-carcinomatös entartetes Ovarium sinistrum.
b. Tuba Fallopiana sinistra.
c. Uterus-Theil.
d. Organon Rosenmülleri (Parovarium).
α. Ostium abdominale der Tuba Fallopiana sinistra.
β. β. β. Zurückgeschlagene Lappen der hinteren Platte der Ala vespertilionis des Ligamentum uteri latum sinistrum.

Mém. de l'Acad. Imp. des sc. VIIe Ser.

Gruber. Seitlicher Hermaphrodit.



ad nat. del. Hoppner

Lith. v. C. Satory

Fig. I.

Fig. 2.

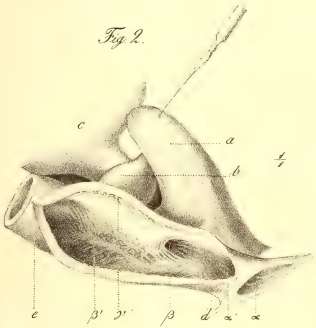


Fig. 3.

Fig. 4.

ad nat. del. Heppner

Lith. J. A. Satory.

Fig. 1.

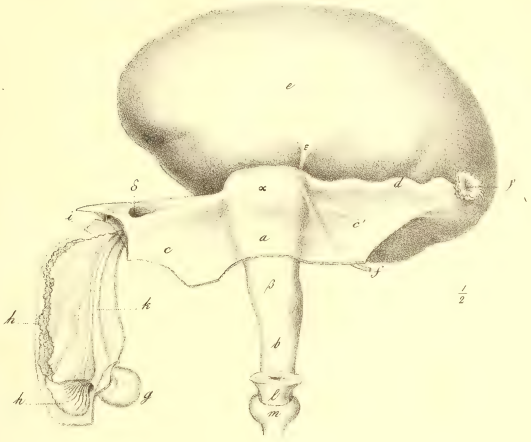


Fig. 2.

ad nat. del. Heppner. Lith. J. A. Satory.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 14.

SUR

L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE

À L'AIDE

DE LAQUELLE ON DÉTERMINE LES OSCILLATIONS TRÈS-PETITES D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS.

PAR

J. Somof,
Membre correspondant de l'Académie.

Présenté le 24 juin 1859.

ST.-PÉTERSBOURG, 1859.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg	à Riga	à Leipzig
MM. Eggers et Comp.,	M. Samuel Schmidt,	M. Léopold Voss.

Prix: 25 Kop. arg. = 8 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Octobre 1859.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

SUR

L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE

À L'AIDE

DE LAQUELLE ON DÉTERMINE LES OSCILLATIONS TRÈS-PETITES D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS.

Par **J. Somof.**

1) L'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants, qui déterminent les oscillations très-petites d'un système de points matériels, dépend de la résolution d'une équation algébrique d'un degré égal au nombre des variables principales, qu'il faut exprimer en fonctions du temps. Cette équation se présente aussi sous une forme particulière dans la théorie des inégalités séculaires et dans plusieurs autres questions de mécanique et de géométrie. Elle jouit essentiellement de la propriété, qu'elle a toutes ses racines réelles, proposition qui a été demontrée par: Lagrange [1]), Laplace [2]), Sturm [3]), Cauchy [4]), Jacobi [5]), M. Borchardt [6]) et M. Sylvester [7]). Lagrange et Laplace ont prouvé de plus que les intégrales générales des équations du mouvement ne doivent pas contenir le temps hors du signe *sin*, et conclurent de là que l'équation dont il s'agit ne peut avoir de racines égales. Sturm a annoncé qu'il a trouvé aussi une démonstration de cette seconde propriété de l'équation. Cauchy admet l'existence des racines égales, mais ne prouve pas que cette circonstance se présente réellement.

Dans le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je montre par des exemples que l'équation dont il s'agit peut avoir des racines égales, mais que cela n'entraîne nullement la nécessité, que le temps soit hors des signes *sin* ou *cos* dans les intégrales générales des équations du mouvement. Je donne ensuite une démonstration de la réalité des racines de l'équation, considérée dans toute sa généralité. Enfin je

1) Mécanique Analytique, T. I, 2e édit., page 347.
2) Mécanique Céleste, T. I.
3) Bulletin des sciences mathématiques, de Ferussac, T. XII. Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, présenté à l'Académie des sciences le 27 juillet 1829.
4) Exercices de mathématiques, T. IV.
5) Journal de Crelle, T. XXX.
6) Journal de Liouville, T. XII.
7) Philos. Mag. 1852, 1853.

fais voir, comment on doit former les intégrales générales des équations du mouvement dans le cas des racines égales, et pourquoi le temps ne se trouve pas hors des signes *sin* et *cos*.

2) Supposons qu'il s'agisse d'intégrer les équations

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + ax + by = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + bx + cy = 0 \end{cases}$$

qui se rapportent, si l'on veut, au mouvement dans un plan d'un point, dont les coordonnées rectangulaires sont x, y; t désigne le temps et a, b, c des constantes, dont deux a et c sont positives.

On peut satisfaire à ces équations par des intégrales particulières de la forme

$$x = A \sin(\rho t), \quad y = B \sin(\rho t),$$

ou

$$x = A \cos(\rho t), \quad y = B \cos(\rho t),$$

en prenant pour A, B, ρ des constantes assujetties aux conditions

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} (a - \rho^2) A + bB = 0 \\ bA + (c - \rho^2) B = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination de A et B on aura, pour déterminer ρ^2, l'équation du second degré

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \rho^4 - (a + c)\rho^2 + ac - b^2 = 0,$$

dont les racines, toujours réelles, seront positives si l'on a

$$ac - b^2 > 0,$$

et qui deviennent égales quand $b = 0$ et $a = c$; cette dernière hypothèse réduit les équations (1) à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0,$$

dont les intégrales générales seront évidemment

$$x = A \sin(t\sqrt{a}) + A' \cos(t\sqrt{a})$$

$$y = B \sin(t\sqrt{a}) + B' \cos(t\sqrt{a})$$

A, B, A', B' étant des constantes arbitraires. Par conséquent l'égalité des racines de l'équation (3) ne fait pas sortir le temps t hors des signes *sin* et *cos* dans les intégrales générales.

3) Soit encore un système d'équations différentielles:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax + by + bz = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + bx + ay + bz = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + bx + by + az = 0,$$

où a et b représentent des constantes assujetties aux conditions $a - b > 0$, $a + 2b > 0$. Pour satisfaire à ces équations par des valeurs de la forme

$$x = A\sin(\varrho t), \quad y = B\sin(\varrho t), \quad z = C\sin(\varrho t)$$

ou

$$x = A\cos(\varrho t), \quad y = B\cos(\varrho t), \quad z = C\cos(\varrho t),$$

il faut déterminer les constantes A, B, C, ϱ au moyen des équations

$$\left.\begin{aligned}(a-\varrho^2)A + bB + bC &= 0\\ bA + (a-\varrho^2)B + bC &= 0\\ bA + bB + (a-\varrho^2)C &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

En éliminant A, B, C, on trouve l'équation du 3e degré par rapport à ϱ^2:

$$(a-\varrho^2)\left[(a-\varrho^2)^2 - b^2\right] + 2b\left[b^2 - b(a-\varrho^2)\right] = 0,$$

qu'on peut facilement mettre sous la forme

$$(a-\varrho^2-b)^2(a-\varrho^2+2b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Cette équation a évidemment deux racines ϱ^2 égales à $a-b$ et une racine égale à $a+2b$.

Pour $\varrho^2 = a-b$, les équations (4) se réduisent à une seule

$$A + B + C = 0;$$

par conséquent on peut prendre pour deux constantes A et B des valeurs arbitraires; cela posé on aura $C = -(A+B)$ et les intégrales particulières qui répondent à la racine $\varrho^2 = a-b$ seront:

$$A\sin(t\sqrt{a-b}), \quad B\sin(t\sqrt{a-b}), \quad -(A+B)\sin(t\sqrt{a-b})$$
$$A'\cos(t\sqrt{a-b}), \quad B'\cos(t\sqrt{a-b}), \quad -(A'+B')\cos(t\sqrt{a-b})$$

A', B' étant des constantes arbitraires, distinctes de A et B.

Les intégrales qui répondent à la racine $\varrho^2 = a+2b$ seront:

$$A_1\sin(t\sqrt{a+2b}), \quad A_1\sin(t\sqrt{a+2b}), \quad A_1\sin(t\sqrt{a+2b})$$
$$A_1'\cos(t\sqrt{a+2b}), \quad A_1'\cos(t\sqrt{a+2b}), \quad A_1'\cos(t\sqrt{a+2b})$$

A_1, A_1' étant des constantes arbitraires.

*

Enfin, les intégrales générales prendront la forme

$$x = A\sin(t\sqrt{a} - b) + A'\cos(t\sqrt{a} - b) + A_1\sin(t\sqrt{a} + 2b) + A_1'\cos(t\sqrt{a} + 2b)$$
$$y = B\sin(t\sqrt{a} - b) + B'\cos(t\sqrt{a} - b) + A'\sin(t\sqrt{a} + 2b) + A_1'\cos(t\sqrt{a} + 2b)$$
$$z = -(A + B)\sin(t\sqrt{a-b}) - (A' + B')\cos(t\sqrt{a-b}) + A_1\sin(t\sqrt{a} + 2\sqrt{b}) + A_1'\cos(t\sqrt{a} + 2\sqrt{b}).$$

Elles ne contiennent pas le temps t hors des signes *sin* et *cos*, et cependant l'équation (5) a des racines égales.

4) Nous passerons maintenant aux équations générales des oscillations très-petites d'un système de points matériels, que nous désignerons par m_1, m_2..... Soient respectivement

$$(x_1, y_1, z_1) \quad (x_2, y_2, z_2) \ldots\ldots$$

les coordonnées rectangulaires de ces points à l'instant t,

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]$$

la somme des forces vives et

$$U = f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots)$$

la fonction des forces ou le potentiel, et supposons que les liaisons du système, si de telles existent, ne contiennent pas le temps t explicitement. On pourra alors, au moyen de ces liaisons, exprimer les coordonnées: x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2.... en fonction de plusieurs variables indépendantes, que nous désignerons par: $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, et dont le nombre n ne peut être moindre.

Supposons encore que les forces qui sollicitent le système étaient primitivement en équilibre, et que

$$x_i^o,\ y_i^o,\ z_i^o,\ \xi_1^o,\ \xi_2^o \ldots \xi_n^o$$

sont les valeurs des variables

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n,$$

qui répondent à cet état.

Faisant

$$\xi_1 = \xi_1^o + q_1,\ \xi_2 = \xi_2^o + q_2 \ldots \xi_n = \xi_n^o + q_n,$$

on peut considérer: $q_1, q_2 \ldots q_n$ comme de nouvelles variables indépendantes qui tiennent lieu des variables $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$.

Si le système, étant en mouvement, oscille en s'écartant très-peu de la positition d'équilibre, on pourra négliger les carrés et les produits des valeurs $q_1, q_2 \ldots q_n$. Les coordonnées x_i, y_i, z_i deviendront alors des fonctions linéaires de $q_1, q_2 \ldots q_n$ que nous représenterons par

$$x_i = x_i^o + \alpha_{i,1}q_1 + \alpha_{i,2}q_2 + \ldots + \alpha_{i,n}q_n$$
$$y_i = y_i^o + \beta_{i,1}q_1 + \beta_{i,1}q_1 + \ldots + \beta_{i,n}q_n$$
$$z_i = z_i^o + \gamma_{i,1}q_1 + \gamma_{i,2}q_2 + \ldots + \gamma_{i,n}q_n$$

où $\alpha_{i,r}$, $\beta_{i,r}$, $\gamma_{i,r}$ désignent des constantes.

On aura ensuite

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_{i,1} q'_1 + \alpha_{i,2} q'_2 + \ldots . \alpha_{i,n} q'_n$$
$$\frac{dy_i}{dt} = \beta_{i,1} q'_1 + \beta_{i,2} q'_2 + \ldots . \beta_{i,n} q'_n$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \gamma_{i,1} q'_1 + \gamma_{i,2} q'_2 + \ldots . \gamma_{i,n} q'_n$$

ce qui transforme la force vive

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right]$$

en une fonction homogène du second degré par rapport à $q'_1, q'_2 \ldots . q'_n$, et que nous représenterons par

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma a_{r,s} q'_r q'_s,$$

la somme Σ se rapportant aux indices: $r = 1, 2, 3 \ldots . n$, $s = 1, 2, 3 \ldots . n$, et de plus

$$a_{r,s} = a_{s,r} = \Sigma m_i (\alpha_{i,r} \alpha_{i,s} + \beta_{i,r} \beta_{i,s} + \gamma_{i,r} \gamma_{i,s}).$$

Si l'on considère $q'_1, q'_2 \ldots . q'_n$ comme des variables indépendantes, il est facile de voir que la fonction $T = \frac{1}{2} \Sigma a_{r,s} q'_r q'_s$, ne peut s'évanouir que pour $q'_1 = 0, q'_2 = 0 \ldots . q'_n = 0$, car, supposant $T = 0$ pour un système de valeurs $q'_1, q'_2 \ldots . q'_n$ distinctes de zéro, on aura en même temps: $\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = 0, \left(\frac{dy_i}{dt}\right) = 0, \left(\frac{dz_i}{dt}\right) = 0$, c.-à-d.

$$\alpha_{i,1} q'_1 + \alpha_{i,2} q'_2 + \ldots . \alpha_{i,n} q'_n = 0$$
$$\beta_{i,1} q'_1 + \beta_{i,2} q'_2 + \ldots . \beta_{i,n} q'_n = 0$$
$$\gamma_{i,1} q'_1 + \gamma_{i,2} q'_2 + \ldots . \gamma_{i,n} q'_n = 0$$

pour tous les indices i. Cela exige, comme l'on sait, que les déterminants du degré n, formés des termes de n lignes prises arbitrairement dans le groupe

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1}, \ \alpha_{1,2} \ldots . \alpha_{1,n} \\ \beta_{1,1}, \ \beta_{1,2} \ldots . \beta_{1,n} \\ \gamma_{1,1}, \ \gamma_{1,2} \ldots . \gamma_{1,n} \\ \alpha_{2,1}, \ \alpha_{2,2} \ldots . \alpha_{2,n} \\ \ldots \ldots \ldots \end{array}$$

soient égaux à zéro; mais alors, si l'on prend n équations arbitraires dans le groupe

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1^{\,o} + \alpha_{1,1} q_1 + \ldots . \alpha_{1,n} q_n \\ y_1 = y_1^{\,o} + \beta_{1,1} q_1 + \ldots . \beta_{1,n} q_n \\ z_1 = z_1^{\,o} + \gamma_{1,1} q_1 + \ldots . \gamma_{1,n} q_n \\ x_2 = x_2^{\,o} + \alpha_{2,1} q_1 + \ldots . \alpha_{2,n} q_n \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}$$

on pourra éliminer toutes les valeurs: $q_1, q_2 \ldots q_n$, et déduire ainsi de ces équations une seule linéaire, qui ne contiendra pas plus de n variables du nombre des

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 \ldots;$$

au moyen de ces relations on pourrait exprimer toutes les coordonnées en fonctions des variables indépendantes, dont le nombre serait moindre que n, ce qui est contre l'hypothèse admise plus haut.

Ainsi, la fonction T doit avoir une valeur distincte de zéro et positive pour toutes les valeurs réelles de $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ qui ne s'évanouissent pas toutes à la fois. Cela exige la condition, que le discriminant, c.-à-d. le déterminant

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2} \ldots a_{n,n} \end{cases}$$

et tous les déterminants mineurs principaux, composés des éléments qui restent dans cette table, après que l'on aura effacé plusieurs lignes et autant de colonnes des mêmes rangs, soient distincts de zéro et positifs*). En effet, désignant par R le déterminant (6), et en général par

$$\begin{pmatrix} r, & s, & u \ldots \\ i, & k, & m \ldots \end{pmatrix}$$

le déterminant composé des éléments qui restent dans la table (6), après que l'on aura effacé les lignes des rangs: $r, s, u \ldots$ et les colonnes des rangs $i, k, m \ldots$, ou, ce qui revient au même, la dérivée

$$\frac{d^p R}{da_{r,i}\, da_{s,k}\, da_{u,m} \ldots},$$

p étant le nombre des lignes ou des colonnes suprimées, on aura les identités:

$$\begin{array}{l} \binom{r}{1} a_{1,1} + \binom{r}{2} a_{1,2} + \ldots \binom{r}{n} a_{1,n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{r}{1} a_{r,1} + \binom{r}{2} a_{r,2} + \ldots \binom{r}{n} a_{r,n} = R \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{r}{1} a_{n,1} + \binom{r}{2} a_{n,2} + \ldots \binom{r}{n} a_{n,n} = 0, \end{array}$$

desquelles, en les multipliant respectivement par $\binom{r}{1}, \binom{r}{2} \ldots \binom{r}{n}$, et prenant la somme, on tire

$$\Sigma a_{i,k} \binom{r}{i} \binom{r}{k} = R . \binom{r}{r}.$$

*) Cauchy: Leçons de calcul différentiel.

Cette valeur est nécessairement positive, parce qu'elle n'est autre chose que la fonction $2T$, dans laquelle $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ sont respectivement remplacés par $\binom{r}{1}, \binom{r}{2} \ldots \binom{r}{n}$. Les valeurs R et $\binom{r}{r}$ sont donc de mêmes signes.

La valeur $\binom{r}{r}$ étant par rapport à $\binom{r\,s}{r\,s}$ ce qui R est par rapport à $\binom{r}{r}$, les valeurs: $\binom{r}{r}, \binom{r\,s}{r\,s}$ sont aussi de mêmes signes, et ainsi de suite; par conséquent tous les déterminants:

$$R,\ \binom{r}{r},\ \binom{r\,s}{r\,s},\ \binom{r\,s\,u}{r\,s\,u}, \ldots$$

auront les même signe que

$$\binom{1\,2\ldots r-1,\ r+1\ldots n}{1\,2\ldots r-1,\ r+1\ldots n} = a_{r,r}.$$

Or, cette valeur est nécessairement positive, car la valeur $\frac{1}{2}a_{r,r}q'^{\,2}_r$ à laquelle se réduit la fonction T quand on pose $q'_1 = 0,\ q'_2 = 0 \ldots q'_{r-1} = 0,\ q'_{r+1} = 0 \ldots q'_n = 0$, doit être positive.

Aucun des déterminants

$$R,\ \binom{r}{r},\ \binom{r\,s}{r\,s} \ldots a_{r,r}$$

ne peut être nul, parce que, dans le cas contraire, on aurait un système de valeurs: $q'_1, q'_2 \ldots q'_n$ distinctes de zéro, qui satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dq'_1} &= a_{1,1}q'_1 + a_{1,2}q'_2 + \ldots a_{1,n}q'_n = 0\\
\frac{dT}{dq'_2} &= a'_{2,1}q'_1 + a_{2,2}q'_2 + \ldots a_{2,n}q'_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dT}{dq'_n} &= a_{n,1}q'_1 + a_{n,2}q'_2 + \ldots a_{n,n}q'_n = 0,
\end{aligned}$$

et qui donne par conséquent pour T une valeur *minimum* $T = 0$, ce qui est impossible.

Soit maintenant

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$$

la fonction des forces U développée suivant les puissances de $q_1, q_2 \ldots q_n$.

Le premier terme U_0 sera la valeur de U pour $q_1 = 0,\ q_2 = 0 \ldots q_n = 0$, c.-à-d. celle qui répond à l'état de l'équilibre.

Le second nombre n'est autre chose que

$$\frac{dU_0}{d\xi_1^{\,0}}q_1 + \frac{dU_0}{d\xi_2^{\,0}}q_2 + \ldots \frac{dU_0}{d\xi_n^{\,0}}q_n;$$

or, les conditions de l'équilibre donnent

$$\frac{dU_0}{d\xi_1^{\,0}} = 0,\ \frac{dU_0}{d\xi_2^{\,0}} = 0 \ldots \frac{dU_0}{d\xi_n^{\,0}} = 0;$$

par conséquent $U_1 = 0$.

Le troisième terme U_2 est évidemment une fonction homogène, que nous désignerons par

$$U_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma b_{r,s} q_r q_s,$$

et l'on a $b_{r,s} = b_{s,r}$.

Cela posé, les équations générales de la Dynamique donnent:

$$\frac{d\left(\frac{dT}{dq'_r}\right)}{dt} - \frac{dT}{dq_r} = \frac{dV}{dq_r}$$

pour $r = 1, 2 \ldots n$, c.-à-d.

$$(7) \ldots \ldots \begin{cases} a_{1,1}\frac{d^2q_1}{dt^2} + a_{1,2}\frac{d^2q_2}{dt^2} + \ldots a_{1,n}\frac{d^2q_n}{dt^2} = b_{1,1}q_1 + b_{1,2}q_2 + \ldots b_{1,n}q_n \\ a_{2,1}\frac{d^2q_1}{dt^2} + a_{2,2}\frac{d^2q_2}{dt^2} + \ldots a_{2,n}\frac{d^2q_n}{dt^2} = b_{2,1}q_1 + b_{2,2}q_2 + \ldots b_{2,n}q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\frac{d^2q_1}{dt^2} + a_{n,2}\frac{d^2q_2}{dt^2} + \ldots a_{n,n}\frac{d^2q_n}{dt^2} = b_{n,1}q_1 + b_{n,2}q_2 + \ldots b_{n,n}q_n \end{cases}$$

On a ainsi n équations linéaires du second ordre, qu'il faut intégrer pour déterminer $q_1, q_2 \ldots q_n$ en fonction du temps.

5) On satisfait aux équations (7) en posant

$$q_1 = h_1 \sin(\varrho t),\ q_2 = h_2 \sin(\varrho t) \ldots q_n = h_n \sin(\varrho t)$$

ou

$$q_1 = h_1 \cos(\varrho t),\ q_2 = h_2 \cos(\varrho t) \ldots q_n = h_n \cos(\varrho t),$$

$h_1, h_2 \ldots h_n$, ϱ, étant des constantes assujetties aux conditions:

$$\begin{aligned} &(a_{1,1}\varrho^2 + b_{1,1})h_1 + (a_{1,2}\varrho^2 + b_{1,2})h_2 + \ldots + (a_{1,n}\varrho^2 + b_{1,n})h_n = 0 \\ &(a_{2,1}\varrho^2 + b_{2,1})h_1 + (a_{2,2}\varrho^2 + b_{2,2})h_2 + \ldots + (a_{2,n}\varrho^2 + b_{2,n})h_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(a_{n,1}\varrho^2 + b_{n,1})h_1 + (a_{n,2}\varrho^2 + b_{n,2})h_2 + \ldots + (a_{n,n}\varrho^2 + b_{n,n})h_n = 0, \end{aligned}$$

que nous représenterons par

$$(8) \ldots \ldots \begin{cases} u_{1,1}h_1 + u_{1,2}h_2 + \ldots u_{1,n}h_n = 0 \\ u_{2,1}h_1 + u_{2,2}h_2 + \ldots u_{2,n}h_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1}h_1 + u_{n,2}h_2 + \ldots u_{n,n}h_n = 0 \end{cases}$$

en faisant $a_{r,s}\varrho^2 + b_{r,s} = u_{r,s}$.

Si l'on élimine les valeurs: h_1, $h_2 \ldots h_n$, on trouve une équation $D = 0$ du degré n par rapport à ρ^2, dont le premier membre n'est autre chose que le déterminant

$$\left.\begin{matrix} u_{1,1}\ u_{1,2} \ldots u_{1,n} \\ u_{2,1}\ u_{2,2} \ldots u_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1}\ u_{n,2} \ldots u_{n,n} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Ce déterminant est symétrique parce qu'on a

$$u_{r,s} = a_{r,s}\rho^2 + b_{r,s} = a_{s,r}\rho^2 + b_{s,r} = u_{s,r}.$$

Dans le cas de $a_{r,s} = 0$ pour tous les indices r et s inégaux et $a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = a_{n,n}$, l'équation $D = 0$ prend la forme de celle qui se présente dans la théorie des inégalités séculaires.

6) Désignant, comme nous l'avons déjà fait au n° 4 par $\binom{r,\ s,\ u,\ldots}{i,\ k,\ m,\ldots}$ le déterminant mineur de (9) composé des éléments qui restent dans cette table après que l'on aura effacé les lignes des rangs: r, s, $\ldots u$ et les colonnes des rangs i, k, $m \ldots$, on aura en premier lieu les identités

$$\left.\begin{matrix} \binom{r}{1}u_{1,1} + \binom{r}{2}u_{1,2} + \ldots + \binom{r}{n}u_{1,n} = 0 \\ \binom{r}{1}u_{2,1} + \binom{r}{2}u_{2,2} + \ldots + \binom{r}{n}u_{2,n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{r}{1}u_{r,1} + \binom{r}{1}u_{r,2} + \ldots + \binom{r}{n}u_{r,n} = D \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{r}{1}u_{n,1} + \binom{r}{2}u_{n,2} + \ldots + \binom{r}{n}u_{n,n} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

desquelles, en les multipliant respectivement par $\binom{r}{1}$, $\binom{r}{2} \ldots \binom{r}{n}$ et faisant la somme des produits, on tire l'identité

$$\Sigma u_{i,k}\binom{r}{i}\binom{r}{k} = \binom{r}{r}D,$$

qui peut être représentée ainsi

$$\rho^2 \Sigma a_{i,k}\binom{r}{i}\binom{r}{k} + \Sigma b_{i,k}\binom{r}{i}\binom{r}{k} = \binom{r}{r}D$$

ou

$$Az + B = \binom{r}{r}D, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

en posant, pour abréger, $\rho^2 = z$ et

$$\Sigma a_{i,k}\binom{r}{i}\binom{r}{k} = A,$$

$$\Sigma b_{i,k}\binom{r}{i}\binom{r}{k} = B.$$

La première de ces deux fonctions n'est autre chose que la fonction

$$2T = \Sigma a_{i,k} q'_i q'_k,$$

où les valeurs: $q'_1, q'_2 \ldots q'_n$ sont remplacées respectivement par $\binom{r}{1}, \binom{r}{2} \ldots \binom{r}{n}$, et la seconde se déduit de

$$2U_2 = \Sigma b_{i,k} q_i q_k,$$

en remplaçant $q_1, q_2 \ldots q_n$ par $\binom{r}{1}, \binom{r}{2} \ldots \binom{r}{n}$.

La dérivée de la fonction (11) par rapport à z donne

$$A + z\left[\frac{dA}{d\binom{r}{1}}\binom{r}{1}' + \frac{dA}{d\binom{r}{2}}\binom{r}{2}' + \ldots \frac{dA}{d\binom{r}{n}}\binom{r}{n}'\right] + \frac{dB}{d\binom{r}{1}}\binom{r}{1}' + \frac{dB}{d\binom{r}{2}}\binom{r}{2}' \ldots \frac{dB}{d\binom{r}{n}}\binom{r}{n}'$$

$$= \binom{r}{r}' D + \binom{r}{r} D'.$$

En vertu des identités (10), qui peuvent être représentées ainsi:

$$\frac{dA}{d\binom{r}{1}} z + \frac{dB}{d\binom{r}{1}} = 0$$

$$\frac{dA}{d\binom{r}{2}} z + \frac{dB}{d\binom{r}{2}} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dA}{d\binom{r}{r}} z + \frac{dB}{d\binom{r}{r}} = 2D$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dA}{d\binom{r}{n}} z + \frac{dB}{d\binom{r}{n}} = 0,$$

l'expression précédente se réduit à

$$A + 2\binom{r}{r}' D = \binom{r}{r}' D + \binom{r}{r} D'$$

d'où l'on tire

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A = \binom{r}{r} D' - \binom{r}{r}' D.$$

C'est cette formule, très-importante, qui nous servira pour la discussion des racines de l'équation $D = 0$.

7) **Théorème.** *Si la fonction* $\binom{r}{r}$ *a un facteur réel* $(z - \alpha)$ *au degré* m, *la fonction* D *contiendra ce même facteur au degré:* $m - 1$, *ou* m *ou* $m + 1$.

Supposant, en premier lieu, $m = 1$, il faudra admettre l'un des deux cas, ou que D

est divisible par $z-\alpha$, ou ne l'est pas. Le second cas s'accorde avec le théorème; dans le premier, la fonction (12)

$$A=\binom{r}{r}D'-\binom{r}{r}'D$$

s'évanouit pour $z=\alpha$.

Or, en vertu de ce que nous avons démontré au n° 4 par rapport à T, la fonction

$$A=\Sigma a_{i,k}\binom{r}{i}\binom{r}{k}$$

ne peut s'évanouir que pour

$$\binom{r}{1}=0,\binom{r}{2}=0,\ldots\binom{r}{r}=0,\ldots\binom{r}{n}=0;$$

par conséquent $z=\alpha$ est une racine commune de ces équations, et la fonction A sera donc divisible par $(z-\alpha)^2$; elle ne peut être divisible par une puissance plus grande de $z-\alpha$, car ce facteur est seulement au second degré dans le terme

$$a_{r,r}\binom{r}{r}^2.$$

Ainsi $\binom{r}{r}D'-D\binom{r}{r}'$ ne peut être divisible par une puissance supérieure à $(z-\alpha)^2$. Il faudrait pour cela que D contient $z-\alpha$ au premier ou au second degré. En effet, si l'on pose

$$\binom{r}{r}=(z-\alpha)\varphi(z),\quad D=(z-\alpha)^p f(z),$$

désignant par $\varphi(z)$ et $f(z)$ des fonctions qui ne contiennent pas le facteur $z-\alpha$, on aura

$$\binom{r}{r}D'-\binom{r}{r}'D=(z-\alpha)^p\{(p-1)f(z)\varphi(z)+(z-\alpha)[\varphi(z)f'(z)-\varphi'(z)f(z)]\},$$

ce qui fait voir que p ne peut être plus grand que 2. Posant $p=2$, le facteur compris dans les parenthèses $\{\}$ ne peut être divisible par $z-\alpha$; par conséquent $z-\alpha$ sera au second degré dans la fonction que l'on considère. Si l'on pose $p=1$ le facteur de la parenthèse $\{\}$ sera divisible par $z-\alpha$, et la fonction sera encore divisible par $(z-\alpha)^2$. Ainsi, le théorème est démontré dans le cas de $m=1$.

Supposons maintenant $m>1$. Alors $\binom{r}{r}'$ contient le facteur $(z-\alpha)^{m-1}$, et s'évanouit donc pour $z=\alpha$, ce qui fait évanouir la fonction (12) et par conséquent les fonctions:

$$\binom{r}{1},\binom{r}{2}\ldots\binom{r}{r}\ldots\binom{r}{n}$$

et aussi D, en vertu de l'équation

$$D=u_{r,1}\binom{r}{1}+u_{r,2}\binom{r}{2}\ldots+u_{r,n}\binom{r}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

Soit $(z-\alpha)^\mu$ la plus haute puissance de $z-\alpha$, par laquelle les fonctions $\binom{r}{1},\binom{r}{2}\ldots\binom{r}{n}$

sont divisibles; alors $z-\alpha$ sera au degré 2μ dans la fonction A. Faisant $\binom{r}{r} = (z-\alpha)^m \varphi(z)$, et $D = (z-\alpha)^p f(z)$, où $\varphi(z)$ et $f(z)$ ne contiennent pas le facteur $z-\alpha$, on trouve

$$A = D'\binom{r}{r} - D\binom{r}{r}' = (z-\alpha)^{m+p-1}\{(p-m)\varphi(z)f(z) + (z-\alpha)[\varphi(z\ f'(z) - \varphi'(z)f(z)]\}$$

ce qui fait voir que

$$2\mu \geqq m + p - 1$$

et comme $2\mu \leqq 2m$ parce que le terme $a_{r,r}\binom{r}{r}^2$ de A contient le facteur $(z-\alpha)^{2m}$, on a

$$2m \geqq m + p - 1;$$

par conséquent

$$p \leqq m + 1.$$

En vertu de l'équation (13) on a

$$\mu \leqq p;$$

donc

$$2p \geqq m + p - 1$$

ou

$$p \geqq m - 1.$$

Ainsi p ne peut être que l'un des trois nombres: $m-1$, m, $m+1$. Ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème fait aussi voir, que si l'équation $D = 0$ a m racines réelles égales à α, l'équation $\binom{r}{r} = 0$ en aura $m-1$ ou m ou $m+1$. Il est facile de s'assurer que parmi les déterminants:

$$\binom{1}{1}, \binom{2}{2} \cdots \binom{n}{n}$$

il y en a au moins un qui n'a pas plus de $m-1$ racines égales à α. Soit Δ le déterminant à éléments réciproques de D, c.-à-d.

$$(14) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \begin{cases} \binom{1}{1} \binom{1}{2} \binom{1}{3} \cdots \binom{1}{n} \\ \binom{2}{1} \binom{2}{2} \binom{2}{3} \cdots \binom{2}{n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \cdots \binom{n}{n} \end{cases}$$

On a par un théorème connu

$$\Delta = D^{n-1};$$

le second membre contenant $z-\alpha$ au degré $mn-m$, le premier ne pourra être divisible par une puissance de $z-\alpha$ plus grande que $(z-\alpha)^{mn-m}$; on ne peut donc pas admettre

que tous les éléments de la table (14) contiennent le facteur $(z-\alpha)^m$, car alors Δ serait divisible par $(z-\alpha)^{mn}$. Ainsi, il se trouve dans la table (14) des éléments qui contiennent $z-\alpha$ au degré $m-1$, et dans les autres ce facteur pourra s'élever aux degrés m ou $m+1$.

Si $z-\alpha$ est seulement au degré $m-1$ dans l'élément $\binom{r}{i}$ il sera au degré $2m-2$ dans

$$A = \Sigma a_{i,k} \binom{r}{i} \binom{r}{k} = \binom{r}{r} D' - \binom{r}{r}' D;$$

cela ne peut être que lorsque $z-\alpha$ s'élève seulement au degré $m-1$ dans $\binom{r}{r}$; ce qu'il fallait démontrer.

8) La fonction (12)

$$A = \binom{r}{r} D' - \binom{r}{r}' D,$$

étant divisée par D^2, devient évidemment

$$\frac{d\left[\frac{\binom{r}{r}}{D}\right]}{dz} = -\frac{A}{D^2},$$

ce qui fait voir que la dérivée du rapport

$$\frac{\binom{r}{r}}{D},$$

pour toute valeur réelle de z, est négative; ce rapport doit donc toujours diminuer quand z croit.

Supposons maintenant que la fonction $\binom{r}{r}$ a toutes ses racines réelles, et que nous désignerons dans l'ordre croissant par

$$z_1, z_2 \ldots z_\lambda,$$

et soit $m_1, m_2 \ldots m_\lambda$ respectivement les degrés des facteurs:

$$z-z_1, z-z_2 \ldots z-z_\lambda$$

dans $\binom{r}{r}$.

Faisons varier z d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et voyons ce qu'il arrivera avec le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$.

Le degré de D, étant supérieur à celui de $\binom{r}{r}$, on a

$$\frac{\binom{r}{r}}{D} = 0 \text{ pour } z = -\infty,$$

et comme ce rapport diminue quand z croit, il devient négatif pour des valeurs très-grandes négatives de z.

Le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ s'évanouit pour $z=z_1$ si le degré de $z-z_1$ dans D est m_1-1; il reçoit une valeur finie lorsque $z-z_1$ est au degré m_1 dans D, et devient $\mp\infty$ si ce degré est m_1+1.

Dans le premier cas le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ change de signe pour $z=z_1$, et comme il diminue, il passe du positif au négatif. Il doit donc encore changer de signe pour une valeur de z comprise dans l'intervalle de $-\infty$ à z_1; cela ne peut arriver que lorsqu'il devient infini, et pas plus d'une fois; en effet, le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$, diminuant quand z croit, change le signe — en + chaque fois qu'il devient infini, et si l'on admet que cela arrive pour deux valeurs α et β, comprises dans l'intervalle de $-\infty$ à z_1, il faudrait admettre que le rapport change encore de signe du + au —, en passant par zéro pour une valeur de z dans l'intervalle de α à β; ce qui ne peut être, parce que la fonction $\binom{r}{r}$ n'a pas de racines dans cet intervalle. Ainsi quand la fonction D a m_1-1 racines égales à z_1 elle doit avoir encore une racine moindre que z_1, et en tout elle aura m_1 racines dans l'intervalle: $-\infty\ldots z_1$. Dans ce cas le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ devient évidemment négatif pour une valeur de $z>z_1$ et très-voisine de z_1.

Quand D a m_1 racines égales à z_1, le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ ne change pas de signe pour $z=z_1$ et ce signe peut être + ou —; dans le premier de ces deux cas, le rapport doit changer le signe — en + pour une valeur $z<z_1$ en devenant infini; la fonction D aura donc une racine $z<z_1$; mais si le rapport a le signe — pour $z=z_1$ il doit évidemment conserver ce signe pour toutes les valeurs $z<z_1$, et D n'aura pas de racines $<z_1$.

Enfin, si D a m_1+1 racines égales à z_1, le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ devient infini pour $z=z_1$ en changeant le signe — en +, et ne peut changer de signe pour une valeur $z<z_1$.

En resumé, la fonction D a dans l'intervalle $-\infty\ldots z_1$,

$$m_1 \text{ ou } m_1+1$$

racines réelles, y compris les racines égales à z_1; dans le premier cas, pour une valeur $z>z_1$ et très-voisine de z_1, le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ a le signe —, et dans le second cas le signe +.

Raisonnant de même, on verra que la fonction D aura m_1+m_2 ou m_1+m_2+1 racines dans l'intervalle $-\infty\ldots z_2$, y compris les racines égales à z_1 et z_2; dans le premier cas le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$, pour une valeur $z>z_2$ et très-voisine de z_2, aura le signe —, et dans le second cas le signe +. Ainsi de suite.... Enfin on trouvera que D a

$$m_1+m_2+\ldots.m_\lambda$$
$$\text{ou } m_1+m_2+\ldots.m_\lambda+1$$

racines dans l'intervalle $-\infty \ldots z_\lambda$, y compris les racines égales à $z_1, z_2 \ldots z_\lambda$, et pour une valeur $z > z_\lambda$ très-voisine de z_λ le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ aura le signe — dans le premier cas et le signe + dans le second. Pour $z = +\infty$ le rapport devient nul, en diminuant; il doit donc être positif pour des valeurs très-grandes et positives de z; par conséquent quand le rapport a le signe — pour $z > z_\lambda$, dans le voisinage de z_λ, il doit changer une fois de signe en passant par l'infini pour une valeur de $z > z_\lambda$, et D aura donc une racine plus grande que z_λ. Mais quand le signe de $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ pour $z > z_\lambda$ voisine de z_λ est +, le rapport ne peut changer de signe pour aucune valeur $z > z_\lambda$.

On voit donc que dans tous les cas la fonction D aura

$$m_1 + m_2 + \ldots . m_\lambda + 1$$

racines réelles, y compris les racines égales à $z_1, z_2 \ldots z_\lambda$. Or, les racines de la fonction $\binom{r}{r}$ étant supposées toutes réelles, la somme $m_1 + m_2 + \ldots . m_\lambda$ est égale à l'exposant de $\binom{r}{r}$ qui est $n-1$; on a donc

$$m_1 + m_2 + \ldots . m_\lambda + 1 = n,$$

c.-à-d. D a toutes ses racines réelles. On voit encore par les raisonnements précédents que les racines de D qui ne sont pas égales à $z_1, z_2 \ldots z_\lambda$, sont distribuées de manière que chaque intervalle

$$-\infty, \; z_1, \; z_2 \ldots z_n, \; +\infty$$

ne contient qu'une seule de ces racines.

La fonction $\binom{r}{r}$ est par rapport à $\binom{rs}{rs}$ ce que D est par rapport à $\binom{r}{r}$; par conséquent toutes les racines de $\binom{r}{r}$ seront réelles quand $\binom{rs}{rs}$ jouit de cette propriété; ainsi de suite. On voit donc que toutes les racines de D seront réelles quand le dernier déterminant mineur principal

$$\binom{1, 2 \ldots p-1, \; p+1 \ldots n}{1, 2 \ldots p-1, \; p+1 \ldots n} = u_{p,p} = a_{p,p} z + b_{p,p}$$

aura une racine réelle. Or cette condition est remplie; les racines de D sont donc en effet toutes réelles.

9) Si la fonction

$$U_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma b_{r,s} q_r q_s$$

conserve le même signe pour toutes les valeurs réelles de $q_1, q_2 \ldots q_n$, et ne s'évanouit que pour

$$q_1 = 0, \; q_2 = 0 \ldots q_n = 0,$$

son discriminant c.-à-d. le déterminant

$$(15)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases} b_{1,1}\ b_{1,2}\ldots b_{1,n} \\ b_{2,1}\ b_{2,2}\ldots b_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1}\ b_{n,2}\ldots b_{n,n} \end{cases}$$

et aucun des déterminants principaux $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r\,s \\ r\,s \end{pmatrix}\ldots$, qui en dérivent, ne peuvent être nuls. De plus, on démontre, comme au n° 4, que leurs valeurs seront toutes positives quand U_2 est positive, et auront alternativement les signes — et + quand U_2 est négative.

Si la fonction U_2 peut s'évanouir pour des valeurs de $q_1, q_2\ldots q_n$ distinctes de zéro; il faut alors que le discriminant (15), ou quelques uns des déterminants mineurs principaux qui en dérivent, soient nuls.

Si la fonction U_2 a le signe —, la fonction des forces U reçoit une valeur U_0 *maximum* à l'état de l'équilibre des forces. C'est la condition nécessaire pour que l'équilibre soit stable ou que les mouvements du système que nous considérons restent toujours très petits. Cette condition admise, il est facile de prouver que toutes les racines de l'équation $D = 0$ sont positives.

Supposons en premier lieu que ni le discriminant (15), ni aucun de ses déterminants mineurs principaux ne soient nuls.

Faisant $z = 0$, les éléments des déterminants D et $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ se réduisent aux éléments de la table (15); par conséquent ces deux fonctions ne s'évanouissent pas pour $z = 0$ et ont des signes contraires; le rapport $\frac{\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}}{D}$ aura donc le signe —.

Supposant que les racines de $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ sont toutes positives, on prouvera, comme au n° 8, que la fonction D aura n racines réelles dans l'intervalle $0\ldots+\infty$, c.-à-d. toutes ses racines seront aussi positives. Or, cette propriété a lieu pour le dernier déterminant

$$u_{p,p} = \begin{pmatrix} 1, 2\ldots p-1,\ p+1\ldots n \\ 1, 2\ldots p-1,\ p+1\ldots n \end{pmatrix} = a_{p,p}\,z + b_{p,p}$$

parce que $a_{p,p} > 0$ et $b_{p,p} < 0$; on voit donc que toutes les racines des fonctions:

$$\begin{pmatrix} 1, 2\ldots p-1,\ p+1,\ldots q-1,\ q+1\ldots n \\ 1, 2\ldots p-1,\ p+1,\ldots q-1,\ q+1\ldots n \end{pmatrix}, \ldots\ldots \begin{pmatrix} r\,s \\ r\,s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}, D$$

sont en effet positives.

Si, pour $z = 0$, la fonction $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ s'évanouit et D ne se réduit pas à zéro, le rapport $\frac{\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}}{D}$ change de signe pour $z = 0$ en passant de + à —, et on conclut, comme précédemment, que si $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ a toutes ses racines dans l'intervalle $0\ldots+\infty$, celles de D le seront aussi.

Supposons maintenant que $z = 0$ est racine de $D = 0$, simple ou multiple, soit m généralement le degré du facteur z dans D. Alors, en vertu du n° 6, il y a dans la suite

$$\binom{1}{1}, \binom{2}{2} \cdot \cdots \binom{n}{n}$$

au moins une fonction $\binom{r}{r}$ qui n'a que $m-1$ racines égales à zéro; le rapport $\frac{\binom{r}{r}}{D}$ deviendra donc infini pour $z = 0$, en changeant le signe — en +, et, si $\binom{r}{r}$ n'a pas de racines négatives, le rapport ne pourra pas changer de signe pour une valeur $z < 0$; par conséquent D ne peut également avoir de racines négatives. Par la même raison aucun des déterminants $\binom{1}{1}, \binom{2}{2} \cdots \binom{n}{n}$ n'aura de racines négatives si tous les déterminants de la forme $\binom{rs}{rs}$ jouissent de cette propriété, et ainsi de suite. On conclut donc que la fonction D n'aura pas de racines négatives quand cela a lieu pour les déterminants du premier ordre:

$$u_{1,1} = a_{1,1} z + b_{1,1}$$
$$u_{2,2} = a_{2,2} z + b_{2,2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n,n} = a_{n,n} z + b_{n,n}.$$

Or, $a_{1,1}, a_{2,2} \cdots a_{n,n}$ sont toutes positives et $b_{1,1}, b_{2,2} \cdots b_{n,n}$ négatives ou nulles; donc, aucune des fonctions $u_{1,1}, u_{2,2} \cdots u_{n,n}$ ne peut en effet avoir de racines négatives.

On peut démontrer de la même manière, que toutes les racines de l'équation $D = 0$ sont négatives, quand U_2 conserve le signe + pour toutes les valeurs de $q_1, q_2 \cdots q_n$.

La démonstration de Lagrange (Mécanique Analytique, T. I, 2e édit., page 361), qui admet que les racines de l'équation sont inégales, s'applique aussi au cas des racines égales.

Supposant en général que D a m racines égales à ρ^2 et $\binom{r}{r}$ seulement $m-1$, multiplions l'équation identique (11) par $\frac{[1,2,\ldots(m-1)]^2}{(z-\rho^2)^{2m-2}}$, et posons ensuite $z = \rho^2$; nous aurons

$$0 = \rho^2 \Sigma a_{i,k} \binom{r}{i}^{(m-1)} \binom{r}{k}^{(m-1)} + \Sigma b_{i,k} \binom{r}{i}^{(m-1)} \binom{r}{k}^{(m-1)};$$

d'où l'on tire

$$\rho^2 = -\frac{\Sigma b_{i,k} \binom{r}{i}^{(m-1)} \binom{r}{k}^{(m-1)}}{\Sigma a_{i,k} \binom{r}{i}^{(m-1)} \binom{r}{k}^{(m-1)}}.$$

Le dénominateur est nécessairement positif, car c'est la fonction $2T$, dans laquelle $q_1', q_2' \cdots q_n'$ sont remplacées par $\binom{r}{1}^{(m-1)}, \binom{r}{2}^{(m-1)} \cdots \binom{r}{n}^{(m-1)}$, et le numérateur sera négatif ou positif, suivant que U_2 est négatif ou positif pour toutes les valeurs de $q_1, q_2 \cdots q_n$, lesquelles sont remplacées ici par $\binom{r}{1}^{(m-1)}, \binom{r}{2}^{(m-1)} \cdots \binom{r}{n}^{(m-1)}$; ainsi

ρ^2 sera positif dans le premier cas et négatif dans le second, ce qui démontre la proposition.

10) Revenons maintenant aux intégrales des équations (7),

$$a_{1,1}\frac{d^2q_1}{dt^2}+a_{1,2}\frac{d^2q_2}{dt^2}+\ldots.a_{1,n}\frac{d^2q_n}{dt^2}=b_{1,1}q_1+b_{1,2}q_2+\ldots.b_{1,n}q_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n,1}\frac{d^2q_1}{dt^2}+a_{n,2}\frac{d^2q_2}{dt^2}+\ldots.a_{n,n}\frac{d^2q_n}{dt^2}=b_{n,1}q_1+b_{n,2}q_2+\ldots.b_{n,n}q_n.$$

Pour former les intégrales particulières

$$q_1=h_1\sin(\rho t),\ q_2=h_2\sin(\rho t)\ldots.q_n=h_n\sin(\rho t)$$

ou

$$q_1=h_1\cos(\rho t),\ q_2=h_2\cos(\rho t)\ldots.q_n=h_n\cos(\rho t)$$

qui répondent à une racine $z=\rho^2$ de l'équation $D=0$, il faut déterminer un système de valeurs: $h_1,\ h_2\ldots.h_n$ qui doivent satisfaire aux équations (8)

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases}u_{1,1}h_1+u_{1,2}h_2+\ldots.u_{1,n}h_n=0\\ u_{2,1}h_1+u_{2,2}h_2+\ldots.u_{2,n}h_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_{n,1}h_1+u_{n,2}h_2+\ldots.u_{n,n}h_n=0.\end{cases}$$

Si la racine ρ^2 est simple, il y aura alors dans la suite

$$\binom{1}{1},\ \binom{2}{2}\ldots.\binom{n}{n}$$

au moins une fonction $\binom{r}{r}$ qui n'aura pas cette racine (n° 6). Cela posé, on pourra, en vertu des identités

$$u_{1,1}\binom{r}{1}+u_{1,2}\binom{r}{2}+\ldots.u_{1,n}\binom{r}{n}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{r,1}\binom{r}{1}+u_{r,2}\binom{r}{2}+\ldots.u_{r,n}\binom{r}{n}=D$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{n,1}\binom{r}{1}+u_{n,2}\binom{r}{2}+\ldots.u_{n,n}\binom{r}{n}=0,$$

satisfaire aux équations (8) en faisant

$$h_1=H\binom{r}{1},\ h_2=H\binom{r}{2}\ldots.h_n=H\binom{r}{n},$$

H étant une constante arbitraire; on aura ainsi le système d'intégrales particulières:

$$q_1=H\binom{r}{1}\sin(\rho t),\ q_2=H\binom{r}{2}\sin(\rho t)\ldots.q_n=H\binom{r}{n}\sin(\rho t)$$

et on établit de la même manière encore le système

$$q_1 = H'\binom{r}{1}\cos(\rho t),\ q_2 = H'\binom{r}{2}\cos(\rho t)\ldots . q_n = H'\binom{r}{n}\cos(\rho t),$$

H' étant une nouvelle constante arbitraire.

Si la racine ρ^2 devient multiple, et si m est le degré du facteur $z-\rho^2$ dans $\boldsymbol{D}$, alors, comme l'on sait, les dérivées des $m-1$ premiers ordres par rapport à ρ des intégrales précédentes seront aussi des intégrales particulières qu'il faut introduire dans les intégrales générales. La différentiation par rapport à ρ fait ordinairement sortir le temps t hors des signes *sin* et *cos*. Mais, pour le type des équations (7), les termes qui contiendraient ainsi t s'évanouissent toujours. En effet: si l'on prend la dérivée de l'ordre p par rapport à ρ de

$$H\binom{r}{s}\sin(\rho t)$$

on trouve

$$H\left[\frac{d^p\binom{r}{s}}{d\rho^p}\sin(\rho t)+p\frac{d^{p-1}\binom{r}{s}}{d\rho^{p-1}}t\sin\left(\rho t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{p(p-1)}{2}\frac{d^{p-2}\binom{r}{s}}{d\rho^{p-2}}t^2\sin\left(\rho t+2.\frac{\pi}{2}\right)+\ldots .\binom{r}{s}t^p\sin\left(\rho t+p.\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Or $\binom{r}{s}$, ayant au moins $m-1$ racines égales à ρ, s'évanouit ainsi que ses dérivées:

$$\frac{d\binom{r}{s}}{d\rho},\ \frac{d^2\binom{r}{s}}{d\rho^2}\ldots .\ \frac{d^{m-2}\binom{r}{s}}{d\rho^{m-2}};$$

par conséquent la valeur précédente s'évanouit aussi quand $p<m-1$, et pour $p=m-1$ se réduit à

$$H\frac{d^{m-1}\binom{r}{s}}{d\rho^{m-1}}\sin(\rho t) = H2^{m-1}\frac{d^{m-1}\binom{r}{s}}{(d\rho^2)^{m-1}}\rho^{m-1}\sin(\rho t) = H_1\binom{r}{s}^{(m-1)}\sin(\rho t),$$

où l'on a fait pour abréger

$$2^{m-1}H\rho^{m-1} = H_1 \text{ et } \frac{d^{m-1}\binom{r}{s}}{(d\rho^2)^{m-1}} = \binom{r}{s}^{(m-1)}.$$

Ainsi, les dérivées des $m-1$ ordres par rapport à ρ des intégrales

$$H\binom{r}{1}\sin(\rho t),\ H\binom{r}{2}\sin(\rho t).\ldots . H\binom{r}{n}\sin(\rho t)$$

ne donnent qu'un système d'intégrales particulières

$$H_1\binom{r}{1}^{(m-1)}\sin(\rho t),\ H_1\binom{r}{1}^{(m-1)}\sin(\rho t)\ldots . H_1\binom{r}{n}^{(m-1)}\sin(\rho t)\ldots\ldots\ldots (16)$$

qui ne contiennent pas le temps t hors du signe *sin*. Et si l'on prend pour $\binom{r}{r}$ une des fonctions de la suite $\binom{1}{1}, \binom{2}{2}\ldots .\binom{n}{n}$ qui ne contient $z-\rho^2$ qu'au degré $m-1$, une au moins des valeurs précédentes, savoir $H_1\binom{r}{r}^{(m-1)}\sin(\rho t)$, ne pourra être nulle.

*

On peut aussi établir le système d'intégrales particulières (16) immédiatement de la manière suivante:

Multipliant les identitées

$$u_{1,1}\binom{r}{1} + u_{1,2}\binom{r}{2}\ldots u_{1,n}\binom{r}{n} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{r,1}\binom{r}{1} + u_{r,2}\binom{r}{2}\ldots u_{r,n}\binom{r}{n} = D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n,1}\binom{r}{1} + u_{n,2}\binom{r}{2}\ldots u_{n,n}\binom{r}{n} = 0$$

par $\frac{1.2\ldots(m-1)}{(z-\rho^2)^{m-1}}$ et posant ensuite $z = \rho^2$, on trouve

$$u_{1,1}\binom{r}{1}^{(m-1)} + u_{1,2}\binom{r}{2}^{(m-1)} + \ldots u_{1,n}\binom{r}{1}^{(m-1)} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{r,1}\binom{r}{1}^{(m-1)} + u_{r,2}\binom{r}{2}^{(m-1)} + \ldots u_{r,n}\binom{r}{n}^{(m-1)} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n,1}\binom{r}{1}^{(m-1)} + u_{n,2}\binom{r}{2}^{(m-1)} + \ldots u_{n,n}\binom{r}{n}^{(m-1)} = 0,$$

ce qui fait voir que les valeurs

$$\binom{r}{1}^{(m-1)}, \binom{r}{2}^{(m-1)} \ldots \binom{r}{n}^{(m-1)}$$

satisfont aux équations (8); on peut donc poser

$$h_1 = H_1\binom{r}{1}^{(m-1)}, \; h_2 = H_1\binom{r}{2}^{(m-1)} \ldots h_n = H_1\binom{r}{n}^{(m-1)}$$

ce qui réduit le système d'intégrales

$$h_1 \sin(\rho t), \; h_2 \sin(\rho t) \ldots h_n \sin(\rho t)$$

au système (16).

Mais les intégrales de la forme (16) qui répondent à toutes les racines de l'équation $D = 0$ ne suffisent par pour former les intégrales générales, parce que chaque système ne contient qu'une constante arbitraire.

Nous ferons voir qu'on peut toujours trouver d'autres intégrales particulières avec des nouvelles constantes distinctes et en nombre suffisant pour former avec les précédentes les intégrales des équations (7).

11) Supposant toujours que $\binom{r}{r}$ contient le facteur $z - \rho^2$ au degré $m-1$, et prenant dans la suite

$$\binom{r1}{r1}, \binom{r2}{r2} \ldots \binom{rn}{rn}.$$

une fonction $\binom{r\ s}{r\ s}$ qui contient $z-\rho^2$ seulement au degré $m-2$, on satisfait aux équations (8) par les valeurs :

$$h_1 = H_2 \binom{r\ s}{r\ 1}^{(m-2)},\ h_2 = H_2 \binom{r\ s}{r\ 2}^{(m-2)} \ldots . h_r = 0, \ldots . h_n = H_2 \binom{r\ s}{r\ n}^{(m-2)} \ldots \ldots . (17)$$

En effet, posant $h_r = 0$ et supprimant l'équation

$$u_{r1}\, h_1 + u_{r,2}\, h_2 + \ldots . u_{r,r-1} h_{r-1} + u_{r,r+1}\, h_{r+1} \ldots . + u_{r,n}\, h_n = 0 \ldots . (18)$$

on réduit le système (8) à

$$\begin{aligned}
&u_{1,1}\, h_1 \ldots \ldots + u_{1,r-1}\, h_{r-1} + u_{1,r+1}\, h_{r+1} + \ldots . = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{r-1,1}\, h_1 \ldots . + u_{r-1,r-1}\, h_{r-1} + u_{r-1,r+1}\, h_{r+1} + \ldots . = 0\\
&u_{r+1,1}\, h_1 \ldots . + u_{r+1,r-1}\, h_{r-1} + u_{r+1,r+1}\, h_{r+1} + \ldots . = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{n,1}\, h_1 \ldots . + u_{n,r-1}\, h_{r-1} + u_{n,r+1}\, h_{r+1} + \ldots . = 0
\end{aligned}$$

auquel on satisfait par les valeurs

$$\binom{r\ s}{r\ 1}^{(m-2)},\ \binom{r\ s}{r\ 2}^{(m-2)}, \ldots . \binom{r\ s}{r\ r-1}^{(m-2)},\ \binom{r\ s}{r\ r+1}^{(m-2)}, \ldots . \binom{r\ s}{r\ n}^{(m-2)} \ldots . (19)$$

car les identités

$$\begin{aligned}
&u_{1,1}\ \binom{r\ s}{r\ 1} + u_{1,2}\binom{r\ s}{r\ 2} \ldots . u_{1,r-1}\binom{r\ s}{r\ r-1} + u_{1,r+1}\binom{r\ s}{r\ r+1} + \ldots . u_{1,n}\binom{r\ s}{r\ n} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{r-1,1}\binom{r\ s}{r\ 1} + u_{r-1,2}\binom{r\ s}{r\ 2} \ldots . u_{r-1,r-1}\binom{r\ s}{r\ r-1} + u_{r+1,r+1}\binom{r\ s}{r\ r+1} + \ldots . u_{r-1,n}\binom{r\ s}{r\ n} = 0\\
&u_{r+1,1}\binom{r\ s}{r\ 1} + u_{r+1,2}\binom{r\ s}{r\ 2} \ldots . u_{r+1,r-1}\binom{r\ s}{r\ r-1} + u_{r+1,r+1}\binom{r\ s}{r\ r+1} + \ldots . u_{r+1,n}\binom{r\ s}{r\ n} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{s,1}\ \binom{r\ s}{r\ 1} + u_{s,2}\binom{r\ s}{r\ 2} \ldots . u_{s,r-1}\binom{r\ s}{r\ r-1} + u_{s,r+1}\binom{r\ s}{r\ r+1} + \ldots . u_{s,n}\binom{r\ s}{r\ n} = \binom{r}{r}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

étant multipliées par

$$\frac{1.2 \ldots . (m-2)}{(z-\rho^2)^{m-2}}$$

se réduisent pour $z = \rho^2$ à

$$\begin{aligned}
&u_{1,1}\binom{r\ s}{r\ 1}^{(m-2)} + u_{1,2}\binom{r\ s}{r\ 2}^{(m-2)} + \ldots . u_{1,n}\binom{r\ s}{r\ n}^{(m-2)} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{s,1}\binom{r\ s}{r\ 1}^{(m-2)} + u_{s,2}\binom{r\ s}{r\ 2}^{(m-2)} + \ldots . u_{s,n}\binom{r\ s}{r\ n}^{(m-2)} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que ces mêmes valeurs (19) satisfont à l'équation supprimée (18). En effet, on a identiquement

$$\binom{s}{r} = \binom{s\ r}{r\ 1} u_{r,1} + \binom{s\ r}{r\ 2} u_{r,2} + \ldots + \binom{s\ r}{r\ r-1} u_{r,r-1} + \binom{s\ r}{r\ r+1} u_{r,r+1} + \ldots + \binom{s\ r}{r\ n} u_{r,n}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\binom{s}{r} = \binom{r\ s}{r\ 1} u_{r,1} + \binom{r\ s}{r\ 2} u_{r,2} + \ldots + \binom{r\ s}{r\ r-1} u_{r,r-1} + \binom{r\ s}{r\ r+1} u_{r,r+1} + \ldots + \binom{r\ s}{r\ n} u_{r,n};$$

cette égalité multipliée par

$$\frac{1.2.\ldots(m-2)}{(z-\rho^2)^{m-2}},$$

donne pour $z = \rho^2$

$$u_{r,1}\binom{r\ s}{r\ 1}^{(m-2)} + u_{r,2}\binom{r\ s}{r\ 2}^{(m-2)} + \ldots + u_{r,r-1}\binom{r\ s}{r\ r-1}^{(m-2)} + u_{r,r+1}\binom{r\ s}{r\ r+1}^{(m-2)}$$
$$+ \ldots + u_{r,n}\binom{r\ s}{r\ n}^{(m-2)} = \binom{s}{r}^{(m-2)} = 0,$$

parceque $\binom{s}{r}$ a au moins $m-1$ racines égales à ρ^2; l'équation (18) est donc satisfaite par les valeurs (19). Ainsi, toutes les équations (8) sont satisfaites par les valeurs (17); par conséquent

$$q_1 = H_2\binom{r\ s}{r\ r}^{(m-2)} \sin(\rho t), \ldots q_{r-1} = H_2\binom{r\ s}{r\ r-1}^{(m-2)} \sin(\rho t),\ q_r = 0,$$
$$q_{r+1} = H_2\binom{r\ s}{r\ r+1}^{(m-2)} \sin(\rho t) \ldots q_n = H_2\binom{r\ s}{r\ n}^{(m-2)} \sin(\rho t)$$

représente un système d'intégrales particulières des équations (7).

Désignant par $\binom{r\ s\ v}{r\ s\ v}$ une des fonctions de la suite

$$\binom{r\ s\ 1}{r\ s\ 1}, \binom{r\ s\ 2}{r\ s\ 2} \ldots\ldots\ldots$$

qui contient $z - \rho^2$ au degré $m-3$, on satisfait aux équations (8) par les valeurs:

$$h_1 = H_3\binom{r\ s\ v}{r\ s\ 1}^{(m-3)},\ h_2 = H_3\binom{r\ s\ v}{r\ s\ 2}^{(m-3)}, \ldots h_r = 0,\ h_s = 0, \ldots h_n = H_3\binom{r\ s\ v}{r\ s\ n}^{(m-3)} \ldots (20)$$

H_3 étant une constante arbitraire.

Pour le démontrer, faisons dans les équations (8) $h_r = 0$, $h_s = 0$, et supprimons les deux équations:

$$\left.\begin{aligned} u_{r,1}h_1 + \ldots u_{r,r-1}h_{r-1} + u_{r,r+1}h_{r+1} + \ldots u_{r,s-1}h_{s-1} + u_{r,s+1}h_{s+1} + \ldots = 0 \\ u_{s,1}h_1 + \ldots u_{s,r-1}h_{r-1} + u_{s,r+1}h_{r+1} + \ldots u_{s,s-1}h_{s-1} + u_{s,s+1}h_{s+1} + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (21)$$

On satisfait aux équations qui restent :

$$u_{1,1}\,h_1 + \ldots + u_{1,r-1}\,h_{r-1} + u_{1,r+1}\,h_{r+1} + \ldots + u_{1,s-1}\,h_{s-1} + u_{1,s+1}\,h_{s+1} + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{r-1,2}\,h_1 + \ldots + u_{r-1,r-1}\,h_{r-1} + u_{r-1,r+1}\,h_{r+1} + \ldots + u_{r-1,s-1}\,h_{s-1} + u_{r-1,s+1}\,h_{s+1} \ldots = 0$$

$$u_{r+1,1}\,h_1 + \ldots + u_{r+1,r-1}\,h_{r-1} + u_{r+1,r+1}\,h_{r+1} + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{s-1,1}\,h_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$u_{s+1,1}\,h_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

par les valeurs

$$\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1}^{(m-3)}, \ldots \binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1}^{(m-3)}, \binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1}^{(m-3)}, \ldots \binom{r\,s\,v}{r\,s\,s-1}^{(m-3)}, \binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1}^{(m-3)} \ldots (22)$$

ce qu'on peut voir facilement en multipliant les identités :

$$u_{1,1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1} + \ldots + u_{1,r-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1} + u_{1,r+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1} + \ldots u_{1,s-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s-1} + u_{1,s+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1} + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{r-1,1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1} + \ldots + u_{r-1,r-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1} + u_{r,r+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1} + \ldots u_{r-1,s-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s-1} + u_{r-1,s+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1} + \ldots = 0$$

$$u_{r+1,1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1} + \ldots + u_{r+1,r-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1} + u_{r+1,r+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1} + \ldots u_{r+1,s-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s-1} + u_{r+1,s+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1} + \ldots = 0$$

$$u_{s-1,1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1} + \ldots + u_{s-1,r-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1} + u_{s-1,r+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1} + \ldots u_{s-1,s-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s-1} + u_{s-1,s+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1} + \ldots = 0$$

$$u_{s+1,1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1} + \ldots + u_{s+1,r-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1} + u_{s+1,r+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1} + \ldots u_{s+1,s-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s-1} + u_{s+1,s+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1} + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{v,1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,1} + \ldots u_{v,r-1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r-1} + u_{v,r+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,r+1} + \ldots u_{v,s-1}\binom{r\,s\,u}{r\,s\,s-1} + u_{v,s+1}\binom{r\,s\,v}{r\,s\,s+1} + \ldots = \binom{r\,s}{r\,s}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

par $\frac{1.2.3.\ldots.(m-3)}{(z-\rho^2)^{m-3}}$, et posant ensuite $z = \rho^2$.

En opérant de même sur les identités :

$$\binom{s\,v}{s\,r} = u_{r,1}\binom{s\,v\,r}{s\,r\,1} + u_{r,2}\binom{s\,v\,r}{s\,r\,2} + \ldots u_{r,r-1}\binom{s\,v\,r}{s\,r\,r-1} + u_{r,r+1}\binom{s\,v\,r}{s\,r\,r+1} + \ldots + u_{r,s-1}\binom{s\,v\,r}{s\,r\,s-1} + u_{r,s+1}\binom{s\,v\,r}{s\,r\,s+1} + \ldots$$

$$\binom{r\,v}{r\,s} = u_{s,1}\binom{r\,v\,s}{r\,s\,1} + u_{s,2}\binom{r\,v\,s}{r\,s\,2} + \ldots u_{s,r-1}\binom{r\,v\,s}{r\,s\,r-1} + u_{s,r+1}\binom{r\,v\,s}{r\,s\,r+1} + \ldots + u_{s,s-1}\binom{r\,v\,s}{r\,s\,s-1} + u_{s,s+1}\binom{r\,v\,s}{r\,s\,s+1} + \ldots$$

on verra que les valeurs (22) satisfont aussi aux équations (21); par conséquent les valeurs (20) satisfont aux équations (8), et

$$q_1 = H_3\begin{pmatrix} r\,s\,v \\ r\,s\,1 \end{pmatrix}^{(m-3)} \sin(\varrho t), \ldots q_{r-1} = H_3\begin{pmatrix} r\,s\,v \\ r\,s\,r-1 \end{pmatrix}^{(m-3)} \sin(\varrho t), q_r = 0,$$

$$q_{r+1} = H_3\begin{pmatrix} r\,s\,v \\ r\,s\,r+1 \end{pmatrix}^{(m-3)} \sin(\varrho t), \ldots q_{s-1} = H_3\begin{pmatrix} r\,s\,v \\ r\,s\,s-1 \end{pmatrix}^{(m-3)} \sin(\varrho t), q_s = 0,$$

$$q_{s+1} = H_3\begin{pmatrix} r\,s\,v \\ r\,s\,s+1 \end{pmatrix}^{(m-3)} \sin(\varrho t), \ldots q_n = H_3\begin{pmatrix} r\,s\,v \\ r\,s\,n \end{pmatrix}^{(m-3)} \sin(\varrho t)$$

seront des intégrales particulières des équations (7).

Soit en général

$$\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\ldots\lambda\,\mu \end{pmatrix}$$

un des déterminants principaux mineurs de l'ordre $m-p$, qui n'a que $m-p$ racines égales à ϱ^2. — En suivant la marche précédente, on parvient à démontrer que les valeurs:

$$h_1 = H_p\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\quad\ \lambda\,1 \end{pmatrix}^{(m-p)} \ldots, h_r = 0, \ldots h_s = 0, \ldots h_\lambda = 0, \ldots h_n = H_p\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\ldots\lambda\,n \end{pmatrix}^{(m-p)} \ldots (23)$$

H_p étant une constante arbitraire, satisfont aux équations (8). En effet, supposant dans ces équations $h_r = 0$, $h_s = 0, \ldots h_\lambda = 0$, et supprimant les équations

$$\left.\begin{array}{l} u_{r,1}\,h_1 + \ldots\ldots\ldots u_{r,n}\,h_n = 0 \\ u_{s,1}\,h_1 + \ldots\ldots\ldots u_{s,n}\,h_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{\lambda,1}\,h_1 + \ldots\ldots\ldots u_{\lambda,n}\,h_n = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (24)$$

on satisfait aux équations qui restent par les valeurs (23), ce qu'on verra en multipliant les identités:

$$u_{1,1}\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\quad\ \lambda\,1 \end{pmatrix} + u_{1,2}\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\ldots\lambda\,2 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{\mu,1}\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\ldots\lambda\,1 \end{pmatrix} + u_{\mu,2}\begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda\,\mu \\ r\,s\ldots\lambda\,2 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots = \begin{pmatrix} r\,s\ldots\lambda \\ r\,s\ldots\lambda \end{pmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

par $\frac{1.2\ldots(m-p)}{(z-\varrho^2)^{m-p}}$, et faisant ensuite $z = \varrho^2$.

Si l'on opère de même sur les identités:

$$\begin{pmatrix} \mu\,s\ldots\lambda \\ r\,s\ldots\lambda \end{pmatrix} = u_{r,1}\begin{pmatrix} \mu\,s\ldots\lambda\,r \\ r\,s\ldots\lambda\,1 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots u_{r,n}\begin{pmatrix} \mu\,s\ldots\lambda\,r \\ r\,s\ldots\lambda\,n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r\,\mu\ldots\lambda \\ r\,s\ldots\lambda \end{pmatrix} = u_{s,1}\begin{pmatrix} r\,\mu\ldots\lambda\,s \\ r\,s\ldots\lambda\,1 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots u_{s,n}\begin{pmatrix} r\,\mu\ldots\lambda\,s \\ r\,s\ldots\lambda\,n \end{pmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{pmatrix} r\,s\ldots\mu \\ r\,s\ldots\lambda \end{pmatrix} = u_{\lambda,1}\begin{pmatrix} r\,s\ldots\mu\,\lambda \\ r\,s\ldots\lambda\,1 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots u_{\lambda,n}\begin{pmatrix} r\,s\ldots\mu\,\lambda \\ r\,s\ldots\lambda\,n \end{pmatrix}$$

on trouvera que les valeurs (23) satisfont aux équations supprimées (24); elles satisfont donc aux équations (8). Par conséquent les formules

$$q_1 = H_p \begin{pmatrix} r\,s\,\ldots\,\lambda\,\mu \\ r\,s\,\ldots\,\lambda\,1 \end{pmatrix}^{(m-p)} \sin(\varrho t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_r = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$q_s = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$q_\lambda = 0$$
$$q_\mu = H_p \begin{pmatrix} r\,s\,\ldots\,\lambda\,\mu \\ r\,s\,\ldots\,\lambda\,\mu \end{pmatrix}^{(m-p)} \sin(\varrho t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

représentent un système d'intégrales particulières des équations (7).

Enfin, pour $p = m$, on aura le système d'intégrales particulières:

$$q_1 = H_m \begin{pmatrix} r\,s\,\ldots\,\nu \\ r\,s\,\ldots\,1 \end{pmatrix} \sin(\varrho t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_r = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$q_s = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$q_\nu = H_m \begin{pmatrix} r\,s\,\ldots\,\nu \\ r\,s\,\ldots\,\nu \end{pmatrix} \sin(\varrho t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

H_m étant une constante arbitraire, $\begin{pmatrix} r\,s\,\ldots\,\nu \\ r\,s\,\ldots\,\nu \end{pmatrix}$ un des déterminants mineurs principaux de l'ordre $n-m$ qui n'a pas de racines égales à ϱ^2. Le nombre des valeurs $q_r, q_s, \ldots$, égales à zéro, est ici $m-1$ et ces valeurs sont désignées par les indices du rang

$$r\,s\,v\ldots\nu$$

qui précédent le dernier ν.

En changeant les constantes $H_1, H_2, \ldots H_m$ en d'autres $H_1', H_2', \ldots H_m'$ et sin (ϱt) en cos (ϱt) on aura encore m systèmes d'intégrales particulières.

Ainsi chaque racine $z = \varrho^2$ de l'équation $D = 0$ donne des systèmes distincts d'intégrales particulières, dont le nombre est égal à deux fois le degré du facteur $z - \varrho^2$

dans D, et chaque système contient une constante arbitraire qui ne peut être exprimée par les autres.

Si l'on forme les intégrales particulières de cette espèce pour toutes les racines de l'équation $D=0$, et que l'on prenne ensuite la somme des valeurs qui répondent aux mêmes variables: $q_1, q_2 \ldots q_n$, on aura des expressions qui contiendront $2n$ constantes arbitraires distinctes, et seront, par conséquent, les intégrales générales des équations (7).

12) Le succès de la méthode que nous avons donnée pour trouver toutes les intégrales particulières qui répondent à la même racine de l'équation $D=0$, dépend, comme il est facile de le voir, de ce que les équations (8) deviennent indéterminées, de manière que dans le rang $h_1, h_2 \ldots h_n$ il y a des valeurs arbitraires dont le nombre est égal au degré de $z-\varrho^2$ dans D. Pour plus d'évidence nous supposerons que dans les formules précédentes on a

$$r=1,\ s=2,\ v=3 \ldots \nu=m,$$

ce qui est permis, sans restreindre nullement la généralité, car rien n'empêche de changer convenablement l'ordre des indices des valeurs $q_1, q_2 \ldots q_n$ et de toutes les autres qui leur correspondent. Alors, les valeurs particulières de $h_1, h_2 \ldots h_n$ qui répondent à m racines égales à ϱ^2 de l'équation $D=0$, seront:

$$\begin{array}{lllll}
H_1\binom{1}{1}^{(m-1)}, & H_1\binom{1}{2}^{(m-1)}, \ldots . & H_1\binom{1}{m}^{(m-1)}, \ldots . & H_1\binom{1}{n}^{(m-1)} & \\
0, & H_2\binom{1\,2}{1\,2}^{(m-2)}, \ldots . & H_2\binom{1\,2}{1\,m}^{(m-2)}, \ldots . & H_2\binom{1\,2}{1\,n}^{(m-2)} & \\
0, & 0, & H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}^{(m-3)}, & H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,4}^{(m-3)}, \ldots . & H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,m}^{(m-3)}, \ldots . H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,n}^{(m-3)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
0, & 0, & 0 \ldots \ldots . & H_m\binom{1\,2\,3 \ldots . m}{1\,2\,3 \ldots . m}, \ldots\ldots\ldots\ldots & H_m\binom{1\,2\,3 \ldots . m}{1\,2\,3 \ldots . n};
\end{array}$$

chaque système séparément représentant une solution des équations (8), il est évident que les sommes des valeurs correspondantes satisferont aussi à ces équations, c.-à-d. on peut poser:

$$\left.\begin{array}{ll}
h_1 & = H_1\binom{1}{1}^{(m-1)} \\
h_2 & = H_1\binom{1}{2}^{(m-1)} + H_2\binom{1\,2}{1\,2}^{(m-2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
h_m & = H_1\binom{1}{m}^{(m-1)} + H_2\binom{1\,2}{1\,m}^{(m-2)} + H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,m}^{(m-3)} + \ldots . H_m\binom{1\,2\,3 \ldots . m}{1\,2\,3 \ldots . m} \\
h_{m+1} & = H_1\binom{1}{m+1}^{(m-1)} + H_2\binom{1\,2}{1\,m+1}^{(m-2)} + H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,m+1}^{(m-3)} + \ldots . H_m\binom{1\,2\,3 \ldots . m}{1\,2\,3 \ldots . m+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
h_n & = H_1\binom{1}{n}^{(m-1)} + H_2\binom{1\,2}{1\,n}^{(m-2)} + H_3\binom{1\,2\,3}{1\,2\,n}^{(m-3)} + \ldots . H_m\binom{1\,2\,3 \ldots . m}{1\,2\,3 \ldots . m}
\end{array}\right\} \quad (26)$$

Au lieu de $H_1, H_2, \ldots H_m$ on peut prendre $h_1, h_2, \ldots h_m$ pour des constantes arbitraires et déterminer au moyen d'elles les valeurs de $H_1, H_2, \ldots H_m, h_{m+1}, \ldots h_n$ en résolvant les m premières des équations (26) par rapport à $H_1, H_2, \ldots H_m$, et substituant ensuite ces valeurs dans les expressions, de $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$. Les formules que nous trouverons ainsi auront toujours une forme déterminée, parce que les coefficients:

$$\binom{1}{1}^{(m-1)}, \binom{1\,2}{1\,2}^{(m-2)} \ldots \binom{1\,2\ldots m}{1\,2\ldots m}$$

qui entreront aux dénominateurs ne peuvent, dans aucun cas, être nuls.

13) Nous appliquerons notre méthode à deux exemples.

1. *Exemple.*

Soit le système d'équations

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \alpha^2 q_1 = 0$$
$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + \alpha^2 q_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^2q_n}{dt^2} + \alpha^2 q_n = 0,$$

on aura dans ce cas

$$D = \begin{bmatrix} \rho^2-\alpha^2 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots \\ 0 & \rho^2-\alpha^2 & 0 & 0\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \rho^2-\alpha^2 & 0\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} = (\rho^2-\alpha^2)^n$$

$$\binom{1}{1} = (\rho^2-\alpha^2)^{n-1}, \binom{1}{2} = 0, \binom{1}{3} = 0 \ldots \binom{1}{n} = 0$$

$$\binom{1\,2}{1\,2} = (\rho^2-\alpha^2)^{n-2}, \binom{1\,2}{1\,3} = 0, \ldots \binom{1\,2}{1\,n} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{1\,2\,3\ldots n-1}{1\,2\,2\ldots n-1} = \rho^2-\alpha^2, \binom{1\,2\,3\ldots n-1}{1\,2\,3\ldots\ n} = 0$$

$$\binom{1\,2\,3\ldots n}{1\,2\,3\ldots n} = 1.$$

Le déterminant D a n racines égales à α^2, et chacun des déterminants:

$$D, \binom{1}{1}, \binom{1\,2}{1\,2}, \ldots\ldots$$

a une racine α^2 de moins que le précédent; on peut donc se servir des déterminants mineurs $\binom{1}{1}\binom{1\,2}{1\,2}, \ldots$ pour former les intégrales particulières.

*

Le système des valeurs (26) se réduit à

$$h_1 = H_1 \binom{1}{1}^{(n-1)} = H_1(n-1)(n-2)\ldots 2.\ 1$$

$$h_2 = H_2 \binom{1\,2}{1\,2}^{(n-2)} = H_2(n-2)(n-3)\ldots 2.\ 1$$

$$h_3 = H_3 \binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}^{(n-3)} = H_3(n-3)(n-4)\ldots 2.\ 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_n = H_n \binom{1\,2\,3\ldots n}{1\,2\,3\ldots n} = H_n;$$

on peut donc considérer toutes les valeurs: $h_1, h_2 \ldots h_n$ comme des constantes arbitraires. Les intégrales particulières seront donc

$$h_1 \sin(\alpha t),\ h_2 \sin(\alpha t) \ldots h_n \sin(\alpha t),$$

et

$$h_1' \cos(\alpha t),\ h_2' \cos(\alpha t) \ldots h_n' \cos(\alpha t),$$

$h_1', h_2' \ldots h_n'$ désignant de nouvelles constantes arbitraires. Ces deux systèmes donnent les intégrales générales

$$q_1 = h_1 \sin(\alpha t) + h_1' \cos(\alpha t)$$

$$q_2 = h_2 \sin(\alpha t) + h_2' \cos(\alpha t)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_n = h_n \sin(\alpha t) + h_n' \cos(\alpha t).$$

2 *Exemple.*

Appliquons encore la méthode générale aux équations du n° 3:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\,x + by + bz = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\,x + ay + bz = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + b\,x + by + az = 0.$$

On aura dans ce cas

$$D = \begin{vmatrix} \rho^2 - a, & -b, & -b \\ -b, & \rho^2 - a, & -b \\ -b, & -b, & \rho^2 - a \end{vmatrix} = (\rho^2 - a + b)^2(\rho^2 - a + 2b)$$

$$\binom{1}{1} = (\rho^2 - a)^2 - b^2,\ \binom{1}{2} = b^2 + b(\rho^2 - a)\ \binom{1}{3} = b^2 + b(\rho^2 - a)$$

$$\binom{1\,2}{1\,2} = \rho^2 - a,\ \binom{1\,2}{1\,3} = b$$

$$\binom{1}{1}' = 2(\rho^2 - a),\ \binom{1}{2}' = b,\ \binom{1}{3}' = b.$$

Les intégrales particulières qui répondent à la racine double $\varrho^2 = a - b$ seront :

$$x = H_1\binom{1}{1}'\sin(\varrho t) = -2bH_1\sin(t\sqrt{a-b}),\ -bH_1'\cos(t\sqrt{a-b})$$
$$y = H_1\binom{1}{2}'\sin(\varrho t) = bH_1\sin(t\sqrt{a-b}),\ bH_1'\cos(t\sqrt{a-b})$$
$$z = H_1\binom{1}{3}'\sin(\varrho t) = bH_1\sin(t\sqrt{a-b}),\ bH_1'\cos(t\sqrt{a-b})$$
$$x = 0 \qquad 0 \qquad 0$$
$$y = H_2\binom{1\,2}{1\,2}\sin(\varrho t) = -bH_2\sin(t\sqrt{a-b}),\ -bH_2'\cos(t\sqrt{a-b})$$
$$y = H_2\binom{1\,2}{1\,3}\sin(\varrho t) = bH_2\sin(t\sqrt{a-b}),\ bH_2'\cos(t\sqrt{a-b})$$

et la racine simple $\varrho^2 = a + 2b$ donne les intégrales :

$$x = H\binom{1}{1}\sin(\varrho t) = 3b^2H\sin(t\sqrt{a+2b}),\ 3b^2H'\cos(t\sqrt{a+2b})$$
$$y = H\binom{1}{2}\sin(\varrho t) = 3b^2H\sin(t\sqrt{a+2b}),\ 3b^2H'\cos(t\sqrt{a+2b})$$
$$z = H\binom{1}{3}\sin(\varrho t) = 3b^2H\sin(t\sqrt{a+2b}),\ 3b^2H'\cos(t\sqrt{a+2b}).$$

Prenant les sommes des valeurs correspondantes on aura les intégrales générales :

$$x = -2bH_1\sin(t\sqrt{a-b}) - 2bH_1'\cos(t\sqrt{a-b}) + 3b^2H\sin(t\sqrt{a+2b}) + 3b^2H'\cos(t\sqrt{a+2b})$$
$$y = b(H_1-H_2)\sin(t\sqrt{a-b}) + b(H_1'-H_2')\cos(t\sqrt{a-b}) + 3bH\sin(t\sqrt{a+2b}) + 3b^2H'\cos(t\sqrt{a+2b})$$
$$z = b(H_1+H_2)\sin(t\sqrt{a-b}) + b(H_1'+H_2')\cos(t\sqrt{a-b}) + 3b^2H\sin(t\sqrt{a+2b}) + 3b^2H'\cos(t\sqrt{a+2b})$$

qui se réduisent aux formules du n° 3 :

$$x = A\sin(t\sqrt{a-b}) + A'\cos(t\sqrt{a-b}) + A_1\sin(t\sqrt{a+2b}) + A_1'\cos(t\sqrt{a+2b})$$
$$y = B\sin(t\sqrt{a-b}) + B'\cos(t\sqrt{a-b}) + A_1\sin(t\sqrt{a+2b}) + A_1'\cos(t\sqrt{a+2b})$$
$$z = -(A+B)\sin(t\sqrt{a-b}) - (A'+B')\cos(t\sqrt{a-b}) + A_1\sin(t\sqrt{a+2b}) + A_1'\cos(t\sqrt{a+2b}),$$

si l'on fait

$$-2bH_1 = A,\ -2bH_1' = A',\ 3b^2H = A_1,\ 3b^2H' = A_1'$$
$$b(H_1 - H_2) = B,\ b(H_1' - H_2') = B'.$$

14) Si l'équation $D = 0$ a une racine $\varrho^2 = 0$, les intégrales particulières de la forme

$$h_1\sin(\varrho t),\ h_2\sin(\varrho t) \ldots .\ h_n\sin(\varrho t) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (27)$$

qui répondent à cette racine, disparaissent, ce qui fait perdre n constantes arbitraires aux intégrales générales. — Mais on peut rétablir la généralité de ces dernières, en remplaçant les intégrales (27) respectivement par

$$h_1t,\ h_2t, \ldots .\ h_nt, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

c.-à-d. $\sin(\varrho t)$ par t; les constantes $h_1, h_2 \ldots h_n$ étant déterminées comme précédemment. En effet: supposant que ϱ diffère de zéro, on peut, sans nuire à la généralité, remplacer les valeurs (27) par celle-ci:

$$h_1 \frac{\sin(\varrho t)}{\varrho},\ h_2 \frac{\sin(\varrho t)}{\varrho}, \ldots\ h_n \frac{\sin(\varrho t)}{\varrho}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

et si l'on conçoit ensuite que les coefficients des équations différentielles (7) varient de manière que ϱ converge vers zéro, le rapport $\frac{\sin(\varrho t)}{\varrho}$, à la limite, deviendra égal à t, ce qui réduira les valeurs (29) à (28).

On peut facilement vérifier que les valeurs (28), substituées respectivement à $q_1, q_2 \ldots q_n$, satisfont aux équations (7); cette substitution assujettit les constantes $h_1, h_2 \ldots h_n$ à satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
0 &= b_{1,1}\, h_1 + b_{1,2}\, h_2 + \ldots b_{1,n}\, h_n \\
0 &= b_{2,1}\, h_1 + b_{2,2}\, h_2 + \ldots b_{2,n}\, h_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= b_{n,1}\, h_1 + b_{n,2}\, h_2 + \ldots b_{n,n}\, h_n,
\end{aligned}$$

qui ne sont autre chose que les équations (8) pour $\varrho = 0$; par conséquent les valeurs: $h_1, h_2, \ldots h_n$ seront déterminées par les régles précédentes.

Ainsi, le seul cas, dans lequel le temps se trouve hors du signe *sin* et *cos* dans les intégrales des équations (7), est celui quand l'équations $D = 0$ a des racines égales à zéro. — Mais alors les variables $q_1, q_2 \ldots q_n$ ne peuvent rester infiniment petites, à moins que leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées $q_1', q_2' \ldots q_n'$, qui servent à déterminer les constantes arbitraires des intégrales, ne fassent disparaitre tous les termes qui contiennent t hors des signes *sin* et *cos*.

Pour que l'équation $D = 0$ n'ait pas de racines égales à zéro; son dernier terme, qui est le déterminant

$$\begin{aligned}
&b_{1,1}\ b_{1,2} \ldots\ldots\ldots b_{1,n} \\
&b_{2,1}\ b_{2,2} \ldots\ldots\ldots b_{2,n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&b_{n,1}\ b_{n,2} \ldots\ldots\ldots b_{n,n}
\end{aligned}$$

ne doit pas être nul; dans ce cas la fonction

$$U_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma\, b_{r,s}\, q_r\, q_s,$$

ne pourra s'évanouir pour aucun système de valeurs $q_1, q_2 \ldots q_n$ qui ne seraient pas nulles à la fois, tout en conservant le signe (—). Donc, quand cette condition est remplie, les variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, déterminées par les équations (7), resteront très petites, et l'équilibre des forces qui sollicitent les points $m_1, m_2 \ldots m_n$ sera nécessairemant stable pour $q_1 = 0,\ q_2 = 0 \ldots q_n = 0$.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIe SÉRIE.
TOME I, N° 15 ET DERNIER.

SUR L'INTERPOLATION

PAR

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

PAR

P. Tchébychef,
Membre de l'Académie.

Lu le 29 avril 1859.

ST.-PÉTERSBOURG, 1859.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
à St.-Pétersbourg, MM. Eggers et Comp., **à Riga,** M. Samuel Schmidt, **à Leipzig,** M. Léopold Voss.
Prix: 25 Kop. arg. = 8 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

C. Vesséłofski, Secrétaire perpétuel.

Octobre 1859.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

SUR L'INTERPOLATION

PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

Par **P. Tchébychef.**

Dans le Mémoire *Sur les fractions continues* [1]) j'ai donné la série qui présente le résultat définitif de l'interpolation parabolique par la méthode des *moindres carrés*. Comme cette série fournit directement l'expression de la fonction interpolée sous la forme d'un polynome avec les coefficients les plus probables, et sans qu'on fixe d'avance le nombre de ses termes, on conçoit que, sous le rapport théorique, elle ne laisse rien à désirer pour l'interpolation parabolique. Mais pour rendre son usage tout-à-fait praticable, il restait à indiquer la marche commode à suivre dans l'évaluation de ses termes. C'est ce que nous avons fait pour le cas le plus simple où les valeurs de la variable, correspondantes aux valeurs connues de la fonction interpolée, sont équidistantes. En traitant ce cas particulier dans la note *Sur une nouvelle formule* [2]), nous avons indiqué une réduction de notre série à la formule que voici, très propre à l'application:

$$u = \frac{1}{n}\sum u_i \cdot \varphi_0(z) + \frac{3}{n(n^2-1^2)}\sum \frac{i}{1}\frac{n-i}{1}\Delta u_i \cdot \varphi_1(z)$$
$$+ \frac{5}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}\sum \frac{i(i+1)}{1.2}\frac{(n-i)(n-i-1)}{1.2}\Delta^2 u_i \cdot \varphi_2(z)$$
$$+ \frac{7}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}\sum \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}\frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_i \cdot \varphi_3(z)$$
$$+ \text{ etc.},$$

en désignant par

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n$$

les valeurs données de u qui correspondent aux valeurs équidistantes de x

$$x = x_1,\ x_2,\ x_2, \ldots x_n,$$

1) Journal de M. Liouville, T. III, 2me série.
2) Mélanges mathématiques et astronomiques, T. II.

et en faisant, pour abréger,

$$z = \frac{x - \frac{1}{2}(x_1 + x_n)}{x_2 - x_1}.$$

Dans cette série les signes de sommation s'étendent à toutes les valeurs de i, depuis $i = 1$, jusqu'à $i = n$, et

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \varphi_3(z), \ldots\ldots$$

sont des fonctions entières de z qu'on tire de la formule

$$\Delta^l\left(z + \frac{n-1}{2}\right)\left(z + \frac{n-3}{2}\right)\ldots\left(z + \frac{n-2l+1}{2}\right)\left(z - \frac{n+1}{2}\right)\left(z - \frac{n+3}{2}\right)\ldots\left(z - \frac{n+2l-1}{2}\right),$$

en adoptant pour l les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots$$

Comme ces fonctions sont liées entre elles par l'équation

$$\varphi_l(z) = 2(2l-1)z\varphi_{l-1}(z) - (l-1)^2[n^2 - (l-1)^2]\varphi_{l-2}(z),$$

et que

$$\varphi_0(z) = \Delta^0 1 = 1,$$
$$\varphi_1(z) = \Delta\left(z + \frac{n-1}{2}\right)\left(z - \frac{n+1}{2}\right) = 2z,$$

on trouve sur le champ

$$\varphi_2(z) = 12z^2 - (n^2 - 1),$$
$$\varphi_3(z) = 120z^3 - 6(3n^2 - 7)z,$$
$$\varphi_4(z) = 1680z^4 - 120(3n^2 - 13)z^2 + 9(n^2 - 1)(n^2 - 9),$$
$$\varphi_5(z) = 30240z^5 - 8400(n^2 - 7)z^3 + 32(15n^4 - 230n^2 + 407)z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce développement de u qui résulte de notre série, tant que les valeurs

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots x_n$$

sont équidistantes, est très commode pour l'évaluation de l'expression de u, vu que ses termes, comme ceux de la formule d'interpolation de Newton, contiennent les différences

$$\Delta u_i,\ \Delta^2 u_i,\ \Delta^3 u_i, \ldots\ldots,$$

dont les ordres vont en croissant, et que ces différences, sous les signes de sommation, ne sont accompagnées que des facteurs

$$\frac{i}{1},\ \frac{n-i}{1},$$
$$\frac{i(i+1)}{1.2},\ \frac{(n-i)(n-i-1)}{1.2},$$
$$\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3},\ \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui, d'après la propriété connue des nombres polygonaux, s'évaluent aisément par seule voie d'addition. Et comme cette série nous fournit l'expression de u avec les coefficients les plus probables, on conçoit qu'elle ne laisse rien à désirer pour l'interpolation dans le cas particulier où les valeurs de la variable qui correspondent aux valeurs connues de la fonction sont équidistantes.

Mais ce n'est pas le seul parti qu'on puisse tirer de notre série pour l'application; son usage est aussi très utile dans tous les autres cas d'interpolation parabolique, comme nous allons le montrer à présent, en indiquant la marche qui conduit aisément à la détermination successive de ses termes. On verra, d'après cela, que notre série procure un moyen très propre pour évaluer, terme par terme, l'expression de la fonction interpolée u, et qu'elle donne, en même temps, la somme des carrés des différences entre ses valeurs connues

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,$$

et celles qui résultent de l'ensemble des termes trouvés pour son expression. D'après quoi on aura, sur le champ, l'erreur moyenne avec laquelle les termes trouvés de u représentent ses valeurs données, et par là on reconnaîtra tout de suite celui auquel on peut s'arrêter. Ainsi, au moyen de notre série, on trouvera tout à la fois et le nombre de termes de u qui sont importants pour l'interpolation et leurs coefficients déterminés par la méthode des moindres carrés. Pour faire comprendre la supériorité de cette méthode d'interpolation sur celles dont on se sert ordinairement, remarquons qu'elle donnera précisément, en général plus aisément, les mêmes résultats, que ceux que l'on trouve par la résolution des équations fournies par la méthode des *moindres carrés* qui suppose que le nombre des termes dans l'expression de u soit fixé d'avance. D'autre part, en déterminant et le nombre de termes de u que l'on doit calculer et leurs valeurs prescrites par la méthode des moindres carrés, elle sera, si ce n'est dans certains cas exceptionnels, plus expéditive que la méthode d'interpolation de Cauchy qui est loin de donner les résultats les plus probables découlant de la méthode des moindres carrés.

§ I.

D'après ce que nous avons montré dans le Mémoire cité plus haut, si les valeurs données de la fonction u

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n$$

qui correspondent à

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

sont affectées d'erreurs de la même nature, et que l'on cherche son expression, par la méthode des *moindres carrés*, sous la forme d'un polynome de degré quelconque, on aura*)

$$u = K_0\psi_0(x) + K_1\psi_1(x) + K_2\psi_2(x) + \ldots\ldots,$$

*) Nous n'emprunterons de notre Mémoire antérieur que la forme de cette série; mais tout ce qui est important pour son application sera donné dans ce qui suit.

où

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ldots\ldots$$

sont des coefficients constants, et

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots\ldots$$

les dénominateurs des réduites de la somme

$$\sum\frac{1}{x-x_i}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{x-x_n},$$

qu'on trouve par son développement en fraction continue

$$\frac{\alpha_1}{q_1}+\frac{\alpha_2}{q_2}+\frac{\alpha_3}{q_3}+\ldots\ldots$$

Dans cette fraction les constantes

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots\ldots$$

peuvent être choisies arbitrairement. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'elles sont choisies de manière à ce que les coefficients de x dans les quotients

$$q_1,\ p_2,\ q_3,\ldots\ldots$$

soient égaux à 1, et nous désignerons par

$$a_1,\ -a_2,\ -a_3,\ldots\ldots$$

les valeurs de

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots\ldots$$

qui remplissent cette condition. D'après cela, et en remarquant que les dénominateurs

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ldots\ldots$$

seront des fonctions du premier degré, on aura, pour la détermination des fonctions

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots\ldots,$$

ce développement de

$$\sum\frac{1}{x-x_i}$$

en fraction continue:

$$\sum\frac{1}{x-x_i}=\frac{a_1}{x-b_1}-\frac{a_2}{x-b_2}-\frac{a_3}{x-b_3}-\ldots\ldots$$

D'où l'on tire, pour l'évaluation de ses réduites

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},\ \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},\ldots\ldots\frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)},\ldots\ldots,$$

les formules suivantes:

$$(1)\ldots\begin{cases}\psi_0(x)=1, & \varphi_0(x)=o,\\ \psi_1(x)=x-b_1, & \varphi_1(x)=a_1,\\ \psi_2(x)=(x-b_2)\psi_1(x)-a_2\psi_0(x), & \varphi_2(x)=(x-b_2)\varphi_1(x)-a_2\varphi_0(x),\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \psi_\lambda(x)=x-b_\lambda)\psi_{\lambda-1}(x)-a_\lambda\psi_{\lambda-2}(x), & \varphi_\lambda(x)=(x-b_\lambda)\varphi_{\lambda-1}(x)-a_\lambda\varphi_{\lambda-2}(x),\end{cases}$$

et par là, en faisant

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases}\psi_0(x)\sum\frac{1}{x-x_i}-\varphi_0(x)=R_0,\\ \psi_1(x)\sum\frac{1}{x-x_i}-\varphi_1(x)=R_1,\\ \psi_2(x)\sum\frac{1}{x-x_i}-\varphi_2(x)=R_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_\lambda(x)\sum\frac{1}{x-x_i}-\varphi_\lambda(x)=R_\lambda,\end{cases}$$

on obtient, relativement aux fonctions

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ldots\ldots R_\lambda,$$

cette suite d'équations:

$$(3)\ldots\ldots\begin{cases}R_0=\sum\frac{1}{x-x_i},\\ R_1=(x-b_1)R_0-a_1,\\ R_2=(x-b_2)R_1-a_2R_0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ R_\lambda=(x-b_\lambda)R_{\lambda-1}-a_\lambda R_{\lambda-2}.\end{cases}$$

C'est au moyen de ces formules que nous parviendrons à déterminer toutes les quantités qui sont importantes pour l'évaluation des termes de notre série.

§ II.

Comme les réduites

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},\ \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},\ldots\ldots\frac{\varphi_\mu(x)}{\psi_\mu(x)},\ \frac{\varphi_{\mu+1}(x)}{\psi_{\mu+1}(x)},\ldots\ldots$$

de la fraction continue

$$\frac{a_1}{x-b_1} - \frac{a_2}{x-b_2} - \frac{a_3}{x-b_3} - \cdots$$

qui résulte du développement de

$$\sum \frac{1}{x-x_i}$$

ont pour dénominateurs les fonctions

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots\ \psi_\mu(x),\ \psi_{\mu+1}(x),\ \ldots,$$

respectivement des degrés

$$0, 1, 2, \ldots, \mu, \mu+1, \ldots,$$

la fraction

$$\frac{\varphi_\mu(x)}{\psi_\mu(x)}$$

représentera la valeur de

$$\sum \frac{1}{x-x_i}$$

exactement jusqu'à $\frac{1}{x^{2\mu}}$, et, par consequent, la différence

$$\sum \frac{1}{x-x_i} - \frac{\varphi_\mu(x)}{\psi_\mu(x)}$$

sera de degré inférieur à -2μ. Mais la fonction $\psi_\mu(x)$ étant du degré μ, cela suppose que l'expression

$$R_\mu = \psi_\mu(x) \sum \frac{1}{x-x_i} - \varphi_\mu(x),$$

est d'un degré inférieur à $-\mu$, et de là on conclura que son développement ne peut contenir les termes avec des puissances de x supérieures à $x^{-\mu-1}$. Donc, on aura

$$R_\mu = \frac{(\mu,\mu)}{x^{\mu+1}} + \frac{(\mu,\mu+1)}{x^{\mu+2}} + \frac{(\mu,\mu+2)}{x^{\mu+3}} + \cdots,$$

en désignant par

$$(\mu,\mu),\ (\mu,\mu+1),\ (\mu,\mu+2),\ \ldots$$

les coefficients de

$$\frac{1}{x^{\mu+1}},\ \frac{1}{x^{\mu+2}},\ \frac{1}{x^{\mu+3}},\ \ldots$$

dans le développement de R_μ.

D'après cela, en adoptant pour l'indice μ les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots\lambda-2,\ \lambda-1,\ \lambda,$$

on trouve pour les fonctions

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ldots\ldots R_{\lambda-1},\ R_{\lambda-2},\ R_\lambda$$

les développements suivants:

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases} R_0=\frac{(0,0)}{x}+\frac{(0,1)}{x^2}+\frac{(0,2)}{x^3}+\ldots\ldots, \\ R_1=\frac{(1,1)}{x^2}+\frac{(1,2)}{x^3}+\frac{(1,3)}{x^4}+\ldots\ldots, \\ R_2=\frac{(2,2)}{x^3}+\frac{(2,3)}{x^4}+\frac{(2,4)}{x^5}+\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{\lambda-2}=\frac{(\lambda-2,\lambda-2)}{x^{\lambda-1}}+\frac{(\lambda-2,\lambda-1)}{x^\lambda}+\frac{(\lambda-2,\lambda)}{x^{\lambda+1}}+\ldots\ldots, \\ R_{\lambda-1}=\frac{(\lambda-1,\lambda-1)}{x^\lambda}+\frac{(\lambda-1,\lambda)}{x^{\lambda+1}}+\frac{(\lambda-1,\lambda+1)}{x^{\lambda+2}}+\ldots\ldots, \\ R_\lambda=\frac{(\lambda,\lambda)}{x^{\lambda+1}}+\frac{(\lambda,\lambda+1)}{x^{\lambda+2}}+\frac{(\lambda,\lambda+2)}{x^{\lambda+3}}+\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ldots\ldots,$$
$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ldots\ldots,$$
$$(2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\lambda-2,\lambda-2),\ (\lambda-2,\lambda-1),\ (\lambda-2,\lambda),\ldots\ldots\ldots,$$
$$(\lambda-1,\lambda-1),\ (\lambda-1,\lambda),\ (\lambda-1,\lambda+1),\ldots\ldots\ldots,$$
$$(\lambda,\lambda),\ (\lambda,\lambda+1),\ (\lambda,\lambda+2),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

sont des valeurs constantes qui se présentent comme quantités auxiliaires.

§ III.

En portant dans les formules (3) les développements de

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ldots R_{\lambda-2},\ R_{\lambda-1},\ R_\lambda,$$

d'après (4), on obtiendra cette suite de formules:

$$\sum\frac{1}{x-x_i}=\frac{(0,0)}{x}+\frac{(0,1)}{x^2}+\frac{(0,2)}{x^3}+\ldots\ldots,$$

$$\frac{(1,1)}{x^2}+\frac{(1,2)}{x^3}+\frac{(1,3)}{x^4}+\ldots\ldots\ldots=(x-b_1)\left[\frac{(0,0)}{x}+\frac{(0,1)}{x^2}+\frac{(0,2)}{x^3}+\ldots\ldots\right]$$
$$-a_1,$$

$$\frac{(2,2)}{x^3}+\frac{(2,3)}{x^4}+\frac{(2,4)}{x^5}+\ldots\ldots\ldots=(x-b_2)\left[\frac{(1,1)}{x^2}+\frac{(1,2)}{x^3}+\frac{(1,3)}{x^4}+\ldots\ldots\right]$$
$$-a_2\left[\frac{(0,0)}{x}+\frac{(0,1)}{x^2}+\frac{(0,2)}{x^3}+\ldots\ldots\right],$$

. . . .

$$\frac{(\lambda,\lambda)}{x^{\lambda+1}}+\frac{(\lambda,\lambda+1)}{x^{\lambda+3}}+\frac{(\lambda,\lambda+2)}{x^{\lambda+3}}+\ldots\ldots=(x-b_\lambda)\left[\frac{(\lambda-1,\lambda-1)}{x^\lambda}+\frac{(\lambda-1,\lambda)}{x^{\lambda+1}}+\frac{(\lambda-1,\lambda+1)}{x^{\lambda+2}}+\ldots\ldots\right]$$
$$-a_\lambda\left[\frac{(\lambda-2,\lambda-2)}{x^{\lambda-1}}+\frac{(\lambda-2,\lambda-1)}{x^\lambda}+\frac{(\lambda-2,\lambda)}{x^{\lambda+1}}+\ldots\ldots\right].$$

La première de ces formules, d'après le développement de

$$\sum\frac{1}{x-x_i}$$

en série

$$\frac{\Sigma x_i^0}{x}+\frac{\Sigma x_i}{x^2}+\frac{\Sigma x_i^2}{x^3}+\ldots\ldots,$$

nous donne

$$\frac{\Sigma x_i^0}{x}+\frac{\Sigma x_i}{x^2}+\frac{\Sigma x_i^2}{x^3}+\ldots\ldots=\frac{(0,0)}{x}+\frac{(0,1)}{x^2}+\frac{(0,2)}{x^3}+\ldots\ldots$$

D'où il suit

$$(0,0)=\Sigma x_i^0,\ (0,1)=\Sigma x_i,\ (0,2)=\Sigma x_i^2,\ldots\ldots$$

Par la seconde on obtient, en égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x,

$$0=(0,0)-a_1,\ 0=(0,1)-b_1(0,0),\ (1,1)=(0,2)-b_1(0,1),$$
$$(1,2)=(0,3)-b_1(0,2),\ (1,3)=(0,4)-b_1(0,3),\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui nous donne

$$a_1=(0,0),\ b_1=\frac{(0,1)}{(0,0)},$$
$$(1,1)=(0,2)-b_1(0,1),\ (1,2)=(0,3)-b_1(0,2),\ (1,3)=(0,4)-b_1(0,3),\ldots\ldots$$

En traitant de la même manière toutes les autres formules on reconnaitra qu'en général, dans le cas de $\lambda>1$, les quantités a_λ et b_λ se déterminent ainsi:

$$a_\lambda=\frac{(\lambda-1,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)},\ b_\lambda=\frac{(\lambda-1,\lambda)}{(\lambda-1,\lambda-1)}-\frac{(\lambda-2,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)},$$

et que toutes les quantités

$$(\lambda, \lambda), (\lambda, \lambda+1), \lambda.\ \lambda+2), \ldots\ldots,$$

en fonction de

$$(\lambda-2,\ \lambda-2),\ (\lambda-2,\ \lambda-1),\ (\lambda-2,\lambda)\ldots\ldots,$$
$$(\lambda-1,\ \lambda-1),\ (\lambda-1,\ \lambda),\ (\lambda-1,\ \lambda+1),\ \ldots,$$

se trouvent par cette formule:

$$(\lambda, \mu) = (\lambda-1, \mu+1) - b_\lambda(\lambda-1, \mu) - a_\lambda(\lambda-2, \mu).$$

On trouvera ainsi successivement les quantités

$$a_1,\ b_1,$$
$$a_2,\ b_2,$$
$$a_3,\ b_3,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$

et avec ces quantités, d'après (1), on obtiendra aisément les fonctions

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots\ldots\ldots$$

qui entrent dans la composition des termes de notre série.

§ IV.

En passant à la détermination des coefficients de notre série, nous montrerons qu'en vertu des formules (2) et (4) on aura

(5) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma x_i^{\mu}\psi_\lambda(x_i) = 0,$

si $\mu < \lambda$, et

(6) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma x_i^{\mu}\psi_\lambda(x_i) = (\lambda, \mu),$

si $\mu =$ ou $> \lambda$.

Pour y parvenir, remarquons que d'après (2)

$$R_\lambda = \sum \frac{\psi_\lambda(x)}{x - x_i} - \varphi_\lambda(x),$$

et comme le reste de le division de $\psi_\lambda(x)$ par $x - x_i$ est égal à $\psi_\lambda(x_i)$, cette formule se réduit à celle-ci:

$$R_\lambda = \sum\left[F(x, x_i) + \frac{\psi_\lambda(x_i)}{x - x_i}\right] - \varphi_\lambda(x),$$

où $F(x, x_i)$ est une fonction entière qu'on trouve en quotient dans la division de $\psi_\lambda(x)$ par $x - x_i$. Or si l'on décompose la somme

$$\sum\left[F(x, x_i) + \frac{\psi(x_i)}{x - x_i}\right]$$

en deux parties

$$\sum F(x, x_i), \quad \sum\frac{\psi(x_i)}{x - x_i},$$

et que l'on développe, dans la somme

$$\sum\frac{\psi(x_i)}{x - x_i},$$

la fraction

$$\frac{1}{x - x_i}$$

en série

$$\frac{1}{x} + \frac{x_i}{x^2} + \frac{x_i^2}{x^3} + \ldots\ldots,$$

cette formule nous donnera

$$R_\lambda = \sum F(x, x_i) - \varphi_\lambda(x) + \frac{\Sigma\psi_\lambda(x_i)}{x} + \frac{\Sigma x_i\psi_\lambda(x_i)}{x^2} + \frac{\Sigma x_i^2\psi_\lambda(x_i)}{x^3} \ldots\ldots,$$

ce qui suppose, d'après (5), l'identité de ces deux suites:

$$\sum F(x, x_i) - \varphi_\lambda(x) + \frac{\Sigma\psi_\lambda(x_i)}{x} + \frac{\Sigma x_i\psi_\lambda(x_i)}{x^2} + \frac{\Sigma x_i^2\psi_\lambda(x_i)}{x^3} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{(\lambda, \lambda)}{x^{\lambda+1}} + \frac{(\lambda, \lambda+1)}{x^{\lambda+2}} + \frac{(\lambda, \lambda+2)}{x^{\lambda+3}} + \ldots\ldots$$

Mais comme

$$\Sigma F(x, x_i), \ \varphi_\lambda(x)$$

sont des fonctions entières, cela ne peut avoir lieu à moins que les termes avec les dénominateurs

$$x, x^2, x^3, \ldots\ldots x^\lambda, x^{\lambda+1}, x^{\lambda+2}, \ldots\ldots,$$

dans ces deux suites, ne soient respectivement égaux. Donc

$$\Sigma\psi_\lambda(x_i) = 0, \ \Sigma x_i\psi_\lambda(x_i) = 0, \ \Sigma x_i^2\psi_\lambda(x_i) = 0, \ldots\ldots \Sigma x_i^{\lambda-1}\psi_\lambda(x_i) = 0,$$

$$\Sigma x_i^\lambda\psi_\lambda(x_i) = (\lambda, \lambda), \ \Sigma x_i^{\lambda+1}\psi_\lambda(x_i) = (\lambda, \lambda+1), \ldots\ldots,$$

ce qui prouve les équations (5) et (6).

D'après cela il est aisé de déterminer les coefficients

$$K_0, \ K_1, \ K_2, \ldots\ldots$$

de la série

$$u = K_0\psi_0(x) + K_1\psi_1(x) + K_2\psi_2(x) + \ldots\ldots$$

Pour cela multiplions la série par x_i^{μ}, où μ est un nombre quelconque, et sommons ses termes pour toutes les valeurs de

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots x_n.$$

Nous obtiendrons ainsi

$$\Sigma x_i^{\mu} u_i = K_0 \Sigma x_i^{\mu} \psi_0(x_i) + K_1 \Sigma x_i^{\mu} \psi_1(x_i) + K_2 \Sigma x_i^{\mu} \psi_2(x_i) + \ldots\ldots,$$

où par u_i nous désignons la valeur de u qui correspond à $x = x_i$, et comme, en vertu de (5) et (6), on aura

$$\Sigma x_i^{\mu} \psi_0(x) = (0, \mu),\ \Sigma x_i^{\mu} \psi_1(x_i) = (1, \mu), \ldots\ldots \Sigma x_i^{\mu} \psi_{\mu}(x_i) = (\mu, \mu),$$
$$\Sigma x_i^{\mu} \psi_{\mu+1}(x_i) = 0,\ \Sigma x_i^{\mu} \psi_{\mu+2}(x_i) = 0,\ \Sigma x_i^{\mu+1} \psi_{\mu+3}(x_i) = 0, \ldots\ldots,$$

il en résulte

$$\Sigma x_i^{\mu} u_i = (0, \mu)\ K_0 + (1, \mu)\ K_1 + \ldots\ldots + (\mu - 1, \mu)\ K_{\mu-1} + (\mu, \mu)\ K_{\mu}.$$

D'où, pour la détermination du coefficient K_{μ}, en fonction des coefficients K_0, K_1,... $K_{\mu-1}$, on tire cette formule très simple:

$$K_{\mu} = \frac{\Sigma x_i^{\mu} u_i - (0, \mu) K_0 - (1, \mu) K_1 - \ldots\ldots - (\mu - 1, \mu) K_{\mu-1}}{(\mu, \mu)}.$$

En adoptant ici pour l'indice μ les valeurs 0, 1, 2, 3,....., on obtient, pour la détermination successive des coefficients

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ K_3, \ldots\ldots,$$

cette suite d'équations:

$$K_0 = \frac{\Sigma u_i}{(0, 0)},$$

$$K_1 = \frac{\Sigma x_i u_i - (0, 1) K_0}{(1, 1)},$$

$$K_2 = \frac{\Sigma x_i^2 u_i - (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1}{(2, 2)},$$

$$K_3 = \frac{\Sigma x_i^3 u_i - (0, 3) K_0 - (1, 3) K_1 - (2, 3) K_2}{(3, 3)},$$

.....

§ V.

Il nous reste à montrer comment on parviendra d'une manière facile à trouver la somme des carrés des différences entre les valeurs données de u

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots\ldots u_n,$$

correspondantes à

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots x_n,$$

et celle qui, pour les mêmes valeurs de x, résulte de notre série arrêtée au terme $K_\lambda \psi_\lambda(x)$, λ étant un nombre quelconque.

Pour y parvenir, nous allons montrer qu'on aura

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma \psi_\mu(x_i)\ \psi_\nu(x_i) = 0,$$

tant que $\nu < \mu$, et

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma \psi_\mu(x_i)\ \psi_\nu(x_i) = (\mu,\ \mu),$$

dans le cas de $\mu = \nu$.

En effet, d'après (1), la fonction $\psi_\nu(x)$ sera de la forme

$$x^\nu + A_1 x^{\nu-1} + A_2 x^{\nu-2} + \ldots\ldots,$$

et par conséquent on aura

$$(9)\ldots\ldots \Sigma\psi_\mu(x_i)\psi_\nu(x_i) = \Sigma x_i^{\ \nu}\psi_\mu(x_i) + A_1 \Sigma x_i^{\ \nu-1}\psi_\mu(x_i) + A_2 \Sigma x_i^{\ \nu-2}\psi_\mu(x_i) + \ldots\ldots$$

Mais en vertu de (5), dans le cas de $\nu < \mu$, toutes les sommes

$$\Sigma x_i^{\ \nu}\psi_\mu(x_i),\ \Sigma x_i^{\ \nu-1}\psi_\mu(x_i),\ \Sigma x_i^{\ \nu-2}\psi_\mu(x_i), \ldots\ldots$$

se réduisent à zéro, et par là, d'après la formule précédente, on trouvera

$$\Sigma \psi_\mu(x_i)\ \psi_\nu(x_i) = 0,$$

ce qui prouve l'équation (7).

De même, dans le cas de

$$\mu = \nu,$$

on trouve, d'après (5) et (6), que la somme

$$\Sigma x_i^{\ \nu}\psi_\mu(x_i)$$

est égale à $(\mu,\ \mu)$, et que les sommes

$$\Sigma x_i^{\ \nu-1}\psi_\mu(x_i),\ \Sigma x_i^{\ \nu-2}\psi_\mu(x_i), \ldots\ldots$$

s'annulent. En vertu de quoi, pour $\mu = \nu$, la formule (9) nous donne l'équation (8)

$$\Sigma \psi_\mu(x_i)\psi_\nu(x_i) = (\mu,\ \mu).$$

Au moyen des équations (7) et (8), que nous venons de prouver, il est aisé de montrer qu'on aura toujours

$$)10)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma u_i \psi_\mu(x_i) = (\mu,\ \mu) K_\mu.$$

Pour s'en assurer, observons que notre série

$$u = K_0\psi_0(x) + K_1\psi_1(x) + K_2\psi_2(x) + \ldots\ldots,$$

prolongée jusqu'au dernier terme, représente exactement toutes les valeurs données de u

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots u_n,$$

et par là on aura

$$\Sigma u_i\psi_\mu(x_i) = K_0\Sigma\psi_0(x_i)\psi_\mu(x_i) + K_1\Sigma\psi_1(x_i)\psi_\mu(x_i) + K_2\Sigma\psi_2(x_i)\psi_\mu(x_i) + \ldots\ldots$$

Mais d'après (7) les sommes

$$\Sigma\psi_0(x_i)\psi_\mu(x_i),\ \Sigma\psi_1(x_i)\psi_\mu(x_i),\ldots\ldots\ \Sigma\psi_{\mu-1}(x_i)\psi_\mu(x_i),\ \Sigma\psi_{\mu+1}(x_i)\psi_\mu(x_i),\ldots\ldots$$

s'annulent, et d'après (8) on trouve

$$\Sigma\psi_\mu(x_i)\psi_\mu(x_i) = (\mu,\ \mu).$$

Donc le développement précedent de $\Sigma u_i\psi(x_i)$ se réduira à un terme

$$(\mu,\ \mu)\,K_\mu,$$

ce qui nous donne l'équation (10).

En vertu des équations démontrées, il est aisé de trouver la somme

$$\Sigma[u_i - K_0\psi_0(x_i) - K_1\psi_1(x_i) - \ldots\ldots - K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]^2,$$

où

$$u_i,$$

pour $i = 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots n$, désigne les valeurs données de u

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots u_n,$$

et l'expression

$$K_0\psi_0(x_i) + K_1\psi_1(x_i) + K_2\psi_2(x_i) + \ldots\ldots + K_\lambda\psi_\lambda(x_i)$$

leurs valeurs approchées, obtenues par notre série, arrêtée au terme $K_\lambda\psi_\lambda(x)$.

Pour cela mettons le carré

$$[u_i - K_0\psi_0(x_i) - K_1\psi_1(x_i) - K_2\psi_2(x) \ldots\ldots - K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]^2$$

sous la forme

$$\begin{aligned}
&u_i^2 - 2u_i[K_0\psi_0(x_i) + K_1\psi_1(x_i) + K_2\psi_2(x_i) + \ldots\ldots + K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]\\
&+ K_0\psi_0(x_i)[K_0\psi_0(x_i) + K_1\psi_1(x_i) + K_2\psi_2(x_i) + \ldots\ldots + K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]\\
&+ K_1\psi_1(x_i)[K_0\psi_0(x_i) + K_1\psi_1(x_i) + K_2\psi_2(x_i) + \ldots\ldots + K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ K_\lambda\psi_\lambda(x_i)[K_0\psi_0(x_i) + K_1\psi_1(x_i) + K_2\psi_2(x_i) + \ldots\ldots + K_\lambda\psi_\lambda(x_i)],
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\Sigma[u_i - K_0\psi_0(x_i) - K_1\psi_1(x_i) - K_2\psi_2(x_i) - \ldots\ldots - K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]^2$$
$$= \Sigma u_i^2 - 2K_0\Sigma u_i\psi_0(x_i) - 2K_1\Sigma u_i\psi_1(x_i) - 2K_2\Sigma u_i\psi_2(x_i) - \ldots - 2K_\lambda\Sigma u_i\psi_\lambda(x_i)$$
$$+ K_0^2\Sigma\psi_0(x_i)\psi_0(x_i) + K_0K_1\Sigma\psi_0(x_i)\psi_1(x_i) + K_0K_2\Sigma\psi_0(x_i)\psi_2(x_i) + \ldots + K_0K_\lambda\Sigma\psi_0(x_i)\psi_\lambda(x_i)$$
$$+ K_\lambda K_0\Sigma\psi_1(x_i)\psi_0(x_i) + K_1^2\Sigma\psi_1(x_i)\psi(x_i) + K_1K_2\Sigma\psi_1(x_i)\psi_2(x_i) + \ldots\ldots + K_1K_\lambda\Sigma\psi_1(x_i)\psi_\lambda(x_i)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ K_\lambda K_0\Sigma\psi_\lambda(x_i)\psi_0(x_i) + K_\lambda K_1\Sigma\psi_\lambda(x_i)\psi_1(x_i) + K_\lambda K_2\Sigma\psi_\lambda(x_i)\psi_2(x_i) + \ldots + K_\lambda^2\Sigma\psi_\lambda(x_i)\psi_\lambda(x_i).$$

Mais d'après (10) nous aurons

$$\Sigma u_i\psi_0(x_i) = (0,0)K_0,\ \Sigma u_i\psi_1(x_i) = (1,1)K_1,\ \Sigma u_i\psi_2(x_i) = (2,2)K_2, \ldots\ldots,$$

et d'après (8) et (9)

$$\Sigma\psi_0(x_i)\psi_0(x_i) = (0,0),\ \Sigma\psi_1(x_i)\psi_1(x_i) = (1,1),\ \Sigma\psi_2(x_i)\psi_2(x_i) = (2,2), \ldots\ldots,$$
$$\Sigma\psi_1(x_i)\psi_0(x_i) = 0, \quad \Sigma\psi_2(x_i)\psi_0(x_i) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Sigma\psi_0(x_i)\psi_1(x_i) = 0, \quad \Sigma\psi_2(x_i)\psi_0(x_i) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Sigma\psi_0(x_i)\psi_2(x_i) = 0, \quad \Sigma\psi_1(x_i)\psi_2(x_i) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En vertu de quoi la formule précedente devient

$$\Sigma[u_i - K_0\psi_0(x_i) - K_1\psi_1(x_i) - K_2\psi_2(x_i) - \ldots\ldots - K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]^2$$
$$= \Sigma u_i^2 - 2(0,0)K_0^2 - 2(1,1)K_1^2 - 2(2,2)K_2^2 - \ldots - 2(\lambda,\lambda)K_\lambda^2$$
$$+ (0,0)K_0^2 + (1,1)K_1^2 + (2,2)K_2^2 + \ldots\ldots + (\lambda,\lambda)K_\lambda^2,$$

et se réduit à celle-ci:

$$\Sigma[u_i - K_0\psi_0(x_i) - K_1\psi_1(x_i) - K_2\psi_2(x_i) - \ldots\ldots - K_\lambda\psi_\lambda(x_i)]^2$$
$$= \Sigma u_i^2 - (0,0)K_0^2 - (1,1)K_1^2 - (2,2)K_2^2 - \ldots\ldots - (\lambda,\lambda)K_\lambda^2.$$

Telle est la formule donnant la somme des carrés des différences qui existent entre les valeurs données de u et leurs représentations par la série

$$u = K_0\psi_0(x) + K_1\psi_1(x) + K_2\psi_2(x) + \ldots\ldots,$$

arrêtée au terme $K_\lambda\psi_\lambda(x)$. En désignant, pour abréger, cette somme par

$$\Sigma d_\lambda^2,$$

nous aurons

$$\Sigma d_\lambda^{\,2} = \Sigma u_i^{\,2} - (0,0)\,K_0^{\,2} - (1,1)\,K_1^{\,2} - (2,2)\,K_2^{\,2} - \ldots\ldots - (\lambda,\lambda)\,K_\lambda^{\,2}.$$

D'où, pour la détermination successive des sommes

$$\Sigma d_0^{\,2},\ \Sigma d_1^{\,2},\ \Sigma d_2^{\,2}, \ldots\ldots$$

qui correspondent respectivement aux cas où notre série est arrêtée aux termes $1, 2, 3, \ldots$, résulte cette suite d'équations:

$$\begin{aligned}
\Sigma d_0^{\,2} &= \Sigma u_1^{\,2} - (0,0)\,K_0^{\,2},\\
\Sigma d_1^{\,2} &= \Sigma d_0^{\,2} - (1,1)\,K_1^{\,2},\\
\Sigma d_2^{\,2} &= \Sigma d_1^{\,2} - (2,2)\,K_2^{\,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

§ VI.

Nous allons maintenant résumer les formules définitives par lesquelles on parviendra à calculer, terme par terme, l'expression de u d'après la série

$$u = K_0\psi_0(x) + K_1\psi_1(x) + K_2\psi_2(x) + \ldots\ldots,$$

et on connaîtra, en même temps, la somme des carrés des erreurs commises dans la représentation des valeurs données de u, en s'arrêtant aux termes $1, 2, 3, \ldots\ldots\lambda$.

Dans ces formules, suivant la notation employée, les valeurs données de la fonction u et de la variable x sont représentées par

$$\begin{aligned}
&u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots\ldots u_n,\\
&x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots x_n.
\end{aligned}$$

Les sommations s'étendent à toutes les valeurs de l'indice i, depuis $i = 1$, jusqu'à $i = n$, et $\Sigma d_\lambda^{\,2}$ désigne la somme des carrés des erreurs dans la représentation des valeurs données de u par notre série, arrêtée au terme $\Sigma d_\lambda^{\,2}$, somme d'après laquelle on trouvera l'erreur moyenne par la formule

$$E = \sqrt{\frac{1}{n}\sum d_\lambda^{\,2}}.$$

Formules relatives à la détermination du terme $K_0\psi_0(x)$

$$\begin{aligned}
(0,0) &= \Sigma x_i^{\,0} = n,\\
K_0 &= \frac{\Sigma u_i}{(0,0)},\\
\psi_0(x) &= 1,\\
\Sigma d_0^{\,2} &= \Sigma u_i^{\,2} - (0,0)\,K_0^{\,2}.
\end{aligned}$$

Formules relatives à la détermination du terme $K_1\psi_1(x)$.

$$(0,1)=\Sigma x_i, \qquad (0,2)=\Sigma x_i^2,$$

$$a_1=(0,0),$$

$$b_1=\frac{(0,1)}{(0,0)}, \qquad (1,1)=(0,2)-b_1(0,1),$$

$$K_1=\frac{\Sigma x_i u_i-(0,1)K_0}{(1,1)},$$

$$\psi_1(x)=x-b_1,$$

$$\Sigma d_1^2=\Sigma d_0^2-(1,1)K_1^2.$$

Formules relatives à la détermination du terme $K_2\psi_2(x)$.

$$(0,3)=\Sigma x_i^3, \qquad (0,4)=\Sigma x_i^4,$$

$$(1,2)=(0,3)-b_1(0,2), \qquad (1,3)=(0,4)-b_1(0,3),$$

$$a_2=\frac{(0,1)}{(0,0)},$$

$$b_2=\frac{(1,2)}{(1,1)}-\frac{(0,1)}{(0,0)}, \qquad (2,2)=(1,3)-b_2(1,2)-a_2(0,2),$$

$$K_2=\frac{\Sigma x_i^2 u_i-(0,2)K_0-(1,2)K_1}{(2,2)},$$

$$\psi_2(x)=(x-b_2)\psi_1(x)-a_2\psi_0(x),$$

$$\Sigma d_2^2=\Sigma d_1^2-(2,2)K_2^2.$$

. . . . . .

. . . . . .

Formules relatives à la détermination du terme $K_\lambda\psi_\lambda(x)$.

$$(0,2\lambda-1)=\Sigma x_i^{2\lambda-1}, \qquad (0,2\lambda)=\Sigma x_i^{2\lambda},$$

$$(1,2\lambda-2)=(0,2\lambda-1)-b_1(0,2\lambda-2), \qquad (1,2\lambda-1)=(0,2\lambda)-b_1(0,2\lambda-1),$$

$$(2,2\lambda-3)=(1,2\lambda-2)-b_2(1,2\lambda-3)-a_2(0,2\lambda-3), \quad (2,2\lambda-2)=(1,2\lambda-1)-b_2(1,2\lambda-2)-a_2(0,2\lambda-2),$$

$$(3,2\lambda-4)=(2,2\lambda-3)-b_3(2,2\lambda-4)-a_3(1,2\lambda-4), \quad (3,2\lambda-3)=(2,2\lambda-2)-b_3(2,2\lambda-3)-a_3(1,2\lambda-3),$$

. . . . . .

$$(\lambda-1,\lambda)=(\lambda-2,\lambda+1) \qquad (\lambda-1,\lambda+1)=(\lambda-2,\lambda+2)$$
$$-b_{\lambda-1}(\lambda-2,\lambda) \qquad -b_{\lambda-1}(\lambda-2,\lambda+1)$$
$$-a_{\lambda-1}(\lambda-3,\lambda), \qquad -a_{\lambda-1}(\lambda-3,\lambda+1),$$

$$a_\lambda=\frac{(\lambda-1,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)},$$

$$b_\lambda=\frac{(\lambda-1,\lambda)}{(\lambda-1,\lambda-1)}-\frac{(\lambda-2,\lambda-1)}{(\lambda-2,\lambda-2)},\quad (\lambda,\lambda)=(\lambda-1,\lambda+1)+b_\lambda(\lambda-1,\lambda)-a_\lambda(\lambda-2,\lambda),$$

$$K_\lambda=\frac{\Sigma x_i^\lambda u_i-(0,\lambda)K_0-(1,\lambda)K_1-(2,\lambda)K_2-\ldots\ldots-(\lambda-1,\lambda)K_{\lambda-1}}{(\lambda,\lambda)},$$

$$\psi_\lambda(x)=(x-b_\lambda)\psi_{\lambda-1}(x)-a_\lambda\psi_{\lambda-2}(x),$$
$$\Sigma d_\lambda^{\,2}=\Sigma d^2_{\lambda-1}-(\lambda,\lambda)K_\lambda^2.$$

§ VII.

Les formules que nous venons de donner pour déterminer successivement les termes

$$K_0\psi_0(x),\ K_1\psi_1(x),\ K_2\psi_2(x),\ldots\ldots K_\lambda\psi_\lambda(x)$$

dans le développement de u d'après notre série, et pour évaluer, en même temps, la somme des carrés des erreurs avec lesquelles les termes trouvés de u représentent toutes ses valeurs données, nous fournissent une méthode d'interpolation parabolique, importante sous plus d'un rapport. En vertu de la propriété remarquable de notre série, cette méthode donne l'expression de u sous forme d'un polynome avec les coefficients les plus probables. Sans fixer d'avance le nombre de ses termes, par cette méthode, on les trouvera successivement l'un après l'autre, et on reconnaîtra tout de suite celui auquel on peut s'arrêter d'après la somme des carrés des erreurs avec lesquelles les termes trouvés de u représentent ses valeurs données, somme qui donne sur le champ l'erreur moyenne de leur représentation. De plus, il est aisé de voir par la composition de nos formules que lorsque le nombre des valeurs données de u et celui des termes de son expression sont considérables, dans notre méthode d'interpolation les calculs sont moins prolixes que dans celles maintenant en usage.

Cette prolixité des calculs est due presque entièrement aux différentes *multiplications* et *divisions* dont le nombre s'accroît plus ou moins rapidement, avec ceux des valeurs données de u et des termes dans son expression. C'est sous ce rapport que nous allons montrer l'avantage de notre méthode d'interpolation, en laissant de côté les *additions* et les *soustractions* qui, dans le travail de ces calculs, n'entrent que pour bien peu de chose, et pour lesquelles on peut aussi bien manifester l'avantage de notre méthode.

Pour trouver par nos formules l'expression de u avec $\lambda+1$ termes, on devra évaluer $3\lambda+1$ sommes

$$\Sigma x_i,\ \Sigma x_i^{\,2},\ \Sigma x_i^{\,3},\ldots\ldots\Sigma x_i^{\,2\lambda},$$
$$\Sigma u_i,\ \Sigma x_i u_i,\ \Sigma x_i^{\,2}u_i,\ldots\ldots\Sigma x_i^{\,\lambda}u_i,$$

et au moyen de ces sommes, en cherchant les termes

$$K_0\psi_0(x),\ K_1\psi_1(x),\ K_2\psi_2(x),\ldots\ldots K_\lambda\psi_\lambda(x),$$

par ce que nous avons vu, et en les réduisant à la forme définitive

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots,$$

on n'aura à faire des *multiplications* ou *divisions* qu'en nombre $4\lambda^2 + 2$.

Mais si l'on cherche cette expression de u, à l'ordinaire, par la méthode des *moindres carrés*, on est porté à calculer les mêmes sommes

$$\Sigma x_i,\ \Sigma x_i^2,\ \Sigma x_i^3,\ldots\ldots\Sigma x_i^{2\lambda},$$
$$\Sigma u_i,\ \Sigma x_i u_i,\ \Sigma x_i^2 u_i,\ldots\ldots\Sigma x_i^\lambda u_i$$

pour la composition des équations déterminant $\lambda + 1$ coefficients de u, et en résolvant ces équations à $\lambda + 1$ inconnues, on tombe sur les *multiplications* et les *divisions* dont le nombre, avec l'accroissement de λ, croit, comme on le sait, bien plus rapidement que $4\lambda^2 + 2$.

D'après la méthode de Cauchy, en cherchant, dans le développement de u, les termes

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Hx^\lambda,$$

on doit, pour $x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots\ldots,\ x_n$, évaluer plusieurs fonctions, dont les degrés montent jusqu'à λ, et composer par leur moyen les sommes qu'on nomme *subordonnées*. Or cela exige, évidemment, bien plus de *multiplications* qu'il n'en faut pour calculer les sommes

$$\Sigma x_i,\ \Sigma x_i^2,\ \Sigma x_i^3,\ldots\ldots\Sigma x_i^{2\lambda},$$
$$\Sigma u_i,\ \Sigma x_i u_i,\ \Sigma x_i u_i,\ldots\ldots\Sigma x_i^\lambda u_i,$$

qui se présentent dans l'évaluation de $\lambda + 1$ termes de notre série, et aussi pour trouver celle-ci:

$$\Sigma u_i^2$$

qui entre dans la détermination des sommes

$$\Sigma d_0^2,\ \Sigma d_1^2,\ \Sigma d_2^2,\ldots\ldots,$$

par lesquelles, dans notre méthode, on reconnaîtra le nombre des termes importants pour l'interpolation.

D'autre part, pour trouver les fonctions, comprises dans les sommes *subordonnées*, et pour évaluer par elles les coefficients A, B, C,$\ldots\ldots H$ de l'expression de

$$u = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Hx^\lambda,$$

dans la méthode de Cauchy, il est important de faire plusieurs *multiplications* et *divisions* dont le nombre total, avec l'accroissement de λ, croît plus rapidement que $4\lambda^2 + \lambda + 3$, nombre des mêmes opérations qui se présentent quand, par notre méthode, d'après les valeurs de

$$\Sigma x_i,\ \Sigma x_i^2,\ \Sigma x_i^3, \ldots\ldots \Sigma x_i^{2\lambda},$$
$$\Sigma u_i,\ \Sigma x_i u_i,\ \Sigma x_i^2 u_i, \ldots\ldots \Sigma x_i^{\lambda} u_i,\ \Sigma u_i^2,$$

on cherche $\lambda + 1$ termes et on détermine successivement les sommes

$$\Sigma d_0^2,\ \Sigma d_1^2,\ \Sigma d_2^2, \ldots\ldots \Sigma d_\lambda^2.$$

Par là il est certain que, à cause du nombre de ses opérations, la méthode de Cauchy est loin d'être aussi simple que celle qui résulte de notre série. Mais comme plusieurs de ces opérations, dans la méthode de Cauchy, se simplifient de plus en plus à mesure que la convergence de la série

$$u = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Hx^{\lambda}$$

s'accroît, il n'y a aucun doute qu'on ne rencontre des cas particuliers où elle devient plus expéditive que la nôtre.

§ VIII.

Pour montrer sur un exemple l'usage de notre méthode d'interpolation, nous allons l'appliquer à cette suite des valeurs de x et u*):

$x_1 = 0{,}15411$	$u_1 = 19{,}47$
$x_2 = 0{,}19516$	$u_2 = 21{,}83$
$x_3 = 0{,}22143$	$u_3 = 23{,}11$
$x_4 = 0{,}28802$	$u_4 = 26{,}11$
$x_5 = 0{,}32808$	$u_5 = 27{,}60$
$x_6 = 0{,}38183$	$u_6 = 28{,}89$
$x_7 = 0{,}45517$	$u_7 = 33{,}17$
$x_8 = 0{,}57012$	$u_8 = 33{,}38$
$x_9 = 0{,}75930$	$u_9 = 32{,}31$
$x_{10} = 0{,}91075$	$u_{10} = 31{,}88$
$x_{11} = 1{,}13895$	$u_{11} = 25{,}46.$

En cherchant à exprimer u par un seul terme

$$K_0\psi_0(x),$$

*) Ces valeurs représentent les résultats de la première série des observations de M. Marie Davy sur la résistance au changement de conducteur qu'il donne dans son Mémoire, intitulé: *Recherches expérimentales sur l'électricité voltaïque* (Annales de chimie et de physique, série III, tome 19). — Par x nous désignons l'inverse de l'intensité du courant, réduite à sa centième partie, et par u la résistance.

on prendra

$$(0,0) = \Sigma x_i^0 = 11,$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 19{,}47 \\ u_2 &= 21{,}83 \\ u_3 &= 23{,}11 \\ u_4 &= 26{,}11 \\ u_5 &= 27{,}60 \\ u_6 &= 28{,}89 \\ u_7 &= 33{,}17 \\ u_8 &= 33{,}38 \\ u_9 &= 32{,}31 \\ u_{10} &= 31{,}88 \\ u_{11} &= 25{,}46 \\ \hline \Sigma u_i &= 303{,}21 \end{aligned}$$

$$K_0 = \frac{\Sigma u_i}{(0,0)} = 27{,}5645,$$

$$\psi_0(x) = 1,$$

ce qui donne, exactement jusqu'à 0,001,

$$K_0 \psi_0(x) = 27{,}564.$$

Pour trouver la somme des carrés des erreurs avec lesquelles le terme trouvé représente les valeurs données, on fera les calculs suivants:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= 379{,}08 \\ u_2^2 &= 476{,}55 \\ u_3^2 &= 534{,}07 \\ u_4^2 &= 681{,}73 \\ u_5^2 &= 761{,}76 \\ u_6^2 &= 834{,}73 \\ u_7^2 &= 1100{,}25 \\ u_8^2 &= 1114{,}22 \\ u_9^2 &= 1043{,}94 \\ u_{10}^2 &= 1016{,}33 \\ u_{11}^2 &= 648{,}21 \\ \hline \Sigma u_i^2 &= 8590{,}77 \\ -(0,0) K_0^2 &= -8357{,}84 \\ \hline \Sigma d_0^2 = \Sigma u_i^2 - (0,0) K_0^2 &= 232{,}93, \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'erreur moyenne

$$E = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma d_0^2} = \sqrt{\frac{232{,}93}{11}} = 4{,}6.$$

En remarquant d'après cela l'insuffisance de l'expression de u par un seul terme

$$K_0 \psi_0(x),$$

on cherchera le second terme

$$K_1 \psi_1(x),$$

et pour cela on calculera successivement

$$(0,1) = \Sigma x_i,\ (0,2) = \Sigma x_i^2,$$

$$a_1 = (0,0),\ b_1 = \frac{(0,1)}{(0,0)},$$

$$(1,1) = (0,2) - b_1(0,1),$$

$$\Sigma x_i u_i,\ \Sigma x_i u_i - (0,1) K_0,$$

$$K_1 = \frac{\Sigma x_i u_i - (0,1) K_0}{(1,1)},\ \psi_1(x)$$

ainsi qu'il suit:

$x_1 = 0{,}15411$	$x_1^2 = 0{,}02375$
$x_2 = 0{,}19516$	$x_2^2 = 0{,}03809$
$x_3 = 0{,}22143$	$x_3^2 = 0{,}04903$
$x_4 = 0{,}28802$	$x_4^2 = 0{,}08295$
$x_5 = 0{,}32808$	$x_5^2 = 0{,}10764$
$x_6 = 0{,}38183$	$x_6^2 = 0{,}14579$
$x_7 = 0{,}45517$	$x_7^2 = 0{,}20718$
$x_8 = 0{,}57012$	$x_8^2 = 0{,}32504$
$x_9 = 0{,}75930$	$x_9^2 = 0{,}57654$
$x_{10} = 0{,}91075$	$x_{10}^2 = 0{,}82947$
$x_{11} = 1{,}13895$	$x_{11}^2 = 1{,}29721$
$(0,1) = \Sigma x_i = 5{,}40292$	$(0,2) = \Sigma x_i^2 = 3{,}68269$
$a_1 = (0,0) = 11$	$-b_1(0,1) = -2{,}65378$
$b_1 = \frac{(0,1)}{(0,0)} = 0{,}49117$	$(1,1) = (0,2) - b_1(0,1) = 1{,}02891$

$$
\begin{aligned}
x_1 u_1 &= 3{,}00052\\
x_2 u_2 &= 4{,}26034\\
x_3 u_3 &= 0{,}11725\\
x_4 u_4 &= 7{,}52020\\
x_5 u_5 &= 9{,}05501\\
x_6 u_6 &= 11{,}03105\\
x_7 u_7 &= 15{,}09799\\
x_8 u_8 &= 19{,}03060\\
x_9 u_9 &= 24{,}53298\\
x_{10} u_{10} &= 29{,}03471\\
x_{11} u_{11} &= 28{,}99767\\
\hline
\Sigma x_i u_i &= 156{,}67832\\
-(0,1)K_0 &= -148{,}92903\\
\hline
\Sigma x_i u_i - (0,1)K_0 &= 7{,}74929\\
K_1 = \tfrac{\Sigma x_i u_i - (0,1)K_0}{(1,1)} &= 7{,}5320,
\end{aligned}
$$

$$\psi_1(x) = x - b_1 = x - 0{,}49117.$$

Donc,

$$K_1\psi_1(x) = 7{,}5320\,(x - 0{,}49117) = 7{,}532\,x - 3{,}699.$$

En passant à la détermination de Σd_1^2, on prendra

$$
\begin{aligned}
\Sigma d_0^2 &= 232{,}93\\
-(1,1)K_1^2 &= -\ 58{,}37\\
\hline
\Sigma d_1^2 = \Sigma d_0^2 - (1,1)K_1^2 &= 174{,}56,
\end{aligned}
$$

d'où, pour l'erreur moyenne de la représentation des valeurs données de u par ses deux termes trouvés, résulte

$$E = \sqrt{\tfrac{1}{n}\Sigma d_1^2} = \sqrt{\tfrac{174{,}56}{11}} = 3{,}98.$$

Une erreur moyenne aussi considérable n'étant pas admissible, on cherchera le troisième terme

$$K_2\psi_2(x),$$

et pour cela on déterminera successivement les quantités

$$(0,3) = \Sigma x_i^3,\ (0,4) = \Sigma x_i^4,$$

$$(1,2) = (0,3) - b_1(0,2),\ (1,3) = (0,4) - b_1(0,3),$$

$$a_2 = \tfrac{(1,1)}{(0,0)},\ b_2 = \tfrac{(1,2)}{(1,1)} - \tfrac{(0,1)}{(0,0)},$$

$$(2,2) = (1,3) - b_2(1,2) - a_2(0,2),$$

$$\Sigma x_i^2 u_i,\ \Sigma x_i^2 u_i - (0,2)K_0 - (1,2)K_1,$$

$$K_2 = \tfrac{\Sigma x_i^2 u_i - (0,2)K_0 - (1,2)K_1}{(2,2)}$$

et la fonction

$$\psi_2(x)$$

de la manière suivante:

$$x_1^3 = 0{,}00367$$
$$x_2^3 = 0{,}00743$$
$$x_3^3 = 0{,}01086$$
$$x_4^3 = 0{,}02389$$
$$x_5^3 = 0{,}03531$$
$$x_6^3 = 0{,}05567$$
$$x_7^3 = 0{,}09430$$
$$x_8^3 = 0{,}18531$$
$$x_9^3 = 0{,}43776$$
$$x_{10}^3 = 0{,}75544$$
$$x_{11}^3 = 1{,}47745$$
$$(0,3) = \Sigma x_i^3 = 3{,}08709$$
$$-b_1(0,2) = \quad -1{,}80884$$
$$(1,2) = (0,3) - b_1(0,2) = 1{,}27825$$
$$a_2 = \frac{(1,1)}{(0,0)} = 0{,}09354$$
$$\frac{(1,2)}{(1,1)} = \quad 1{,}24235$$
$$-\frac{(0,1)}{(0,0)} = -0{,}49117$$
$$b_2 = \frac{(1,2)}{(1,1)} - \frac{(0,1)}{(0,0)} = 0{,}75118$$

$$x_1^4 = 0{,}00056$$
$$x_2^4 = 0{,}00145$$
$$x_3^4 = 0{,}00240$$
$$x_4^4 = 0{,}00688$$
$$x_5^4 = 0{,}01158$$
$$x_6^4 = 0{,}02126$$
$$x_7^4 = 0{,}04292$$
$$x_8^4 = 0{,}10565$$
$$x_9^4 = 0{,}33240$$
$$x_{10}^4 = 0{,}68801$$
$$x_{11}^4 = 1{,}68275$$
$$(0,4) = \Sigma x_i^4 = 2{,}89586$$
$$-b_1(0,3) = \quad -1{,}51630$$
$$(1,3) = (0,4) - b_1(0,3) = 1{,}37956$$
$$-b_2(1,2) = -0{,}96020$$
$$-a_2(0,2) = -0{,}34446$$
$$(2,2) = (1,3) - b_2(1,2) - a_2(0,2) = 0{,}07490$$

$$x_1^2 u_1 = 0{,}46241$$
$$x_2^2 u_2 = 0{,}83145$$
$$x_3^2 u_3 = 1{,}13311$$
$$x_4^2 u_4 = 2{,}16596$$
$$x_5^2 u_5 = 2{,}97075$$
$$x_6^2 u_6 = 4{,}21199$$
$$x_7^2 u_7 = 6{,}87215$$
$$x_8^2 u_8 = 10{,}84949$$
$$x_9^2 u_9 = 18{,}62790$$
$$x_{10}^2 u_{10} = 27{,}44337$$
$$x_{11}^2 u_{11} = 33{,}02691$$
$$\Sigma x_i^2 u_i = 107{,}59549$$
$$-(0,2) K_0 = -101{,}51151$$
$$-(1,2) K_1 = \quad -9{,}62778$$
$$\Sigma x_i^2 u_i - (0,2) K_0 - (1,2) K_1 = \quad -3{,}54380$$

$$K_2 = \frac{\Sigma x_i^2 u_i - (0,2) K_0 - (1,2) K_1}{(2,2)} = -47,313,$$

$$\psi_2(x) = (x - b_2)\psi_1(x) - a_2 = (x - 0,75118)(x - 0,49117) - 0,09354$$
$$= x^2 - 1,24235\, x + 0,27628.$$

D'où il suit

$$K_2 \psi_2(x) = -47,313\,(x^2 - 1,24235\, x + 0,27628)$$
$$= -47,313\, x^2 + 58,779\, x - 13,071,$$

et comme

$$\Sigma d_1^2 = \quad 174,56,$$
$$-(2,2) K_2^2 = -167,64,$$
$$\Sigma d_2^2 = \Sigma d_1^2 - (2,2) K_0^2 = \quad 6,92,$$

on trouve pour l'erreur moyenne

$$E = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma d_2^2} = \sqrt{\frac{6,92}{11}} = 0,79.$$

En procédant ainsi, on obtiendra l'expression de u terme par terme, et par là l'erreur moyenne dans la représentation des valeurs données de u s'approchera de plus en plus de zéro. Mais si l'on trouve suffisant de réduire cette erreur à 0,79, on s'arrêtera aux termes trouvés

$$K_0 \psi_0(x) = \quad 27,564$$
$$K_1 \psi_1(x) = \quad 7,532\, x - 3,699$$
$$K_2 \psi_2(x) = -47,313\, x^2 + 58,779\, x - 13,071,$$

et par là, pour l'expression cherchée de u, on aura

$$+ 27,564$$
$$- \ 3,699 + \ 7,532\, x$$
$$-13,071 + 58,779\, x - 47,313\, x^2$$
$$u = 10,794 + 66,311\, x - 47,313\, x^2.$$

0 992

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01769 5362